

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. М. Седраки

Излучение заряженной частицы,  
пересекающей металлический экран

В работе [3] было рассмотрено излучение частицы, пролетающей мимо металлического экрана, связанное с дифракцией электромагнитного поля частицы на металлическом экране. В работах [2], [4] рассматривалось излучение, появляющееся при пересечении заряженной частицей металлической плоскости. Ниже будет рассмотрено излучение, возникающее при пересечении заряженной частицей идеальной проводящей полуплоскости на заданном расстоянии от края полуплоскости. В этом случае мы имеем, с одной стороны, излучение заряженной частицы, пересекающей экран, связанное с дифракцией ее поля на металлическом экране, а с другой стороны, поправки к переходному излучению заряженной частицы при наличии края экрана.

Пусть траектория частицы перпендикулярна ребру экрана и пересекает экран на расстоянии  $d$  от его края. Рассмотренный нами случай интересен еще тем, что позволяет найти точное решение задачи при произвольной скорости частицы, в то время как аналогичные задачи были рассмотрены ранее для случая медленных  $\beta \ll 1$  и быстрых ( $1 - \beta \ll 1$ ) частиц [5—7]. Так как потери на излучение малы, то можно считать, что частица движется с постоянной скоростью.

Расположим ось  $z$  вдоль ребра экрана, а ось  $Ox$  в плоскости экрана (фиг. 1). Обозначим:  $\theta$  — угол наклона траектории частицы к плоскости,  $d$  — расстояние от ребра экрана до точки пересечения траектории частицы с плоскостью экрана.

Чтобы найти электрические и магнитные поля, созданные частицей, необходимо решить уравнения Максвелла при граничных условиях, налагаемых наличием металлического идеально проводящего экрана. В дальнейшей удобно использовать электромагнитные потенциалы  $A^\circ$  и  $A$ , где  $A^\circ = [\vec{A}^\circ, \varphi^\circ]$  — поле частицы в свободном пространстве, а  $A = [\vec{A}, \varphi]$  — поле, наведенное индуцированными зарядами и токами на экране. Связь электромагнитных полей с потенциалами дается следующими соотношениями

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}.$$

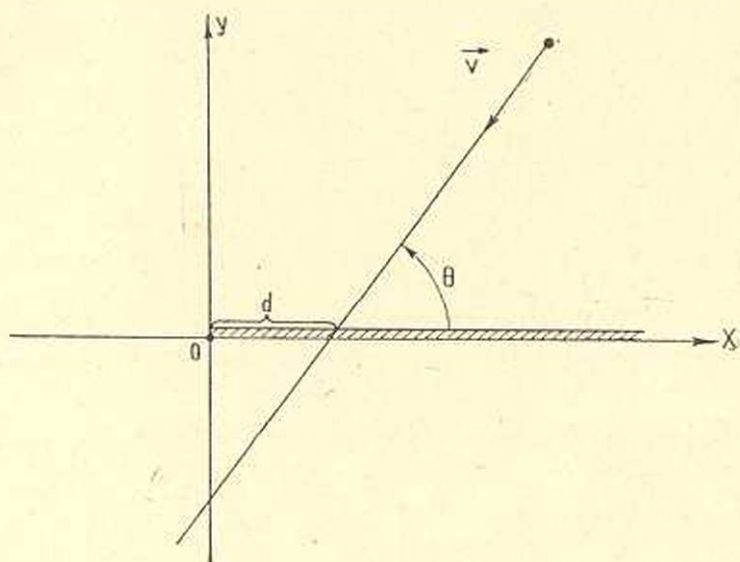
Введем  $A_{q, \omega}$  следующим образом:

$$A_{q, \omega}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{r}, t) e^{iqz + i\omega t} dz dt,$$

$$j_{q, \omega}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} j(x, z, t) e^{iqz + i\omega t} dz dt,$$

где

$j(x, z, t) = \left\{ \frac{1}{c} \vec{j}(x, z, t), \rho(x, z, t) \right\}$  — индуцированные токи и заряды на экране, а  $A(\vec{r}, t)$  — добавочный потенциал, обусловленный ими.



Фиг. 1. Ось  $z$  перпендикулярна плоскости чертежа.

