ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

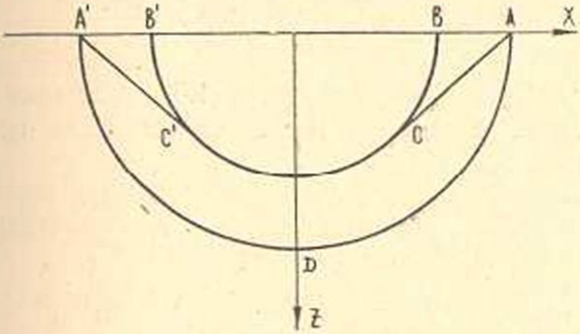
З. А. Мартиросян

Плоская задача о распространении давления постоянного профиля в упругом полупространстве

§ 1. Постановка задачи и решение в виде интеграла

Рассматривается закон распространения давления, образованного от взрыва над изотропным упругим полупространством, которое характеризуется постоянными λ, μ, ρ_0.

Обозначим через O точку возникновения давления на границе. Выберем ось Ox в плоскости поверхности, ось Oy направим вниз. (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предположим, что на граничной поверхности $z=0$ действует нормальное давление $T_{zz} = -P_1 = \text{const}$. В этом случае, как известно, задача будет плоской и потенциальные функции φ и ψ удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

с начальными нулевыми условиями

$$\varphi\Big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi\Big|_{t=0} = \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{1.2}$$

при следующих граничных условиях

$$T_{xz} = \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0,$$

$$T_{zz} = \left[\lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right)\right]_{z=0} = \begin{cases} -P_1 & \text{при } |x| < Vt \\ 0 & \text{при } |x| > Vt, \end{cases} \tag{1.3}$$

где V—скорость фронта по поверхности.

Заметим, что входящие в (1.1) a^2 и b^2 определяются формулами

$$a = \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}} \tag{1.4}$$

и имеют смысл обратных величин скоростей распространения продольных и поперечных волн. Решим задачу методом неполного разделения переменных [2].

Решения уравнений (1.1) при начальных и граничных условиях (1.2) и (1.3) найдем в виде интегралов Фурье

$$\varphi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(z, t, k)\, e^{ikx} dk,$$

$$\psi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(z, t, k)\, e^{ikx} dk. \tag{1.5}$$

Значения функций φ и ψ из уравнений (1.5) подставим в уравнения (1.1), (1.2), (1.3) и, сделав в последнем обратное преобразование Фурье, получим

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - a^2\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - k^2 R = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - b^2\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - k^2 S = 0, \tag{1.6}$$

$$R\Big|_{t=0} = \frac{\partial R}{\partial t}\Big|_{t=0} = S\Big|_{t=0} = \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.7}$$

$$\mu\left(2ik\frac{\partial R}{\partial z} - k^2 S - \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0,$$

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - k^2 R\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + ik\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right]_{z=0} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_1(x, t)\, e^{-ikx} dx. \tag{1.8}$$

Из уравнений (1.6) при условиях (1.7), (1.8) функции R и S легко определяются, если ввести следующие вспомогательные функции

$$\overline{X}(z, k, s) = \int_0^{\infty} R(z, k, t)\, e^{-st} dt, \tag{1.9}$$

$$\overline{Y}(z,k,s)=\int\limits_0^\infty S(z,k,t)e^{-st}dt. \tag{1.9}$$

Согласно (1.9) из (1.6) и (1.8), имея в виду, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}dt\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_1(x,t)e^{-ikx}dx=\frac{2P_1V}{s^2+k^2V^2},$$

получим

$$\frac{\partial^2\overline{X}}{\partial z^2}-(a^2s^2+k^2)\overline{X}=0, \quad \frac{\partial^2\overline{Y}}{\partial z^2}-(b^2s^2+k^2)\overline{Y}=0, \tag{1.10}$$

$$\mu\left(2ik\frac{\partial\overline{X}}{\partial z}-k^2\overline{Y}-\frac{\partial^2\overline{Y}}{\partial z^2}\right)_{z=0}=0,$$

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial^2\overline{X}}{\partial z^2}-k^2\overline{X}\right)+2\mu\left(\frac{\partial^2\overline{X}}{\partial z^2}+ik\frac{\partial\overline{Y}}{\partial z}\right)\right]_{z=0}=-\frac{P_1V}{\pi(s^2+k^2V^2)}. \tag{1.11}$$

