

В. М. Александров

О приближенном решении одного класса интегральных уравнений

В работе рассмотрено интегральное уравнение, к которому приводятся многие смешанные задачи теории упругости. Разработан удобный метод его приближенного решения. В качестве примера приведено решение задачи о действии штампа на упругую полосу, лежащую без трения на жестком основании.

§ 1. Общий вид решения интегрального уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$-\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{\lambda} d\xi = \pi f(x) - \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) d\xi, \quad |x| \leq 1, \quad (1.1)$$

где $\lambda \in (0, \infty)$ — некоторый параметр, $F(k)$ — четная функция, причем $F(k) \in H_p^\alpha\left(-\frac{2}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}\right)$, $\alpha > 0$, $p \geq 2^*$.

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi), \quad (1.2)$$

где функция $\varphi_0(\xi)$ определяется из уравнения

$$-\int_{-1}^1 \varphi_0(\xi) \ln \frac{|x-\xi|}{\lambda} d\xi = \pi f(x) - F(0) \int_{-1}^1 \varphi_0(\xi) d\xi, \quad |x| \leq 1. \quad (1.3)$$

Если функция $f(x)$ такова, что, по крайней мере, $f'(x) \in L_{4\beta+c}(-1, 1)$, то общее решение уравнения (1.3) имеет вид [1]

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[\frac{1}{\ln 2\lambda + F(0)} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_{-1}^1 \frac{f'(t) \sqrt{1-t^2} dt}{t-x} \right], \quad (1.4)$$

причем $\varphi_0(x) \in L_{4\beta+c}(-1, 1)$.

Поправочная функция $\varphi_1(\xi)$ очевидно удовлетворяет уравнению

* Через $H_p^\alpha(-\beta, \beta)$ обозначено пространство функций, p -я производная которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем α при $-\beta < x < \beta$.

В силу вышеуказанных свойств функций $\Phi(x)$, $f_*(x)$ и $F(k)$ ряды (2.1), (2.2), (2.4) равномерно сходятся при всех значениях $x \in [-1, 1]$ и $k \in \left[-\frac{2}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}\right]$ к этим функциям.

Используя формулы (1.6), (2.5) и интегралы*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_l(\xi) T_{2m}\left(\frac{x-\xi}{2}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \sum_{j=0}^{l+j-2m} c_{ij} T_j(x) \begin{cases} 1 & i=0 \\ 1/2 & i \neq 0, \end{cases} \quad i+j - \text{четно} \quad (2.6)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_l(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{|x-\xi|}{\lambda} d\xi = \begin{cases} \ln 2\lambda & i=0 \\ \frac{1}{l} T_l(x) & i \neq 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

можно преобразовать формулу (2.3) к следующему, более удобному для использования, виду

$$b_{0s} = F(0) b_0 \gamma_0 - \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \sum_{j=0}^{2m} B_{0j}^m b_j \gamma_{2j}, \quad (2.8)$$

$$b_{is} = - \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \sum_{j=0}^{i+j-2m} B_{ij}^m b_j \gamma_j, \quad i \neq 0, \quad i+j - \text{четно},$$

где

$$\gamma_s = \begin{cases} [\ln 2\lambda + F(0)]^{-1} & s=0 \\ s/2 & s \neq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Числа b_i определяются по формуле (2.3), в которой только необходимо отбросить звездочки, числа $B_{ij}^m = B_{ji}^m$ даны в таблице 1 для значений $m=0, 1, 2, 3, 4$.

Теперь на основании формул (1.7), (2.1), (2.2) и (2.4) представим уравнение (1.5) в виде

$$-\sum_{l=0}^{\infty} a_l \int_{-1}^1 \frac{T_l(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{|x-\xi|}{\lambda} d\xi = \pi \sum_{i=0}^{\infty} b_i T_i(x) - \\ - \sum_{l=0}^{\infty} a_l \sum_{m=0}^{\infty} c_{2m} \int_{-1}^1 \frac{T_l(\xi) T_{2m}\left(\frac{x-\xi}{2}\right)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi. \quad (2.10)$$

Вычислив интегралы в (2.10) по формулам (2.6) и (2.7) и приравняв коэффициенты правой и левой частей полученного соотношения при одинаковых $T_i(x)$, сведем определение функции $\varphi_i(x)$ из уравнения (1.5) к определению величин a_i из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Эту бесконечную систему будем

* Формула (2.7) дана в работе [3].

решать методом редукции. Урезанием могут быть получены следующие две системы линейных алгебраических уравнений для определения a_{2i} и a_{2i+1} :

$$a_{2i} = b_{2i}^n \beta_{2i} - \sum_{k=0}^{n-i} a_{2k} \alpha_{2k, 2i}^n, \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (2.11)$$

$$a_{2i+1} = b_{2i+1}^n \beta_{2i+1} - \sum_{k=0}^{n-i-1} a_{2k+1} \alpha_{2k+1, 2i+1}^n, \quad (i=0, 1, \dots, n-1), \quad (2.12)$$

где

$$\beta_{2p} = \begin{cases} 1/\ln 2, & p=0, \\ 2p, & p \neq 0, \end{cases} \quad \alpha_{2p, 2q}^n = \beta_{2p} \sum_{m=p+q}^n c_{2m} B_{2p, 2q}^m \begin{cases} 1 & q=0, \\ 1/2 & q \neq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

В соотношениях (2.11) и (2.12) числа b_{2i}^n находятся по формулам (2.14)

Таблица 1 только суммирование по m производится до $m=n$.

