

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. В. Еганян

Плоская задача теории упругости
 для эксцентричного кольца

Для решения задачи воспользуемся системой биполярных координат (α, β) , которые связаны с прямоугольными координатами (x, y) соотношениями [1]

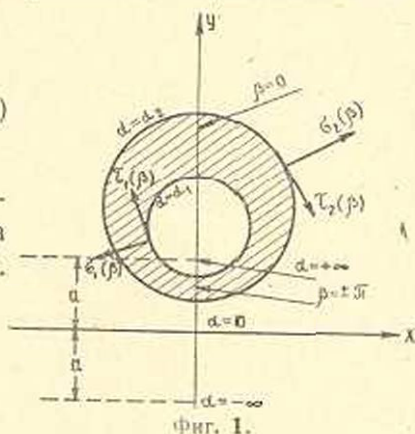
$$x = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \quad (1)$$

Рассматриваемая область ограничена двумя координатными линиями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ ($-\infty < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty$), представляя собой эксцентричное кольцо. Вдоль контуров приложены нормальные и касательные нагрузки (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha|_{\alpha=\alpha_i} &= \sigma_i(\beta) \\ \tau_{\alpha\beta}|_{\alpha=\alpha_i} &= \tau_i(\beta) \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

Предположим, что внешние нагрузки статически уравниваются на каждом из контуров $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, т. е. имеют место соотношения [1]

$$X_i = \pm \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sigma_\alpha \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0,$$



$$Y_i = \pm \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sigma_\alpha \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0, \quad (3)$$

$$M_i = \mp \frac{a^2}{\operatorname{sh} \alpha_i} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0,$$

($i = 1, 2$, верхний знак соответствует $i = 1$).

Кроме этого, полагаем, что $\sigma_i(\beta)$, $\tau_i(\beta)$ и производные функции $\sigma_i(\beta)$ интегрируемы в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Общие формулы напряжений и перемещений плоской задачи в биполярных координатах имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \left[g \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\operatorname{ch} \alpha}{a} \right] (g\Phi), \\ \sigma_\beta &= \left[g \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta}{a} \right] (g\Phi), \\ \tau_{z\beta} &= -g \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi);\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}U(\alpha, \beta) &= \frac{g}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \right], \\ V(\alpha, \beta) &= \frac{g}{2\mu} \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \right],\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$g = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{a}, \quad (6)$$

$$g\Psi = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] d\alpha d\beta. \quad (7)$$

Функции $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Psi(\alpha, \beta)$ являются бигармоническими.

Когда имеем дело с эксцентричным кольцом, область которого расположена по одну сторону линий $\alpha=0$, функция напряжений имеет вид [1]

$$g\Phi = \alpha (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) I + aB_0 \cos \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (f_1(n, \alpha) \cos n\beta + f_2(n, \alpha) \sin n\beta), \quad (8)$$

где

$$f_j(n, \alpha) = A_j(n) \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_j(n) \operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_j(n) \operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_j(n) \operatorname{sh}(n-1)\alpha, \quad (j=1, 2; n \geq 2), \quad (9)$$

$$f_j(1, \alpha) = A_j(1) \operatorname{ch} 2\alpha + C_j(1) \operatorname{sh} 2\alpha, \quad (j=1, 2). \quad (10)$$

Данную задачу решил Я.С. Уфлянд в предположении, что внешние нагрузки $\sigma_i(\beta)$ и $\tau_i(\beta)$ разлагаются в тригонометрические ряды. В данной статье решена эта же задача, но другим методом, при этом для определения коэффициентов, входящих в (8), получены более простые уравнения и, кроме того, рассмотрены случаи сосредоточенной силы.

Граничные условия (2) с учетом (4), (6) и (8) можно записать так:

$$\begin{aligned}\left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = \\ = a\tau_i(\beta) + \operatorname{sh} \alpha_i (\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta) I - aB_0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = -\frac{a\tau_i(\beta)}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - I \sin \beta \quad (i=1, 2),\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$g\Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [f_1(n, \alpha) \cos n\beta + f_2(n, \alpha) \sin n\beta]. \quad (12)$$

Так как функция $g\Phi_0$ представлена в виде ряда Фурье, то левая часть второго условия (11) будет представлять собой некоторые ряды Фурье. Однако, первое условие (11) непосредственно не представляет собой ряда Фурье, так как перед знаками рядов имеются функции от переменной β . С целью преодоления этой трудности, следуя Я. С. Уфлянду, дифференцируем первое условие (11) по β .