Добавочные потенциалы  $A_{q, \omega}$  являются решениями волнового уравнения, где с правой стороны стоят заряды и токи, наведенные на экран. Решение волнового уравнения

$$A_{q, \omega}(x, y) = i\pi \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{y^2 + (x - \xi)^2}) j_{q, \omega}(\xi) d\xi, \quad (2)$$

где  $\rho = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q^2}$ .

Обозначим потенциалы на поверхности экрана через  $\bar{A}_{q,\omega}$ , тогда представляя  $j_{q,\omega}(x)$  интегралом Фурье по переменной  $x$ , мы можем написать

$$\bar{A}_{q,\omega}(x) = i(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j_{q,\omega}(x) e^{-ix}}{\sqrt{p^2 - x^2}} dx. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и имея в виду, что  $\bar{A}_{q,\omega}$  не имеет  $y$  компоненты, получим компоненты  $\bar{E}_x$  и  $\bar{E}_z$  на плоскости экрана

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= - (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \alpha p_{q,\omega}(x) + \frac{\omega}{c^2} j_x(x) \right] \frac{e^{-ix}}{\sqrt{p^2 - x^2}} dx, \\ \bar{E}_z &= - (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ q p_{q,\omega}(x) + \frac{\omega}{c^2} j_z(x) \right] \frac{e^{-ix}}{\sqrt{p^2 - x^2}} dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \alpha p_{q,\omega}(x) + \frac{\omega}{c^2} j_x(x) &= - \frac{1}{2\pi} E_x(x) \sqrt{p^2 - x^2}, \\ q p_{q,\omega}(x) + \frac{\omega}{c^2} j_z(x) &= - \frac{1}{2\pi} E_z(x) \sqrt{p^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Тогда формула (4) запишется в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(x) e^{-ix} dx, \\ \bar{E}_z &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(x) e^{-ix} dx. \end{aligned} \quad (4')$$

Поля, вызванные поверхностными токами и зарядами, должны быть такие, чтобы на поверхности экрана тангенциальные компоненты полного электрического поля равнялись нулю, т. е.  $\bar{E}_x$  и  $\bar{E}_z$  — компоненты полей излучения должны удовлетворять следующим граничным условиям

$$\begin{aligned} \bar{E}_x &= -E_x^0 \quad \text{при } x > 0, \quad y = 0, \\ \bar{E}_z &= -E_z^0 \quad \text{при } x > 0, \quad y = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_x^0$  и  $E_z^0$  — Фурье-компоненты тангенциальных слагаемых электрического поля равномерно движущегося заряда при отсутствии экрана на поверхности  $x > 0, y = 0$ .

$E_x^0$  и  $E_z^0$  на поверхности экрана имеют значения

$$E_x^0 = \frac{e}{2\pi a c} \left[ ik\gamma^2 \cos \theta \mp \frac{a \sin \theta}{\beta} \right] e^{-i \frac{\omega}{v} x \cos \theta \pm a(x-d) \sin \theta}$$

$$E_z^0 = \frac{e}{2\pi ac} \frac{iq}{\beta} e^{-i \frac{\omega}{c} x \cos \theta \pm a(x-d) \sin \theta} \quad (6)$$

где верхний знак соответствует точкам поверхности  $0 \leq x < d$ , а нижний  $-x > d$ ;  $a = \sqrt{q^2 + k^2 \gamma^2}$ , где  $\gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ . Подставляя

(6) в правые части условий (5), мы получим интегральное уравнение для неизвестных функций  $E_x(x)$  и  $E_z(x)$  при  $x > 0$ . Для получения замкнутой системы интегральных уравнений для  $E_x(x)$  и  $E_z(x)$  воспользуемся условием, что при  $y = 0$ ,  $x < 0$  поверхностные токи и заряды равняются нулю. Тогда мы получим два интегральных уравнения типа

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x) \lambda(x) e^{-i\alpha x} dx = 0 \quad \text{при } x < 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(x) \lambda(x) e^{-i\alpha x} dx = 0 \quad \text{при } x < 0,$$

где  $\lambda(x) = \sqrt{x^2 - p^2}$ . Группируя первое из уравнений (7) с первым уравнением (5) и второе из (7) со вторым из (5), мы получим две системы парных интегральных уравнений для определения неизвестных функций  $E_x(x)$  и  $E_z(x)$ . Так как эти уравнения аналогичны, достаточно рассмотреть решение только для  $E_x(x)$ . Парные интегральные уравнения для  $E_x(x)$  имеют следующий вид