Решим уравнения (1.10) относительно $\overline{X}$ и $\overline{Y}$

$$\overline{X}(z,k,s)=C(k,s)\,e^{-z\sqrt{a^2s^2+k^2}},$$
$$\overline{Y}(z,k,s)=D(k,s)\,e^{-z\sqrt{b^2s^2+k^2}}, \tag{1.12}$$

где многозначные функции фиксированы по следующему условию:

$$\arg\sqrt{a^2s^2+k^2}=\arg\sqrt{b^2s^2+k^2}=0, \text{ когда } s>0, \tag{1.13}$$

а функции $C(k,s)$ и $D(k,s)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(b^2s^2+2k^2)D(k,s)+2ik\sqrt{a^2s^2+k^2}\,C(k,s)=0,$$
$$2ik\sqrt{b^2s^2+k^2}\,D(k,s)-(b^2s^2+2k^2)\,C(k,s)=\frac{1}{\pi\mu}\cdot\frac{P_1V}{s^2+k^2V^2}, \tag{1.14}$$

откуда

$$C(k,s)=-\frac{P_1V(b^2s^2+2k^2)}{\pi\mu(s^2+k^2V^2)\left[(b^2s^2+2k^2)^2-4k^2\sqrt{b^2s^2+k^2}\sqrt{a^2s^2+k^2}\right]},$$
$$D(k,s)=\frac{2iP_1V\sqrt{a^2s^2+k^2}\cdot k}{\pi\mu(s^2+k^2V^2)\left[(b^2s^2+2k^2)^2-4k^2\sqrt{b^2s^2+k^2}\sqrt{s^2a^2+k^2}\right]}. \tag{1.15}$$

В (1.9) произведем обратное преобразование Лапласа. Имея в виду (1.12), для функций R и S получим следующие выражения в виде интеграла Меллина:

$$R(z, k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} C(k, s) e^{-z\sqrt{a^2 s^2 + k^2}} e^{st} ds,$$

$$S(z, k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} D(k, s) e^{-z\sqrt{b^2 s^2 + k^2}} e^{st} ds, \tag{1.16}$$

где σ—постоянное положительное число. Значения R и S подставим в уравнения (1.5) и, сделав следующее обозначение

$$\zeta = \frac{bs}{k},$$

для функций φ и ψ получим следующие выражения:

$$\varphi(x, z, t) = -\frac{P_1 V b}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(2 + \xi^2) e^{-|k| z\sqrt{1 + \gamma^2 \xi^2}} e^{k\frac{t\xi}{b}} d\xi}{(\xi^2 + V^2 b^2) R(\xi)} \right] \frac{dk}{k^3},$$

$$\psi(x, z, t) = \frac{2iP_1 V b}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \xi^2}\, e^{-|k| z\sqrt{1 + \xi^2}} e^{k\frac{t\xi}{b}} d\xi}{(\xi^2 + V^2 b^2) R(\xi)} \right] \frac{|k| dk}{k^3}. \tag{1.17}$$

В уравнениях (1.17) ветви корня фиксированы при условиях

$$\arg\sqrt{1 + \gamma^2 \xi^2} = \arg\sqrt{1 + \xi^2} = 0 \quad \text{при} \quad \xi > 0. \tag{1.18}$$

Функция $R(\xi)$ имеет значение

$$R(\xi) = (2 + \xi^2)^2 - 4\sqrt{1 + \gamma^2 \xi^2}\sqrt{1 + \xi^2}, \tag{1.19}$$

величина γ определяется отношением

$$\gamma = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}. \tag{1.20}$$

Для компонентов напряжения T_{zz} имеем

$$T_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right). \tag{1.21}$$

Если значения функций φ и ψ из равенств (1.17) подставим в уравнение (1.21), то для T_{zz} получим следующее выражение в виде интеграла

$$T_{zz} = -\frac{(\lambda + 2\mu) P_1 V b}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} X(z, k, t) \frac{dk}{k} +$$

$$+ \frac{4\mu P_1 V b}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} Y(z, k, t) \frac{dk}{k} + \frac{\lambda P_1 V b}{\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} Z(z, k, t) \frac{dk}{k}, \tag{1.22}$$