С учетом второго условия (11) получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \right) (g\Phi_0)_{z=\alpha_i} = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta} - \frac{a \operatorname{sh} \alpha_i}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} \tau_i. \quad (13)$$

Из второго условия (11) и из (13), с учетом (12), находим

$$\begin{aligned} f_1(n, \alpha_i) &= K_{1,i}(n), & f_1'(n, \alpha_i) &= K_{3,i}(n), \\ f_2(n, \alpha_i) &= K_{2,i}(n), & f_2'(n, \alpha_i) &= K_{4,i}(n), \end{aligned} \quad (14)$$

$$(i=1, 2; n \geq 2)$$

$$f_1'(1, \alpha_i) = I + K_{3,i}(1), \quad f_2'(1, \alpha_i) = K_{4,i}(1) \quad (i=1, 2), \quad (15)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} K_{1,i}(n) &= \frac{a}{\pi n (n^2 - 1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta}}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - \frac{\tau_i \operatorname{sh} \alpha_i}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} \right] \sin n\beta d\beta \\ K_{2,i}(n) &= -\frac{a}{\pi n (n^2 - 1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta}}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} - \frac{\tau_i \operatorname{sh} \alpha_i}{(\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta)^2} \right] \cos n\beta d\beta \\ K_{3,i}(n) &= \frac{a}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tau_i \sin n\beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta \\ K_{4,i}(n) &= -\frac{a}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tau_i \cos n\beta}{\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta} d\beta \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} n \geq 2 \\ n \geq 1 \quad (i=1, 2) \end{array} \right\} \quad (16)$$

Из (14) находим коэффициенты $A_i(n)$, $B_i(n)$, $C_i(n)$ и $D_i(n)$ при $n \geq 2$, а из (15) находим $A_2(1)$ и $C_2(1)$ и одновременно $A_1(1)$ и $C_1(1)$, выраженные через I . Остается определить B_0 и I .

Для определения B_0 и I требуем, чтобы удовлетворялось также первое условие (11). Так как первое условие (11) имеет место для всех β ($-\pi \leq \beta \leq +\pi$), то умножая обе части на $d\beta$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, с учетом (12), (14) и (15), получим

$$-I \operatorname{sh} 2\alpha_i + 2aB_0 + 2f_1(1, \alpha_i) = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_i(\beta) d\beta \quad (i=1, 2), \quad (17)$$

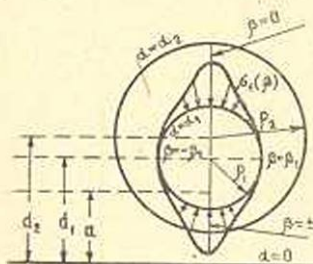
откуда и находим B_0 и I (при данной внешней нагрузке).

Теперь остается определить выражения для $g\Psi$. Из (7), (8), (9) и (10) (производя интегрирование) находим

$$g\Psi = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left\{ 2\beta (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) I + \sin \beta [A_1(1) \operatorname{ch} 2\alpha + C_1(1) \operatorname{sh} 2\alpha] + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2}^{\infty} [A_1(n) \operatorname{sh} (n+1) \alpha + B_1(n) \operatorname{sh} (n-1) \alpha + C_1(n) \operatorname{ch} (n+1) \alpha + \right. \\ \left. + D_1(n) \operatorname{ch} (n-1) \alpha] \sin n\beta \right\}. \quad (18)$$

Напряжения и перемещения определяются по формулам (4) и (5). Таким образом, поставленная задача полностью решена.