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x) e^{-i\alpha x} dx = -E_x^0(x) \quad \text{при } x > 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x) \lambda(x) e^{-i\alpha x} dx = 0 \quad \text{при } x < 0,$$

где  $E_x^0(x)$  дается формулой (6). Решение уравнения (7) можно провести методом, изложенным в § 2.8 книги [1]. Результат имеет следующий вид

$$E_x(x) = -2^{-1} \pi^{-1} (x-p)^{-1/2} e^{\frac{3i\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{i(\alpha-p)u} du \frac{d}{du} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{ip(u-\xi)} E_x^0(u+\xi) d\xi \quad (9)$$

Подставляя значение функции  $E_x^0(u+\xi)$  из (6) и проведя интегрирование по  $u$  и  $\xi$ , мы получим выражение для Фурье-компоненты  $E_x(x)$

$$E_z(x) = \frac{e}{2\sqrt{2}\pi^2 ac} e^{\frac{3i\pi}{4}} \left\{ (x-p)^{1/2} e^{i\alpha d - i\frac{\omega}{v} d \cos \theta} \left[ \frac{ik\gamma^2 \cos \theta + \frac{a \sin \theta}{\beta}}{\alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta} - \frac{ik\gamma^2 \cos \theta - \frac{a \sin \theta}{\beta}}{\alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta} \right] \int_0^d \xi^{-1/2} e^{-i(\gamma-p)\xi} d\xi - \frac{\left( ik\gamma^2 \cos \theta - \frac{a \sin \theta}{\beta} \right) \left( p - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta \right) A_1(d)}{(x-p)^{1/2} \left( \alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta \right)} - \frac{\left( ik\gamma^2 \cos \theta + \frac{a \sin \theta}{\beta} \right) \left( p - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right) A_2(d)}{(x-p)^{1/2} \left( \alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right)} \right\} \quad (10)$$

$$A_1(d) = \int_0^d \xi^{-1/2} e^{i p \xi - i \frac{\omega}{v} \xi \cos \theta + a(\xi-d) \sin \theta} d\xi,$$

$$A_2(d) = \int_d^\infty \xi^{-1/2} e^{i p \xi - i \frac{\omega}{v} \xi \cos \theta + a(d-\xi) \sin \theta} d\xi.$$

Аналогичным образом решается пара интегральных уравнений для неизвестной функции  $E_z(x)$ . Для нее получаем следующее выражение

$$E_z(x) = \frac{ieq e^{\frac{3i\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\pi^2 a e \beta} \left\{ (x-p)^{1/2} e^{i\alpha d - i\frac{\omega}{v} d \cos \theta} \left[ \frac{1}{\alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta} - \frac{1}{\alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta} \right] \int_0^d \xi^{-1/2} e^{-i(\alpha-p)\xi} d\xi - \frac{\left( p - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta \right) A_1(d)}{(x-p)^{1/2} \left( \alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta \right)} - \frac{\left( p - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right) A_2(d)}{(x-p)^{1/2} \left( \alpha - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right)} \right\} \quad (10')$$

Рассмотрим случай, когда  $d \rightarrow 0$ . Тогда  $E_x(x)$  и  $E_z(x)$  примут вид

$$E_x(x) = -\frac{e}{(2\pi)^{1/2}ac} \frac{\left( ik\gamma^2 \cos \theta + \frac{a \sin \theta}{\beta} \right) \left( p - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right)^{1/2}}{(x-p)^{1/2} \left( x - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right)},$$

$$E_z(x) = -\frac{e}{(2\pi)^{1/2}ac} \frac{i\beta}{\beta} \frac{\left( p - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right)^{1/2}}{(x-p)^{1/2} \left( x - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta \right)}. \quad (11)$$

Эти выражения совпадают с результатами работы [2]. При другом предельном случае,  $d \rightarrow \infty$ , получим

$$E_x(x) = \frac{ie}{(2\pi)^{1/2}ac} \left[ \frac{ik\gamma^2 \cos \theta + \frac{a \sin \theta}{\beta}}{x - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta} - \frac{ik\gamma^2 \cos \theta - \frac{a \sin \theta}{\beta}}{x - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta} \right], \quad (12)$$

$$E_z(x) = -\frac{e\beta}{(2\pi)^{1/2}ac\beta} \left[ \frac{1}{x - \frac{\omega}{v} \cos \theta + ia \sin \theta} - \frac{1}{x - \frac{\omega}{v} \cos \theta - ia \sin \theta} \right].$$