где

$$X(z,k,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\dfrac{(2+\xi^2)(1+\gamma^2\xi^2)\,e^{-|k|z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}\,e^{k\frac{t\xi}{b}}\,d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)\,R(\xi)} & \text{при}\quad t>\gamma bz\\ 0 & \text{при}\quad t<\gamma bz,\end{cases} \tag{1.23}$$

$$Y(z,k,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\dfrac{\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\sqrt{1+\xi^2}\,e^{-|k|z\sqrt{1+\xi^2}}\,e^{k\frac{t\xi}{b}}\,d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)\,R(\xi)} & \text{при}\quad t>bz\\ 0 & \text{при}\quad t<bz,\end{cases} \tag{1.24}$$

$$Z(z,k,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\dfrac{(2+\xi^2)\,e^{-|k|z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}\,e^{k\frac{t\xi}{b}}\,d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)\,R(\xi)} & \text{при}\quad t>\gamma bz\\ 0 & \text{при}\quad t<\gamma bz.\end{cases} \tag{1.25}$$

§ 2. Качественное исследование решения

Чтобы дать качественную картину распространения давления в упругом полупространстве, исследуем интегралы Меллина.

Проведем из точек разветвлений $\xi=\pm i$ и $\xi=\pm\frac{i}{\gamma}$ разрезы параллельно отрицательной части вещественной оси. Тогда подынтегральные функции в (1.23), (1.24), (1.25) будут иметь полюсы в корнях уравнения Релея

$$R(\xi)=(2+\xi^2)^2-4\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\sqrt{1+\xi^2}$$

и в точках

$$\xi=\pm iVb.$$

На рассматриваемом листе плоскости ξ это уравнение имеет двойной корень $\xi=0$, а также простые корни в точках $\xi=\pm i\theta$, где $0<\theta<1$.

Учитывая, что при больших значениях k подынтегральные функции в (1.23), (1.24), (1.25) оказываются весьма малыми в полуполосе $|\mathrm{Jm}\,\xi|<1$, $\mathrm{Re}\,\xi<0$, представляется естественным заменить прямую интегрирования $\mathrm{Re}\,\xi=\sigma$ контуром (λ), изображенным на фиг. 2.

При такой деформации контура пересекаются особые точки $\xi=0$, $\xi=\pm i\theta$ и $\xi=\pm iVb$.

Поэтому функции X, Y и Z из (1.23), (1.24), (1.25) представятся следующими равенствами:

$$X = X_0 + X_R + X_M + X_\lambda, \tag{2.1}$$

$$Y = Y_0 + Y_R + Y_M + Y_\lambda, \tag{2.2}$$

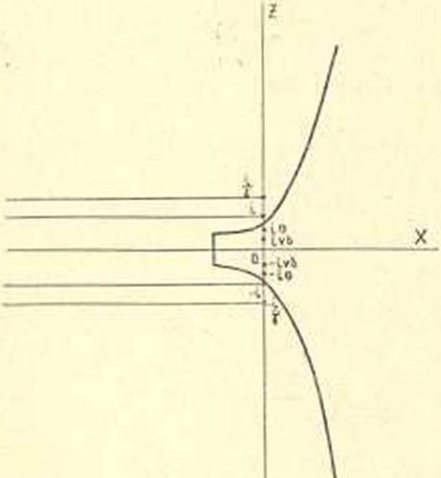
$$Z = Z_0 + Z_R + Z_M + Z_\lambda, \tag{2.3}$$

где X_0, Y_0, Z_0 суть вычеты подинтегральных функций в начале координат, X_R, Y_R, Z_R—вычеты в точках $\xi = \pm i\theta$, X_M, Y_M, Z_M—вычеты в точках $\xi = \pm iVb$, а последнее слагаемое имеет вид

$$X_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\lambda \frac{(2+\xi^2)(1+\gamma^2\xi^2)\, e^{-|k| z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}\, e^{k\frac{t\xi}{b}}\, d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)\, R(\xi)}, \tag{2.4}$$

$$Y_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\lambda \frac{\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\,\sqrt{1+\xi^2}\, e^{-|k| z\sqrt{1+\xi^2}}\, e^{k\frac{t\xi}{b}}\, d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)\, R(\xi)}, \tag{2.5}$$

$$Z_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\lambda \frac{(2+\xi^2)\, e^{-|k| z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}\, e^{k\frac{t\xi}{b}}\, d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)\, R(\xi)}. \tag{2.6}$$



Фиг. 2.