Рассматриваем частный случай внешней нагрузки, когда на контуре $\alpha = \alpha_1$ приложены экспоненциально изменяющиеся нормальные нагрузки, симметрично относительно координат β , а контур $\alpha = \alpha_2$ свободен от нагрузки (фиг. 2):



$$\sigma_1(\beta) = -Q_1 (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta)^2 (\cos \beta_1 - \cos \beta) e^{-k\beta} \quad \text{при } 0 \leq \beta \leq \beta_1, \\ \sigma_1(\beta) = Q_2 (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta)^2 (\cos \beta_1 - \cos \beta) e^{-k(\pi-\beta)} \quad \text{при } \beta_1 \leq \beta \leq \pi, \\ \tau_1(\beta) = \tau_2(\beta) = \sigma_2(\beta) = 0 \quad \text{при } -\pi \leq \beta \leq -\beta_1, \\ \text{где } k \text{ — положительное число, } Q_1 \text{ и } Q_2 \text{ — параметры, связь между которыми получается с помощью (3), а}$$

Фиг. 2.

$$\beta_1 = \arctg \operatorname{sh} \alpha_1 < \frac{\pi}{2}. \quad (20)$$

Из (19) видно, что такой выбор нагрузки не только облегчает вычисление интегралов (3) и (16), но и дает возможность совершить предельный переход к сосредоточенной силе (когда $k \rightarrow \infty$).

При таком выборе нагрузки уравнения (14), (15) и (16) приводятся к следующему простому виду:

$$f_1(n, \alpha_1) = K_{1,1}(n), \quad f_1(n, \alpha_2) = f'_1(n, \alpha_1) = f'_1(n, \alpha_2) = 0 \quad (n \geq 2), \quad (21)$$

$$f'_1(1, \alpha_1) = f'_1(1, \alpha_2) = I, \quad (22)$$

$$K_{1,1}(n) = \frac{2}{\pi n(n^2-1)} \int_0^{\pi} \frac{a \sin n\beta}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta} \frac{\partial \sigma_1(\beta)}{\partial \beta} d\beta,$$

$$K_{1,2}(n) = K_{2,1}(n) = K_{3,1}(n) = K_{4,1}(n) = K_{3,1}(1) = K_{4,1}(1) = 0. \quad (23) \\ (i=1, 2, n \geq 2).$$

Из (3), с учетом (19), получаем

$$X_i = Y_i = M_i = 0, \quad Y_1 = \int_0^\pi \tau_1(\beta) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=\alpha_1} d\beta = 0, \quad (24)$$

$$(i = 1, 2)$$

что дает связь между Q_1 и Q_2 .

С помощью (9) и (10) из (21) и (22) получаем систему уравнений, решая которую находим

$$A_1(n) = \frac{K_{1,1}(n)}{\Delta} [(n^2 - 1) \operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 - (n^2 - 1) \operatorname{ch}(n+1)\alpha_2 \times \\ \times \operatorname{ch}(n-1)(\alpha_1 - \alpha_2) - (n-1)^2 \operatorname{sh}(n+1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n-1)(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ B_1(n) = \frac{K_{1,1}(n)}{\Delta} [(n^2 - 1) \operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 - (n^2 - 1) \operatorname{ch}(n-1)\alpha_2 \times \\ \times \operatorname{ch}(n+1)(\alpha_1 - \alpha_2) - (n+1)^2 \operatorname{sh}(n-1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n+1)(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ C_1(n) = -\frac{K_{1,1}(n)}{\Delta} [(n^2 - 1) \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1 - (n^2 - 1) \operatorname{sh}(n+1)\alpha_2 \times \\ \times \operatorname{ch}(n-1)(\alpha_1 - \alpha_2) - (n-1)^2 \operatorname{ch}(n+1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n-1)(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ D_1(n) = -\frac{K_{1,1}(n)}{\Delta} [(n^2 - 1) \operatorname{sh}(n-1)\alpha_1 - (n^2 - 1) \operatorname{sh}(n-1)\alpha_2 \times \\ \times \operatorname{ch}(n+1)(\alpha_1 - \alpha_2) - (n+1)^2 \operatorname{ch}(n-1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n+1)(\alpha_1 - \alpha_2)], \quad (25)$$

$$\Delta = 2 [\operatorname{ch} 2n(\alpha_1 - \alpha_2) - n^2 \operatorname{ch} 2(\alpha_1 - \alpha_2) - (n^2 - 1)],$$

$$A_1(1) = -\frac{I}{2} \frac{\operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad C_1(1) = \frac{I}{2} \frac{\operatorname{ch}(\alpha_1 + \alpha_2)}{\operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (26)$$

Если значения $\sigma_1(\beta)$ и $\tau_2(\beta)$ из (19) подставить в (17) и (23), то правые части легко интегрируются и находятся коэффициенты I , B_0 и $K_{1,1}(n)$.

