ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 2, 1964 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

М. Б. Балк

Вырожденные бианалитические отображения

1. Под функцией, бианалитической в некоторой односвязной области D плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, понимают функцию вида

$$w = B(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z), \tag{1}$$

где $\bar{z} = x - iy$, а $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — однозначные аналитические функции в D.

Отображение, производимое функцией

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2}$$

называется *вырожденным*, если оно переводит какую-либо область D в множество без внутренних точек (например, в точку или простую дугу).

Хорошо известно, что всякая *аналитическая* функция, не являющаяся постоянной, осуществляет невырожденное отображение. Иначе обстоит дело с *бианалитическими* функциями: среди них имеются такие, которые отличны от константы, но все же осуществляют вырожденные отображения. Мы намерены дать явные аналитические выражения для всех таких функций.

2. В ходе дальнейших рассуждений мы воспользуемся следующими замечаниями, несложные доказательства которых мы здесь опустим.

Замечание 1. Если две бианалитические функции $B_1(z) \equiv \varphi_1(z) + \bar{z}\psi_1(z)$ и $B_2(z) = \varphi_2(z) + \bar{z}\psi_2(z)$ тождественно равны в некоторой области D, то имеют место тождества

$$\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z) \text{ и } \psi_1(z) \equiv \psi_2(z).$$

Замечание 2. Если для каждого z из некоторого круга $\delta\{|z| < \rho\}$ сходится двойной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(k)} \bar{z}^k z^\nu \tag{3}$$

и его сумма равна нулю, то все коэффициенты $a_\nu^{(k)}$ равны нулю.

3. Выясним еще следующий вопрос.

Если модуль аналитической функции постоянен в некоторой области, то сама функция—константа. А каков вид *бианалитической* функции, имеющей постоянный модуль?

Лемма. *Для того, чтобы модуль функции $B(z)$ (см. (1)), бианалитической в некоторой области D, был в этой области постоянен, необходимо и достаточно, чтобы $B(z)$ имела вид*

$$B(z)=\lambda\overline{L(z)}/L(z),\tag{4}$$

где λ — константа, а $L(z)$ — линейная функция относительно z:

$$L(z)=A+Bz.\tag{5}$$

Доказательство. Достаточность условия леммы очевидна. Докажем его необходимость.

Выделим в D какой-либо кружок $|z-a|<\rho$, который обозначим через Δ. По условию в этом кружке

$$|B(z)|\equiv M=\text{const}.\tag{6}$$

Если $M=0$, то теорема тривиальна. Поэтому будем полагать $M\neq 0$. Проведем сначала доказательство при следующих дополнительных ограничениях:

$$\text{I. } a=0;\quad \text{II. } B(0)=1.\tag{7}$$

Тогда

$$\varphi(0)=1,\quad M=1.$$

Пусть

$$\varphi(z)=1+z\varphi_1(z),\quad \psi(0)=b,\quad \psi(z)=b+z\psi_1(z).$$

Положим

$$L(z)=1+\bar{b}z.\tag{8}$$

Тогда

$$B(z)=\overline{L(z)}+z\,[\varphi_1(z)+\bar{z}\psi_1(z)].$$

$$B(z)\,L(z)=\overline{L(z)}+zh(z),\tag{9}$$

где $h(z)$ — некоторая функция, бианалитическая в кружке Δ.

Так как в Δ $|B(z)|\equiv M=1$, то из (9) получим:

$$|L(z)|^2=|\overline{L(z)}+zh(z)|^2,$$

или

$$Lzh+\overline{Lzh}+z\bar{z}h\bar{h}=0.\tag{10}$$

$h(z)$ мы можем записать так: $h=\theta_0(z)+\bar{z}\cdot\theta_1(z)$, где $\theta_0(z)$ и $\theta_1(z)$ — функции, аналитические в кружке Δ. Пусть $\theta_0(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, $\theta_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$.