Надо заметить, что многозначные функции фиксированы по условию (1.18). Легко убедиться, что если значения X_0, Y_0, Z_0 подставить в (1.22), то получится

$$T_{zz_0} \equiv 0.$$

Итак, поле давления разделится на 3 слагаемых

$$T_{zz} = T_{zz_R} + T_{zz_M} + T_{zz_\lambda}, \tag{2.7}$$

каждое из которых имеет свой физический смысл.

1. Определим поле давления T_{zz_R}; для этого, интегрируя сначала (1.23), (1.24), (1.25), получим

$$X_R = -\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2)(1-\gamma^2\theta^2)\, e^{-|k| z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}} \sin\frac{kt\theta}{b}, \tag{2.8}$$

$$Y_R = -\frac{2}{C_0\theta}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\,\sqrt{1-\theta^2}\, e^{-|k| z\sqrt{1-\theta^2}} \sin\frac{kt\theta}{b}, \tag{2.9}$$

$$Z_R = -\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2)\, e^{-|k| z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}} \sin\frac{kt\theta}{b}, \tag{2.10}$$

где

$$C_0 = 4\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{\sqrt{1-\theta^2}} + \frac{\gamma^2\sqrt{1-\theta^2}}{\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}} - 2 + \theta^2\right)(\theta^2 - V^2b^2). \tag{2.11}$$

Подставив значения X_R, Y_R, Z_R в уравнение (1.22), дифференцируя по z, получим

$$\frac{\partial T_{zz_R}}{\partial z}=-\frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2)(1-\gamma^2\theta^2)^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{x+V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x+V_0t)^2}-\frac{x-V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x-V_0t)^2}\right)+$$

$$+\frac{4\mu P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\sqrt{1-\theta^2}\times$$

$$\times\left(\frac{x+V_0t}{z^2(1-\theta^2)+(x+V_0t)^2}-\frac{x-V_0t}{z^2(1-\theta^2)+(x-V_0t)^2}\right)+$$

$$+\frac{\lambda P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\times$$

$$\times\left(\frac{x+V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x+V_0t)^2}-\frac{x-V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x-V_0t)^2}\right), \qquad (2.12)$$

откуда

$$T_{zz_R}=-\frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2)(1-\gamma^2\theta^2)\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x+V_0t}-\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x-V_0t}\right)+$$

$$+\frac{4\mu P_1Vb\cdot 2}{C_0\theta\pi\mu}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\sqrt{1-\theta^2}\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\theta^2}}{x+V_0t}-\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\theta^2}}{x-V_0t)}\right)+\frac{\lambda P_1Vb\,2}{\pi\mu C_0\theta}(2-\theta^2)\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x+V_0t}-\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x-V_0t}\right)+C_1, \qquad (2.13)$$

где

$$V_0=\frac{\theta}{b}\cdot \qquad (2.14)$$

В уравнении (2.13) величина T_{zz_R} зависит от $x-V_0t$, $x+V_0t$. Если ту часть T_{zz_R}, которая зависит от $x-V_0t$, принять за движение по положительной оси Ox, то часть, определяющаяся $x+V_0t$, будет движением в отрицательном направлении оси Ox. Итак, первое слагаемое уравнения (2.7) представляет собой пакеты волновых поверхностей или, как называют в теории упругости, поверхностные волны Реле. Очевидно, что эти волновые пакеты движутся со скоростью $V_0=\frac{\theta}{b}$.

2. Определим поле давления T_{zz_M}. Для этого интегрируя сначала уравнения (1.23), (1.24), (1.25), получим

$$X_M = \frac{(2 - V^2b^2)(1 - \gamma^2 V^2 b^2)\, e^{-|k| z \sqrt{1-\gamma^2 V^2 b^2}} \sin ktV}{VbC_1}, \tag{2.15}$$

$$Y_M = \frac{\sqrt{1 - V^2b^2\gamma^2}\sqrt{1 - V^2b^2}\, e^{-|k| z \sqrt{1-V^2b^2}} \sin ktV}{VbC_1}, \tag{2.16}$$

$$Z_M = \frac{(2 - V^2b^2)\, e^{-|k| z \sqrt{1-\gamma^2 V^2 b^2}} \sin ktV}{VbC_1}, \tag{2.17}$$