Для вычисления σ_3 вблизи контуров предварительно определим разность $\sigma_\alpha - \sigma_\beta$.

Из (4) находим

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = g \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 1 \right] (g\Phi). \quad (27)$$

С помощью граничных условий (19) из (27) легко вычисляется напряжение σ_3 вблизи контуров

$$a\sigma_3 \Big|_{\alpha=\alpha_i} = a\sigma_1(\beta) + (\operatorname{ch} \alpha_i - \cos \beta) \left\{ 2 \operatorname{sh} \alpha_i I + 4 \cos \beta f_1(1, \alpha_i) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) K_{1,1}(n) \cos n\beta - \right. \\ \left. - 4 \sum_{n=2}^{\infty} n \cos n\beta [B_1(n) \operatorname{ch}(n-1)\alpha_i + D_1(n) \operatorname{sh}(n-1)\alpha_i] \right\}. \quad (28)$$

При нагрузке (19) из (5) находим

$$\begin{aligned}
 2\mu U(\alpha, \beta) = & \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left\{ (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) I + f_1'(1, \alpha) \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_1'(n, \alpha) \cos n\beta - \right. \\
 & - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \left[aB_0 \cos \beta + f_1(1, \alpha) \cos \beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_1(n, \alpha) \cos n\beta \right] \left. \right\} - \\
 & - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left\{ 2I (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) + f_1'(1, \alpha) \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \beta - 1}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \right. \\
 & + 2 \sum_{n=2}^{\infty} [A_1 \operatorname{sh}(n+1)\alpha + B_1 \operatorname{sh}(n-1)\alpha + C_1 \operatorname{ch}(n+1)\alpha + \\
 & + D_1 \operatorname{ch}(n-1)\alpha] n \cos n\beta - \frac{2 \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{n=2}^{\infty} [A_1 \operatorname{sh}(n+1)\alpha + B_1 \operatorname{sh}(n-1)\alpha + \\
 & + C_1 \operatorname{ch}(n+1)\alpha + D_1 \operatorname{ch}(n-1)\alpha] \sin n\beta \left. \right\}, \quad (29) \\
 2\mu V(\alpha, \beta) = & - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left\{ [aB_0 + f_1(1, \alpha)] \frac{\sin \beta \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \right. \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} n f_1(n, \alpha) \sin n\beta + \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{n=2}^{\infty} f_1(n, \alpha) \cos n\beta \left. \right\} + \\
 & + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left\{ f_1'(1, \alpha) \sin \beta - f_1'(\alpha) \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} + \right. \\
 & + 2 \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1) A_1 \operatorname{ch}(n+1)\alpha + (n-1) B_1 \operatorname{ch}(n-1)\alpha + (n+1) C_1 \operatorname{sh}(n+1)\alpha + \\
 & + (n-1) D_1 \operatorname{sh}(n-1)\alpha] \sin n\beta - \frac{2 \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \sum_{n=2}^{\infty} [A_1 \operatorname{sh}(n+1)\alpha + \\
 & + B_1 \operatorname{sh}(n-1)\alpha + C_1 \operatorname{ch}(n+1)\alpha + D_1 \operatorname{ch}(n-1)\alpha] \sin n\beta \left. \right\},
 \end{aligned}$$

отсюда видно, что $V(\alpha, 0) = V(\alpha, \pm \pi) = 0$, как и должно быть (в силу симметричности по β).

Теперь переходим к сосредоточенной силе. Если на фиг. 2 под- считать суммарную нагрузку, которая приложена по линии $\alpha = \alpha_1$ и приравнять каждую из них (при $k \rightarrow \infty$) заданной величине P_1 , т. е.

$$-2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{\beta_1} \sigma_1(\beta) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=\alpha_1} d\beta = 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\beta_1}^{\pi} \sigma_1(\beta) \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=\alpha_1} d\beta = P_1, \quad (30)$$

то получим случай действия осевых сосредоточенных сил (фиг. 3). С помощью (1) и (19) из (30) получим