$$h=q_0+q_1+q_2+\cdots+q_n+\cdots,$$

где

$$q_0 = a_0,$$
$$q_1 = a_1 z + b_0 \bar{z},$$
$$q_2 = a_2 z^2 + b_1 \bar{z} z$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$q_n = a_n z^n + b_{n-1} \bar{z} z^{n-1}.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Равенство (10) примет вид:

$$(1+\bar{b}z)\,z\,(q_0+q_1+q_2+\cdots)+(1+b\bar{z})\,\bar{z}\,(\bar{q}_0+\bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots)+$$
$$+z\bar{z}(q_0+q_1+q_2+\cdots+q_n+\cdots)(\bar{q}_0+\bar{q}_1+\bar{q}_2+\cdots+\bar{q}_n+\cdots)=0. \quad (11)$$

Соберем в левой части этого тождества члены первой степени относительно z. В силу замечания 1 их сумма должна быть равна нулю.

Получаем $a_0 z = 0$, то есть $a_0 = q_0 = 0$.

Допустим, что мы уже доказали, что $q_0 = q_1 = \cdots = q_{m-1} = 0$. Покажем, что тогда $q_m = 0$. Равенство (11) имеет теперь вид:

$$(1+\bar{b}z)\,z\,(q_m+q_{m+1}+\cdots)+(1+b\bar{z})\,\bar{z}\,(\bar{q}_m+\overline{q_{m+1}}+\cdots)+$$
$$+z\bar{z}\,(q_m+q_{m+1}+\cdots)\,(\bar{q}_m+\overline{q_{m+1}}+\cdots)=0. \quad (12)$$

Учитывая вид многочленов q_n при $n \geqslant 1$, легко подсчитать, что в левой части равенства (12) одночлен $z^{m+1}\bar{z}^{m+1}$ входит только в произведение $z\bar{z}q_m\bar{q}_m$, и притом с коэффициентом $|a_m|^2+|b_{m-1}|^2$. Так как этот коэффициент (в силу замечания 2) равен нулю, то $a_m = b_{m-1} = 0$, откуда $q_m = 0$. По индукции заключаем, что $q_n = 0$ для каждого целого неотрицательного n; значит, и $h(z) = 0$. Следовательно, (см. (9)) при ограничениях I и II

$$B(z) = (1+\bar{b}z)/(1+b\bar{z}). \quad (13)$$

От дополнительных требований I и II легко освободиться. Действительно, при $M \neq 0$ $B(a) \neq 0$.

Положим

$$z = \zeta + a \quad (14)$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(\zeta) = B(a+\zeta)/B(a). \quad (15)$$

Легко проверить, что 1) эта функция будет бианалитической в круге $|\zeta| < \rho$; 2) $|\Phi(\zeta)| = 1$ в этом круге; 3) $\Phi(0) = 1$. В силу ранее проведенного рассуждения $\Phi(\zeta)$ имеет вид:

$$\Phi(\zeta) = (1+b\bar{\zeta})/(1+\bar{b}\zeta) \ (b \text{ — константа}). \quad (16)$$

Из (14)—(16) получим:

$$B(z)=B(a)\Phi(z-a)=\lambda(\bar{A}+\bar{B}\bar{z})/(A+Bz),$$

где λ, A, B — какие-то константы.

Лемма доказана полностью.

4. Найдем теперь все вырожденные бианалитические отображения.

Теорема. *Для того, чтобы отображение, осуществляемое бианалитической функцией $w=B(z)$, было вырожденным в некоторой* (односвязной) *области D, необходимо и достаточно, чтобы $B(z)$ была представима в одном из следующих видов:*

а) $$w=A(e^{i\alpha}z+\bar{z})+B, \tag{17}$$

б) $$w=A(z+c)^{\gamma}(\bar{z}+\bar{c})+B \tag{18}$$

(A, B, c, α, γ — константы, $\operatorname{Im}\alpha=0$, $|\gamma|=1$).

При этом образом области D может быть только одна из следующих фигур (или ее часть): точка, прямая, окружность, логарифмическая спираль (здесь мы под логарифмической спиралью понимаем линию, которая может быть получена из кривой с уравнением (в полярных координатах) $\rho=a^{\varphi}$ с помощью какого-либо преобразования подобия).