B_{ij}	m	0	1	2	3	4
B_{00}	1					
B_{20}		-2^{-1}	2^{-3}	-2^{-3}	$9 \cdot 2^{-7}$	
B_{40}		2^{-2}	0	$-15 \cdot 2^{-6}$	2^{-3}	
B_{60}		-1	1	$-3 \cdot 2^{-3}$	$3 \cdot 2^{-3}$	
B_{80}			2^{-1}	$5 \cdot 2^{-4}$	$-3 \cdot 2^{-4}$	
B_{100}			-2^{-1}	$3 \cdot 2^{-4}$	2^{-2}	
B_{120}			$3 \cdot 2^{-2}$	$-3 \cdot 2^{-2}$	$5 \cdot 2^{-4}$	
B_{140}				2^{-6}	2^{-3}	
B_{160}				$-3 \cdot 2^{-4}$	-2^{-2}	
B_{180}				$15 \cdot 2^{-5}$	-2^{-2}	
B_{200}				$-5 \cdot 2^{-3}$	$5 \cdot 2^{-3}$	
B_{220}					2^{-5}	
B_{240}					-2^{-4}	
B_{260}					$7 \cdot 2^{-5}$	
B_{280}					$-7 \cdot 2^{-4}$	
B_{300}					$35 \cdot 2^{-6}$	

в § 3 конкретный пример показывает быструю сходимость полученных таким образом приближенных решений к точному при увеличении n .

§ 3. Пример

Рассмотрим задачу о действии жесткого штампа из упругой полосы, лежащую без трения на жестком основании. Силы трения между штампом и полосой предполагаются отсутствующими.

Как известно, эта задача может быть приведена к решению интегрального уравнения, которое в безразмерных координатах имеет вид (1.1), причем $\varphi(\xi)$ — неизвестное давление между штампом и

полосой на линии контакта, $\lambda = \frac{h}{a}$, $f(x) = \frac{\Delta}{a} \delta(x)$, $\Delta = \frac{E}{2(1-\nu^2)}$.

$\xi = \frac{x'}{a}$, $\xi = \frac{\xi'}{a}$, h — толщина полосы, a — полудлина линии контакта,

$\delta(x)$ — неизвестная осадка границы полосы под штампом, x' , ξ' — размерные переменные. Функция $F(k)$ может быть представлена в следующей форме

$$F(k) = - \int_0^{\infty} \frac{[1 - L(u)] \cos ku - e^{-u}}{u} du, \quad (3.1)$$

где

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}. \quad (3.2)$$

Без особого труда можно показать, что функция $F(k)$, определяемая формулами (3.1), (3.2), непрерывна и непрерывно дифференцируемое число раз при $-\infty < k < \infty$.

Для получения приближенных решений рассматриваемой задачи способом, изложенным в § 2, прежде всего необходимо, используя формулы (2.5) и (3.1), (3.2), определить числа $c_{2m}(i)$. Для случая $i=1$ на машине „Урал“ найдены следующие значения чисел $c_{2m}(1)$ ($m=0, 1, 2, 3, 4$):

$$c_0 = 0,251, \quad c_2 = 0,498, \quad c_4 = -0,0863, \quad c_6 = 0,0156, \quad c_8 = -0,00276.$$

Теперь не представляет труда получить приближенное решение задачи при условии $\lambda=1$ для штампа с тем или иным основанием. Например, если $\delta(x) = \delta + ax$ (плоский, наклонный штамп), то приближенное решение, соответствующее случаю $n=3$, имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{\delta}{a} (1,905 - 0,968 x^2 + 0,268 x^4 - 0,070 x^6) + \right. \\ \left. + x (1,773 - 0,607 x^2 + 0,166 x^4) \right]. \quad (3.3)$$

Дальнейшее увеличение n не приводит к существенному уточнению решения, поэтому приближенное решение (3.3) можно считать практически точным. Это еще подтверждается тем, что решение (3.3) отличается от аналогичного решения (5.2), данного в работе [2], менее чем на 1% при всех $x \in [-1, 1]$.

В заключение заметим, что изложенный метод может быть с успехом применен к решению некоторых осесимметричных смешанных задач (например, для упругого слоя), только вместо полиномов Чебышева необходимо использовать полиномы Лежандра [3].

Վ. Մ. Ալեքսանդրով

ՄԻ ԴԱՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգվածում քննարկված է ինտեգրալ հավասարումը, որին բերվում
առաձգականության տեսության շատ խառը խնդիրներ:

Մշակված է այս հավասարման մոտավոր լուծման մի հարմար մեթոդ:

Որպես օրինակ բերված է հետևյալ խնդրի լուծումը՝ շտամպի ներգործ
թյունը առաձգական անշարժ շերտի վրա, որը գտնվում է առանց շփմ
կարծր հիմքի վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. ИЛ, 1960.
2. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 26, в. 5, 1962.
3. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. н., 14, № 3, 1961.