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{ch} \alpha_1 - 1) (\cos \beta_1 - 1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q_1}{k} &= -\frac{P_1}{2a}, \\
 (\operatorname{ch} \alpha_1 + 1) (\cos \beta_1 + 1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q_2}{k} &= \frac{P_1}{2a}.
 \end{aligned}
 \quad (31)$$

Из (19) и (23) при $k \rightarrow \infty$ с помощью (31) для $K_{1,1}(n)$ получается следующее простое выражение

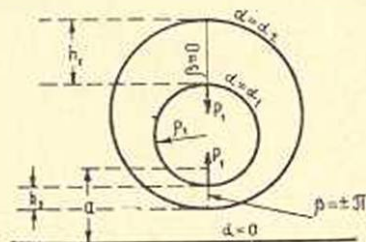
$$K_{1,1}(n) = \frac{P_1}{\pi(n^2 - 1)} [(-1)^n - 1] \quad (32)$$

$(n \geq 2),$

откуда

$$\begin{aligned}
 K_{1,1}(2m) &= 0, \\
 K_{1,1}(2m+1) &= -\frac{2P_1}{\pi[(2m+1)^2 - 1]} \quad (33)
 \end{aligned}$$

$(m \geq 1).$



Фиг. 3.

Из (17), с помощью (19) и (31), находим

$$I = -\frac{P_1}{\pi D_0} \operatorname{ch} \alpha_1, \quad B_0 = -\frac{P_1 \operatorname{ch} \alpha_1}{2a\pi D_0} [\operatorname{sh} 2\alpha_2 + \operatorname{th}(\alpha_1 - \alpha_2)],$$

где

$$D_0 = (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2) \operatorname{th}(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (34)$$

С помощью (32), (33) и (34) из (24) и (26) находятся коэффициенты $A_1(n)$, $B_1(n)$, $C_1(n)$, $D_1(n)$, $A_1(1)$ и $C_1(1)$.

В случае сосредоточенной силы из (28) при $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$ для $\sigma_\beta|_{\alpha=\pi}$ получается очень простое выражение

$$\sigma_\beta \Big|_{\substack{\alpha=\pi, \\ \beta=\pm \frac{\pi}{2}}} = \frac{I}{a} \operatorname{sh} 2\alpha_i \quad (i=1, 2). \quad (35)$$

Из (29) в случае сосредоточенной силы находим

$$\begin{aligned}
 U(\alpha_1, 0) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \frac{\varphi_1 + \frac{\lambda}{\mu} \varphi_2}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}, & U(\alpha_2, 0) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \frac{\varphi_3 + \frac{\lambda}{\mu} \varphi_4}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}, \\
 U(\alpha_1, \pi) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \frac{\varphi_5 + \frac{\lambda}{\mu} \varphi_6}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}, & U(\alpha_2, \pi) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \frac{\varphi_7 + \frac{\lambda}{\mu} \varphi_8}{1 + \frac{\lambda}{\mu}},
 \end{aligned} \quad (36)$$

где функции φ_i ($i=1, 2, \dots, 8$) зависят от α_1 и α_2

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - a_0 + \operatorname{cth} \frac{\alpha_1}{2} \right) + a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4} (1 - a_0) + a_3,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} a_0 + 2a_4 + a_5 + 6a_9,$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{4} a_0 + a_4 + 3a_9,$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{2} \left(1 + 3a_0 + \operatorname{cth} \frac{x_1}{2} \right) + a_1 - 4a_2 - a_3 + a_7,$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{4} (1 + 3a_0) - 2a_2 - a_3,$$

$$\varphi_7 = -\frac{1}{2} a_0 + 3a_4 - a_5 + 6a_9, \quad \varphi_8 = -\frac{1}{4} a_0 + a_4 + 3a_9.$$

$$a_0 = \frac{\operatorname{ch} x_1}{\operatorname{sh}^2 x_1 + \operatorname{sh}^2 x_2}, \quad a_1 = a_0 \operatorname{cth} \frac{x_1}{2}, \quad a_2 = a_0 \operatorname{cth} (x_1 - x_2).$$

$$a_3 = a_2 \operatorname{ch} x_1, \quad a_4 = a_2 \operatorname{ch} x_2, \quad a_5 = a_1 \operatorname{ch} x_2, \quad a_6 = a_4 \operatorname{sh} x_2,$$

$$a_7 = a_6 \operatorname{cth} \frac{x_1}{2}, \quad a_8 = a_6 \operatorname{th} \frac{x_2}{2}, \quad a_9 = e^{-2(x_1 - x_2)}. \quad (37)$$