где

$$C_1 = (2 - V^2b^2)^2 - 4\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}\sqrt{1 - V^2b^2}. \tag{2.18}$$

При $Vb < 1$ для T_{zz_M} получим следующее выражение:

$$T_{zz_M} = \frac{(\lambda + 2\mu) P_1 Vb}{\pi\mu} \frac{(2 - V^2b^2)(1 - \gamma^2V^2b^2)}{VbC_1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x + Vt} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x - Vt}\right) -$$

$$- \frac{4\mu P_1 Vb}{\pi\mu} \cdot \frac{\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}\sqrt{1 - V^2b^2}}{VbC_1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - V^2b^2}}{x + Vt} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - V^2b^2}}{x - Vt}\right) -$$

$$- \frac{\lambda P_1 Vb (2 - V^2b^2)}{\pi VbC_1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x + Vt} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x - Vt}\right) + c_2, \tag{2.19}$$

при этом слагаемое T_{zz_M} представляет собой волновой пакет, который движется по поверхности со скоростью V.

Чтобы исследовать поле давления, мы должны, прежде всего, попытаться вычислить контурные интегралы (2.4), (2.5) и (2.6). Правильный расчет этого интеграла труден, поэтому ограничимся условием $kt \gg 1$, которое дает возможность использовать асимптотические методы.

Рассмотрим интеграл (2.4), представляющийся в канонической форме следующим образом:

$$X_\lambda = \int_\lambda \psi(\xi)\, e^{kf(\xi)}\, d\xi, \tag{2.20}$$

где „медленно изменяющаяся" функция $\psi(\xi)$ равна

$$\psi(\xi) = \frac{(2+\xi^2)(1+\gamma^2\xi^2)}{2\pi i(\xi^2+V^2b^2)R(\xi)}, \tag{2.21}$$

а „фазой“ является функция

$$kf(\xi) = -|k|z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}+\frac{kt}{b}\xi. \tag{2.22}$$

Учитывая возможность изменения пути интегрирования в контурных интегралах от аналитических функций, постараемся выбрать контур (λ) так, чтобы на нем оказались точки резкого максимума подинтегральной функции и чтобы при удалении от этих точек подинтегральная функция убывала наиболее быстро.

Контур, обладающий указанными выше свойствами, называется стационарным, а точки максимумов функций—седловыми.

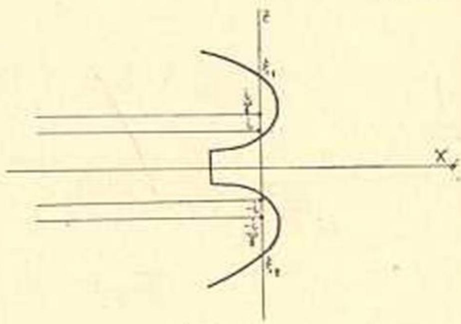
Известно, что седловые точки ξ_ν^0 определяются из условия $f'(\xi)=0$, а стационарный контур определяется уравнением

$$\operatorname{Jm} f(\xi) = \operatorname{Jm} f(\xi_\nu^0). \tag{2.23}$$

При $k \gg 1$ можно ожидать, что главная часть интеграла будет соответствовать интегрированию по малым окрестностям седловых точек

$$\xi_1 = +\frac{it}{\gamma\sqrt{t^2-a^2z^2}} \text{ при } k>0, \quad \xi_2 = -\frac{it}{\gamma\sqrt{t^2-a^2z^2}} \text{ при } k<0. \tag{2.24}$$

Нетрудно убедиться, что в качестве пути интегрирования (λ) в (2.21) можно взять стационарный контур, изображенный на фиг. 3.



Фиг. 3.

Распространенный по такому контуру интеграл интегрируется по следующей формуле [3]

$$\int\limits_\lambda \psi(\xi)e^{kf(\xi)}d\xi = \sum_\nu \psi(\xi_\nu)e^{kf(\xi_\nu)}\sqrt{\frac{2\pi}{k|f''(\xi_\nu)|}}e^{i\theta}, \tag{2.25}$$

где θ—угол контура с осью Ox в точках ξ_ν.

