ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

О справедливости решения вида простых волн

Рассмотрим задачу о распространении давления в сжимаемую жидкость. Граничные условия возьмем в виде

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1 P_a\left(\dfrac{x}{t}\right) & x < Vt \\ 0 & x > Vt, \end{cases} \tag{1}$$

где ось Ox направлена по границе полуплоскости и ось Oy перпендикулярна границе, t — время, P — давление, V — скорость фронта по границе. Решение этой задачи с помощью простых волн найдено в [1] в виде

$$\begin{gathered} x\cos\alpha + y\sin\alpha - (u\cos\alpha + v\sin\alpha + a)\,t = 0, \\ u = \frac{2}{n-1}\int \cos\alpha\, da, \qquad v = \frac{2}{n-1}\int \sin\alpha\, da, \\ u = U\cos\beta, \qquad v = U\sin\beta, \end{gathered} \tag{2}$$

u, v — компоненты скорости по осям Ox и Oy, a — скорость звука. Уравнение политропы для жидкости имеет вид

$$P = \mathrm{B}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right].$$

Покажем, что решение (2) удовлетворяет условиям на ударной волне с точностью до малых третьего порядка

$$\begin{gathered} \rho_0 D = \rho(D - U), \\ P = \rho_0 DU, \\ \frac{D^2}{2} + \frac{a_0^2}{n-1} = \frac{(D-U)^2}{2} + \frac{a^2}{n-1}. \end{gathered} \tag{3}$$

Первое уравнение легко получается из уравнения политропы и формулы для скорости ударной волны [2]

$$D = \frac{a_0 + a + U}{2}. \tag{4}$$

Второе уравнение (3), учитывая малые второго порядка, можно записать в виде

$$dU = \frac{dP}{\rho a},$$

где использованы уравнение политропы и формула (4). Но из (2) имеем

$$dU = \frac{2}{n-1}\, da \cos(\beta - \alpha), \qquad U d\beta = \frac{2}{n-1}\, da \sin(\alpha - \beta). \tag{5}$$

В силу того, что $\beta - \alpha$ равно нулю в линейном случае и является малой первого порядка относительно $\frac{P_1}{Bn}$, имеем с точностью до третьего порядка

$$dU = \frac{2}{n-1}\, da.$$

Выполнение уравнения энергии показано в (3). Покажем, что условие для касательной составляющей скорости на ударной волне также выполняется с точностью до второго порядка включительно. В самом деле, согласно (2) и [1], решение имеет вид

$$a(x, y, t) = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1 P_a(\xi')}{Bn} \right] + \cdots,$$

где ξ' — постоянная для данной поверхности уровня (2) скорость ее вдоль Ox, причем вблизи фронта ударной волны имеем $\xi' = V - \xi_1'$, где ξ_1' — малая величина,

$$\xi_1' = -\frac{n+1}{4} \frac{P_1}{Bn} \frac{(V - \xi)\dfrac{V}{a_0^2}}{1 - \xi \dfrac{V^2}{a_0^2}},$$

$$\xi = \frac{x}{t}.$$

Если оставлять в выражении для $a(x, y, t)$ малые первого порядка, получим

$$a(x, y, t) = a_0 \left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1}{Bn} \right),$$

где $a_0 \left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1}{Bn} \right)$ — постоянная величина, а невыписанные члены имеют второй порядок малости. Таким образом, da имеет второй порядок малости.

Касательная составляющая скорости на ударной волне запишется

$$u \sin\lambda - v \cos\lambda,$$

где λ — угол нормали к ударной волне с Ox.

Из (2) получим

$$u \sin \lambda - v \cos \lambda = \int \frac{2}{n-1} da \sin (\lambda - \alpha).$$

Поскольку в линейном приближении α и λ совпадают, $\lambda - \alpha$ первого порядка малости, da имеет второй порядок малости, следовательно, $u \sin \lambda - v \cos \lambda$ имеет третий порядок малости, что и требовалось показать.

В приведенном выше доказательстве использован тот факт, что мы рассматриваем узкую область вблизи ударной волны, в то время как пределы интегрирования по α строго не очерчены и могут, вообще говоря, быть вне этой области. Поэтому приведем другое доказательство, более соответствующее задаче.

Для касательной составляющей скорости на фронте имеем

$$U \sin (\lambda - \beta).$$

Из решения задачи имеем для ударной волны

$$-\operatorname{tg} \lambda = \frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{n+1}{4} \frac{\sin \alpha_1}{\cos^3 \alpha_1} \frac{P_1}{Bn},$$

где α_1 — угол характеристики для линейной задачи, $\sin \alpha_1 = \frac{a_0}{V}$.

Если представить λ в виде

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{P_1}{Bn},$$

то из вышеприведенного уравнения получим

$$\lambda_1 = \alpha_1, \qquad \lambda_2 = \frac{n+1}{4} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Таким образом, λ постоянно с точностью до малых второго порядка. Из второго уравнения (5) имеем, что $Ud\beta \sim da \sin (\alpha - \beta)$ или $d\beta = 0$ с той же точностью, что и $da = 0$. Это равенство имеет место на всей ударной волне, поэтому как λ, так и β постоянны до малых первого порядка включительно. Граничное условие для β, как и для всех параметров, ставится в точке $x = Vt, y = 0$, но в этой точке из условий на ударной волне обязательно $\beta = \lambda$; поскольку β и λ вплоть до первого порядка включительно постоянны, вдоль фронта имеем, что величина $\beta - \lambda$—малая второго порядка. Тогда касательная составляющая скорости на фронте волны $U \sin (\lambda - \beta)$ будет малой третьего порядка.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 V 1963

Ա. Գ. Բագդոև

ՀԱՍԱՐԱԿ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԵՍՔԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՃՇՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում քննարկվում է հեղուկում հարվածի ճնշման տարածման խնդրի՝ հասարակ ալիքների տեսքով լուծումը:

Խնդրի լուծումը նախկինում ստացված է հեղինակի կողմից [1]:

Ցույց է տրված, որ երկրորդ մոտավորության սահմաններում հարվածի ալիքի վրա պայմանները բավարարվում են:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Нерсисян Э. М.* Определение давления в полупространстве идеальной жидкости для изэнтропического приближения. Известия АН СССР, ОТН, Мех. и маш., № 4, 1960.
2. *Курант Р.* и *Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1960.
3. *Багдоев А. Г.* О возможности замены ударного перехода непрерывным. ДАН АрмССР, **33**, № 1, 1961.