Формулы (12) с точностью до обозначений дают Фурье-компоненты излучения, совпадающие с известными формулами переходного излучения [4]. При больших  $d$  формула (12) отличается от формул (10), (10') только членами порядка  $\frac{1}{\sqrt{kd}}$ , при  $d \rightarrow \infty$  эти члены стремятся к нулю. Таким образом, при наличии края экрана добавочные члены к полям переходного излучения частицы имеют порядок  $\frac{1}{\sqrt{kd}}$ . Из предельных переходов видно, что решение задачи непрерывно зависит от  $d$ .

Подставляя  $\frac{k}{p\beta} = \cos \theta_0$ , где  $\theta_0$  — мнимый угол, формулу (10) можно записать в следующем виде

$$E_x(x) = -\frac{e}{2\sqrt{2}\pi^2ac} e^{3i\frac{\pi}{2}} \left\{ (x-p)^{1/2} e^{i\omega d - i\frac{\omega}{v} d \cos \theta} [B(x) + B^*(x)] \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^d \xi^{-1/2} e^{-i(\alpha-p)\xi} d\xi + \frac{c(x) A_1(d)}{(x-p)^{1/2}} - \frac{c^*(x) A_2(d)}{(x-p)^{1/2}} \right\}, \quad (10'')$$

где  $B(x) = \frac{\sigma}{x - p \cos(\theta - \theta_0)}$ ,  $c(x) = B(x) [p - p \cos(\theta - \theta_0)]$ ,

$\sigma = ik\gamma^2 \cos \theta - \frac{a \sin \theta}{\beta}$ ; знак (\*) означает комплексное сопряжение.

Компоненты электрического поля  $E_x$  и  $E_z$  определим из формул

$$E_x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(\alpha) e^{-i\alpha x - i\lambda y - iqz} d\alpha dq, \quad (13)$$

$$E_z = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} E_z(\alpha) e^{-i\alpha x - i\lambda y - iqz} d\alpha dq.$$

Подставляя (10') в (13) и проведя интегрирование по  $\alpha$  и  $q$ , получим  $E_x$  и  $E_z$ . Для больших расстояний интегрирование можно провести методом перевала. Таким образом, интегрируя (13) методом перевала, мы найдем выражение для  $E_x$  и  $E_z$  на больших расстояниях. Запишем выражение  $E_x$

$$E_x = \frac{-ie e^{\frac{2i\pi}{4}}}{\pi^{3/2} a c} \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2} d \cos \theta} \left[ \frac{\sigma \sin \varphi}{\cos \varphi + \cos(\theta - \theta_0)} + \frac{\sigma^0 \sin \varphi}{\cos \varphi + \cos(\theta + \theta_0)} \right] \Phi_1 \left( \sqrt{2kd \sin \psi} \cos \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{2z e^{-d \sin^2 \theta} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\cos \varphi + \cos(\theta - \theta_0)} \Phi_1 \left( \sqrt{2kd \sin \psi} \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) - \frac{2z^0 e^{d \sin^2 \theta} \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta + \theta_0}{2}}{\cos \varphi + \cos(\theta + \theta_0)} \Phi_2 \left( \sqrt{2kd \sin \psi} \sin \frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \right\}. \quad (14)$$

где  $\Phi_1(v) = \int_0^v e^{iz^2} dz$ ,  $\Phi_2(v) = \int_v^\infty e^{iz^2} dz$ , а  $R$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  — сферические координаты.

Аналогичный вид будет иметь  $E_z$ . Для нахождения  $E_y$ -компоненты полей излучения используем уравнение  $\text{div } \vec{E} = 0$ . Так как  $E_x$  и  $E_z$  известны, то из этого уравнения легко определить  $E_y$ . Таким образом, мы нашли все компоненты для электрических полей излучения, а магнитные поля можно выразить через электрические.