Пользуясь уравнением (2.26), для X_λ получим следующее выражение:

$$X_\lambda = \frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_x(\xi_1)}e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \text{при } k>0, \tag{2.26}$$

где

$$\psi_x(\xi_1) = \frac{[(2\gamma^2-1)t^2-2a^2z^2]a^2z^2\gamma^3(t^2-a^2z^2)}{[(2\gamma^2-1)t^2-2a^2z^2]^2+4az\gamma^3(t^2-a^2z^2)\sqrt{(1-\gamma^2)t^2+\gamma^2a^2z^2}}\times$$

$$\times \frac{1}{(1-\gamma^2 V^2 b^2)\, t^2 - a^4 V^2 z^2},$$

$$f_x(\xi_1) = \frac{i}{a}\sqrt{t^2 - a^2 z^2},$$

$$f_x''(\xi_1) = \frac{(t^2 - a^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^2 z^2}. \tag{2.27}$$

Аналогично определяя остальные интегралы уравнения (2.5), (2.6), получим

$$Y_\lambda = -\frac{\psi_y(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_y(\xi_1)}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \text{при } k > 0, \tag{2.28}$$

где

$$\psi_y = -\frac{4b^2 z^2 (t^2 - b^2 z^2)^2 \left[(1-\gamma^2)\, t^2 - b^2 z^2\right]}{\left[(t^2 - 2b^2 z^2)^4 - 16 b^2 z^2 (t^2 (1-\gamma^2) - b^2 z^2)\right]\left[(V^2 b^2 - 1)\, t^2 - V^2 z^2 b^4\right]}$$

$$f_y(\xi_1) = \frac{i}{b}\sqrt{t^2 - b^2 z^2}$$

$$f_y''(\xi_1) = \frac{(t^2 - b^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2 b^3};$$

$$Z_\lambda = -\frac{\psi_z(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_z''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_z(\xi_1)}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \text{при} \quad k > 0, \tag{2.29}$$

где

$$\psi_z(\xi_1) = -\frac{\left[(2\gamma^2 - 1)\, t^2 - 2a^2 z^2\right]\gamma^4 (t^2 - a^2 z^2)^2}{\left[(2\gamma^2 - 1)\, t^2 - 2a^2 z^2\right]^4 + 4az\gamma^3 (t^2 - a^2 z^2)\sqrt{(1-\gamma^2)\, t^2 + \gamma^2 a^2 z^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{(1 - V^2 b^2 \gamma^2)\, t^2 + a^4 V^2 t^2}.$$

$$f_z(\xi_1) = \frac{i}{a}\sqrt{t^2 - a^2 z^2},$$

$$f_z''(\xi_1) = \frac{(t^2 - a^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^2 z^2};$$

$$X_\lambda = -\frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_x(\xi_1)}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{при} \quad k < 0, \tag{2.30}$$

$$Y_\lambda = -\frac{\psi_y(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_y''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_y(\xi_1)}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{при} \quad k < 0, \tag{2.31}$$

$$Z_\lambda = -\frac{\psi_z(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_y''(\xi_1)\,k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_z(\xi_1)} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{при} \quad k<0. \tag{2.32}$$

Вычислим первый интеграл уравнения (1.22)

$$\varphi_1(x, z, t) = -\frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\,\frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k\sqrt{k}}\cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2}+\frac{\pi}{4}\right)dk, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\,\frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin kx\,\frac{dk}{\sqrt{k}}. \tag{2.34}$$

Если подставим

$$\xi = \sqrt{t^2-a^2z^2} - ax, \qquad \eta = \sqrt{t^2-a^2z^2} + ax \tag{2.35}$$

и обозначим

$$\varepsilon_\xi = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi>0 \\ -1, & \text{если } \xi<0 \end{cases} \qquad \varepsilon_\eta = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta>0, \\ -1, & \text{если } \eta<0 \end{cases} \tag{2.36}$$

то для интеграла правой стороны уравнения (2.34) получим следующее выражение

$$\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin kx\,\frac{dk}{\sqrt{k}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{a}{|\eta|}}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda+\varepsilon_\eta\sin\lambda}{\sqrt{\lambda}}\,d\lambda - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{a}{|\xi|}}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\lambda+\varepsilon_\xi\sin\lambda}{\sqrt{\lambda}}\,d\lambda. \tag{2.37}$$

Предположим, что $\xi \ll 1$, тогда первым интегралом правой стороны уравнения (2.37) можно пренебречь