Доказательство. Известно, что необходимым и достаточным условием вырожденности отображения $w=u(x, y)+iv(x, y)$, дифференцируемого в области D, является равенство нулю якобиана

$$I_{w/z}=\frac{D(u, v)}{D(x, y)}. \tag{19}$$

Кроме того, известно, что

$$I_{w/z}=|w_z|^2-|w_{\bar{z}}|^2. \tag{20}$$

Функция $B(z)$, бианалитическая в односвязной области D, представима в этой области в виде (1), где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в D.

Если $\psi(z)\equiv 0$ в D, то теорема, очевидно, верна (образом области D при вырожденном *аналитическом* отображении будет точка). Пусть $\psi(z)$ не есть тождественный нуль в D. Тогда мы можем внутри D выбрать настолько малый кружок $\delta\{|z-a|<\rho\}$, внутри которого $\psi(z)$ уже нигде не обращается в нуль.

Сделаем замену переменных: $z-a=\zeta$,

$$F(\zeta)\equiv B(\zeta+a)\equiv B(z). \tag{21}$$

$F(\zeta)$ будет бианалитической в кружке $\delta\{|\zeta|<\rho\}$:

$$w=F(\zeta)=\Phi(\zeta)+\bar{\zeta}\Psi(\zeta), \tag{22}$$

где

$$\Psi(\zeta)\equiv\psi(\zeta+a),\quad \Phi(\zeta)\equiv\varphi(\zeta+a)+\bar{a}\psi(\zeta+a),$$

так что в кружке $\delta\{|\zeta|<\rho\}$ функция $\Psi(\zeta)$ ни разу не обращается в нуль.

$F(\zeta)$ тогда и только тогда осуществляет вырожденное отображение кружка δ, когда $I_{w/z}\equiv 0$ в δ, то есть

$$|\Phi'(\zeta)+\bar{\zeta}\Psi'(\zeta)|^2-|\Psi(\zeta)|^2=0,$$

или

$$\left|\frac{\Phi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}+\bar{\zeta}\frac{\Psi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}\right|=1 \quad \text{в} \quad \delta. \tag{23}$$

Согласно лемме, в δ

$$\frac{\Phi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}+\bar{\zeta}\frac{\Psi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}=\lambda\frac{1+\bar{q}\bar{\zeta}}{1+q\zeta}, \tag{24}$$

где λ и q — константы, причем $|\lambda|=1$ (то есть $\lambda=e^{i\alpha}$). Поэтому в δ (см. замечание 1)

$$\frac{\Phi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}=\frac{\lambda}{1+q\zeta}, \tag{25}$$

$$\frac{\Psi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}=\frac{\lambda\bar{q}}{1+q\zeta}. \tag{26}$$

Возможны 2 случая:

а) $q=0$. Тогда $\Psi'(\zeta)=0$, $\Psi(\zeta)=A=\text{const}$. $\Phi'(\zeta)=\lambda\Psi(\zeta)=\lambda A$, т. е. $\Phi(\zeta)=\lambda A\zeta+B_1$, где $B_1=\text{const}$. $F(\zeta)=A(\lambda\zeta+\bar{\zeta})+B_1$,

$$B(z)=F(z-a)=A(e^{i\alpha}z+\bar{z})+B$$

($B=\text{const}$, α — вещественная константа).

Мы получим формулу (17);

б) $q\neq 0$. Обозначим $1/q$ через b.

Тогда

$$\frac{\Psi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}=\frac{\gamma}{\zeta+b}, \text{ где } \gamma=\lambda\frac{\bar{q}}{q}, \quad |\gamma|=1.$$

Отсюда

$$\Psi(\zeta)=A(\zeta+b)^{\gamma} \quad (A=\text{const}).$$

Из (26) найдем:

$$\frac{\Phi'(\zeta)}{\Psi(\zeta)}=\frac{\gamma\bar{b}}{\zeta+b},$$

то есть

$$\Phi'(\zeta)=\gamma\bar{b}A(\zeta+b)^{\gamma-1},$$

$$\Phi(\zeta)=A\bar{b}(\zeta+b)^{\gamma}+B, \quad (B=\text{const}),$$

$$w=\Phi(\zeta)+\bar{\zeta}\Psi(\zeta)=A(\zeta+b)^{\gamma}(\bar{\zeta}+\bar{b})+B.$$

Переходя обратно к переменному z (напомним, что $\zeta=z-a$) и обозначая $b-a$ через c, получим формулу (18). Заметим, что при мнимом γ функция (18) многозначна. Мы здесь имеем в виду какую-либо ее однозначную ветвь.