Излучение частицы равно потоку вектора Пойнтинга, проинтегрированному по поверхности сферы большого радиуса. Так как интенсивность излучения пропорциональна квадрату электрического поля, то поправки к переходному излучению оказываются порядка  $\frac{1}{\sqrt{kd}}$  (при больших  $d$ ), то есть поправки существенны для тех частот, длина волны которых порядка расстояния точки пересечения от ребра  $d$ . Для длин волн  $\lambda \ll d$  излучение с большой точностью совпадает с переходным излучением.

В ультрарелятивистском случае ( $\beta = \frac{v}{c} = 1$ ), когда поле частицы почти поперечное, задачу можно рассмотреть в приближении геометрической оптики. В этом случае потери на излучение равны удвоенному (так как излучение „вперед“ и „назад“ одинаково) потоку энергии свободного поля частицы через плоскость экрана. В случае перпендикулярного падения частицы величина  $\int_{(s)} [\vec{E}^0 \vec{H}^0] d\vec{s} dt$  (т. е. ин-

тенсивность излучения) равняется

$$dJ = \frac{e^2 (a^2 + q^2)}{4\pi a^3} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-2ad} \right] dq d\omega, \quad (15)$$

где  $a = \sqrt{\omega^2 \gamma^2 + q^2}$ ,  $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Интегрируя (15) по  $q$  и  $\omega$ , мы получим интенсивность полного излучения. Интеграл от первого слагаемого в (15) расходится, так как он описывает переходное излучение. Интеграл же от второго члена, который дает добавку к переходному излучению, можно вычислить, и тогда получим

$$I_{\text{доп}} = -\frac{e^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a^2 + q^2)}{a^3} e^{-2ad} dq d\omega = -\frac{3}{8} \frac{e^2}{\gamma d} \quad (16)$$

при  $1 - \beta \ll 1$ . Как видно из (16), поправка к полному переходному излучению (при больших  $d$ ) стремится к нулю, как  $\frac{1}{d}$ .

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Б. М. Болотовского за обсуждение результатов и за ценные замечания.

Физико-техническая лаборатория  
АН Армянской ССР

Поступила 4 V 196

Գ. Մ. Սեդրակյան

## ՄԵՏԱՂՅԱ ԷԿՐԱՆԸ ՀԱՏՈՂ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅՅՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է լիցքավորված մասնիկի ճառագայթումը, երբ այն իր շարժման ընթացքում հատում է իզոտրոպական հաղորդիչ մետաղյա էկրանը նրա եզրից  $d$  հեռավորության վրա:

Ցույց է տրված, որ եթե մասնիկը հատում է էկրանը նրա եզրից մեկ հեռավորության վրա ( $d \rightarrow \infty$ ), ապա ստացված բանաձևերը համընկնում են անցումային ճառագայթման բանաձևերի հետ:

Վերջավոր, բայց մեծ  $d$  դեպքում հաշվված է այն ուղղումը, որ մրցեցնում է էկրանի եզրի ստիպությունը անցումային ճառագայթման բանաձևերին:



Անհրում: Յուլյ է արված, որ այդ լրացուցիչ անդամները  $\frac{1}{\sqrt{ka}}$  կարգի են,

որանց  $k$ -ն այնքանին թիվն է:

Ալտրառեկտանտիվիստական արագութունների դեպքում խնդիրը կարելի է դիտել երկրաչափական օպտիկայի մոտաօրոգութիւմը: Հաշված է այդ մոտաօրոգութիւմը մասնիկի լրիվ ճառագայթումը:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нобл Б. Метод Винера—Хопфа. ИЛ., М., 1962.
2. Ганзбург В. Л., Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона при его переходе из одной срезы в другую. ЖЭТФ, **16**, 15, 1946.
3. Казанцев А. П., Сурдатович Г. И. Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана. ДАН, **147**, 74, 1962.
4. Корхмазян Н. А. Кандидатская диссертация. ФИАН, М., 1962.
5. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Излучение заряженных частиц при пролете возле идеально проводящих тел. ДАН, **116**, 377, 1957.
6. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Излучение модулированного пучка заряженных частиц при пролете через круглое отверстие в плоском экране. ДАН, **124**, 792, 1959.
7. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. Излучение ультрарелятивистских зарядов при пролете через круглое отверстие в экране. ДАН, **124**, 1024, 1959.