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k\sqrt{k}}\cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2}+\frac{\pi}{4}\right)dk =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{|\xi|}{a}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} + c_2, & \text{если } \xi>0 \text{ (позади фронта)} \\ 0, & \text{если } \xi<0 \text{ (впереди фронта)}. \end{cases} \tag{2.38}$$

Аналогично вычисляя остальные интегралы уравнения (1.22), получим

$$T_{zz_\lambda} = \frac{(\lambda + 2\mu) P_1 Vb}{2\pi\mu} \frac{\psi_x(\xi_1)}{1} \sqrt{\frac{|\xi|}{2af_x(\xi_1)}} -$$

$$- \frac{2\mu P_1 Vb}{\pi\mu} \frac{\psi_y(\xi_1)}{1} \sqrt{\frac{|\xi_2|}{2af_y(\xi_1)}} + \frac{\lambda P_1 Vb}{2\pi\mu} \frac{\psi_z(\xi_1)}{1} \sqrt{\frac{|\xi|}{2af_z(\xi_1)}} + c_3, \quad (2.39)$$

где ξ определяется уравнением (2.35), а

$$\xi_2 = \sqrt{t^2 - b^2 z^2} - bx. \quad (2.40)$$

Из уравнения (2.39) видно, что поле давления T_{zz_λ} представляет собой волновые пакеты поперечных и продольных волн. Заметим, что постоянные c_1, c_2 и c_3, входящие в равенства (2.13), (2.19) и (2.39), можно принять равными нулю, так как нас интересуют те члены, которые меняются сильно. Легко убедиться, что продольные волны движутся со скоростью $V_1 = \frac{1}{a}$, а поперечные волны — $V_2 = \frac{1}{b}$.

Следовательно, на фронте продольных волн отсутствуют поперечные волны, так как $b > a$ (фиг. 1).

Радиус распространения продольных и поперечных волн будет

$$r_1 = \frac{1}{a} t, \quad r_2 = \frac{1}{b} t. \quad (2.41)$$

В частях $ACC'A'DA$ есть только продольные волны, и для этой части уравнение (2.39) принимает следующий вид:

$$T_{zz_\lambda} = \frac{(\lambda + 2\mu) P_1 Vb}{2\pi\mu} \sqrt{\frac{|\xi|}{2af'_x(\xi_1)}} \psi_x(\xi_1) + \psi_z(\xi_1) \sqrt{\frac{|\xi|}{2af'_z(\xi_1)}} \frac{\lambda P_1 Vb}{2\pi\mu}, \quad (2.42)$$

а на фронте продольных волн, когда $\xi = 0$,

$$T_{zz_\lambda} = 0. \quad (2.43)$$

Заметим, что метод „неполного разделения переменных“ имеет превосходства перед использованным методом Майлса [5], так как результаты, полученные Майлсом, достигаются этим методом, а решение при $P_1 = \text{const}$ не может быть получено его методом.

Ереванский государственный университет Поступила 26 IV 196

Զ. Ա. Մարտիրոսյան

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՊՐՈՖԻԼՈՎ ՃՆՇՄԱՆ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է պայթյունից առաջացած հարվածող ալի... ճնշման տարածումը առաձգական համասեռ միջավայրում։ Խնդիրը լուծվ... է փոփոխականների ոչ լրիվ անջատման մեթոդով։ Ապացուցված է, ո...

առաջանում են երկու տեսակի ալիքային խզեր, որոնք մակերևույթով շարժվում են V *և* $V_0 = \frac{\theta}{b}$ *արագություններով:*

Առաջանում են նաև երկայնական ու լայնական ալիքների խզեր, որոնք շարժվում են, համապատասխանաբար՝ $\frac{1}{a}$ *և* $\frac{1}{b}$ *արագություններով: Ճնշման համար ստացված արդյունքները ճիշտ են ալիքի ճակատի բավականաչափ մոտ կետերում:*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ., М., 1955.
2. *Петрашен Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И.* О задаче Лэмба в случае полупространства. Ученые записки ЛГУ, серия мат. наук, № 135, вып. 21, 1950.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
4. *Фукс Б. А.* и *Левин В. И.* Функции комплексного переменного и их приложения. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
5. *Майлс Дж.* О поведении упругого полупространства при движении взрывной волны. Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей, № 3. ИЛ, М., 1961.
6. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.