Пусть $A\neq 0$.

Выясним, во что преобразует функция (18) произвольную односвязную область D (не содержащую при $\gamma\neq 1$ точку $z=-c$).

а) При $\gamma=1$ $\quad w=A|z+c|^2+B,$

так что образом любой области D служит *луч* $w = At + B\,(t \geq 0)$ или его часть.

б) При $\quad \gamma = -1 \quad w = A(\bar{z} + \bar{c})/(z + c) + B,$ (27)

$|w - B| = |A|$. Образом области D служит *окружность* или ее часть.

в) Пусть $\gamma = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$. Так как $|\gamma| = 1$, то $\beta^2 = 1 - \alpha^2$.

В рассматриваемом случае $-1 < \alpha < 1$. Покажем, что область D преобразуется в логарифмическую спираль (или ее часть). Действительно, пусть $z + c = \rho e^{i\theta}$, $\omega = (w - B)/A$.

Тогда

$$\omega = \exp\{(\alpha + \beta i)[\ln\rho + i(\theta + 2k\pi)]\}\,\rho\exp(-i\theta) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\ln|\omega| = (\alpha + 1)\ln\rho - \beta(\theta + 2k\pi),$$

$$\operatorname{Arg}\omega = \beta\ln\rho + (\alpha - 1)(\theta + 2k\pi) + 2k\pi + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Зафиксируем k и будем брать $m = -k$.

Так как $\alpha \neq 1$, то $\beta \neq 0$.

$$(1 - \alpha)\ln|\omega| = (1 - \alpha)\beta\left[\frac{\alpha + 1}{\beta}\ln\rho - (\theta + 2k\pi)\right], \tag{28}$$

$$\beta\operatorname{Arg}\omega = (1 - \alpha)\beta\left[\frac{\beta}{1 - \alpha}\ln\rho - (\theta + 2k\pi)\right]. \tag{29}$$

Из $\beta^2 = 1 - \alpha^2$ следует, что $(\alpha + 1)/\beta = \beta/(1 - \alpha)$.

Поэтому

$$(1 - \alpha)\ln|\omega| = \beta\operatorname{Arg}\omega,$$

$$|\omega| = \exp\left(\frac{\beta}{1 - \alpha}\operatorname{Arg}\omega\right). \tag{30}$$

А это есть уравнение логарифмической спирали. Но $w = A\omega + B$. Это преобразование сводится лишь к гомотетии, повороту и сдвигу логарифмической спирали.

Итак, в случае в) бианалитическая функция (18) преобразует всякую допустимую область D в логарифмическую спираль или ее часть.

Что касается функции (17), то она, очевидно, преобразует область D либо в точку (если $A = 0$), либо в прямую или ее часть. Теорема доказана.

Смоленский педагогический институт
им. К. Маркса

Поступила 19 VI 19

Մ. Բ. Բալկ

ԷԱՓՈԽՎԱԾ ԲԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Բիանալիտիկ ֆունկցիաների համար (այսինքն՝

$$B(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z), \tag{1}$$

տեսքի ֆունկցիաների համար, որտեղ $\varphi(z)$-ը և $\psi(z)$-ը հոլոմորֆ են D տիրույթում), հաստատվում է այսպիսի թեորեմ։

Որպեսզի $w = B(z)$, բիանալիտիկ ֆունկցիան և իրականացվող արտապատկերումը էափոխված լինի D տիրույթում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $B(z)$-ը ներկայացվելի լինի հետևյալ տեսքերից մեկով

ա) $w = A(e^{i\alpha} z + \bar{z}) + B$,

բ) $w = A(z + c)^{\gamma}(\bar{z} + \bar{c}) + B$,

(A, B, c, α, γ — հաստատուններ են, $\operatorname{Im} \alpha = 0$, $|\gamma| = 1$)։