Значения φ_i ($i=1, 2, \dots, 8$) для разных x_1 и x_2 приведены в таблице

Таблица

$\frac{h_1}{h_2}$	$\frac{a}{\rho_1}$	x_1	x_2	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
3	3	1,818	1,001	4,03289	1,60298	3,79572	1,35893	1,17469	1,25522	3,7315	1,2067
4	3	1,818	0,724	3,3606	1,4691	2,5525	0,9424	0,7581	1,1334	1,9369	0,7781
5	3	1,818	0,570	3,1412	1,4252	2,1351	0,7963	0,6219	1,0941	1,6421	0,6274
3	4	2,095	0,912	3,0921	1,3905	2,1339	0,7627	0,6904	1,0112	1,5177	0,6422
4	4	2,095	0,664	2,8043	1,3421	1,5783	0,5778	0,4952	0,9670	1,1713	0,4530
5	4	2,095	0,524	2,6956	1,3238	1,3730	0,5072	0,4215	0,9503	1,0318	0,8006
3	5	2,313	0,863	2,7335	1,3195	1,4679	0,5203	0,4962	0,9177	1,0290	0,4221
4	5	2,313	0,630	2,5605	1,2941	1,1359	0,4122	0,3715	0,8946	0,8296	0,3121
5	5	2,313	0,498	2,4915	1,2845	1,0088	0,3695	0,3216	0,8853	0,7465	0,2687

Известна следующая связь:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2G}{1 - 2\mu},$$

откуда, с помощью таблиц получаем, что

$$\min \frac{\lambda}{\mu} = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2.$$

Поэтому в формулах (36) можно пренебречь $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 и единицей относительно второго слагаемого.

Тогда (36) примет очень простой вид

$$\begin{aligned} U(x_1, 0) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \varphi_2, & U(x_2, 0) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \varphi_4, \\ U(x_1, \pi) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \varphi_6, & U(x_2, \pi) &= \frac{P_1}{2\pi\mu} \varphi_8. \end{aligned} \quad (38)$$

Из таблицы видно, что $U(x_i, 0)$ и $U(x_i, \pi)$ ($i = 1, 2$) уменьшаются при уменьшении α_2 или при увеличении α_1 .

В частности, если взять

$$\alpha_i(\beta) = -q_i, \quad \tau_i(\beta) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (39)$$

то получим задачу эксцентричной трубы под равномерным давлением, т. е. по контуру $\alpha = \alpha_1$ действует равномерное давление, равное q_1 , а по контуру $\alpha = \alpha_2$ — давление, равное q_2 .

В этом случае, с помощью (39), из (14), (15), (16), (17) и (22) получается

$$A_i(n) = B_i(n) = C_i(n) = D_i(n) = 0 \quad (n \geq 2; i = 1, 2),$$

$$A_2(1) = B_2(1) = C_2(1) = D_2(1) = 0.$$

Для определения оставшихся коэффициентов $A_1(1), C_1(1), B_0$ и I получаем следующие четыре уравнения:

$$A_1(1) \operatorname{sh} 2\alpha_1 + C_1(1) \operatorname{ch} 2\alpha_1 = \frac{I}{2},$$

$$-I \operatorname{sh} \alpha_i \operatorname{ch} \alpha_i + \alpha B_0 + A_1(1) \operatorname{ch} 2\alpha_i + C_1(1) \operatorname{sh} 2\alpha_i = -\alpha q_i \quad (i = 1, 2),$$

откуда находим

$$I = \frac{2a}{D_0} (q_1 - q_2) \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$B_0 = \frac{1}{D_0} [q_1 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh} 2\alpha_2 - q_2 \operatorname{ch} (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh} 2\alpha_1 + (q_1 + q_2) \operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2)],$$

$$A_1(1) = -\frac{a}{D_0} (q_1 - q_2) \operatorname{sh} (\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$C_1(1) = \frac{a}{D_0} (q_1 - q_2) \operatorname{ch} (\alpha_1 + \alpha_2),$$

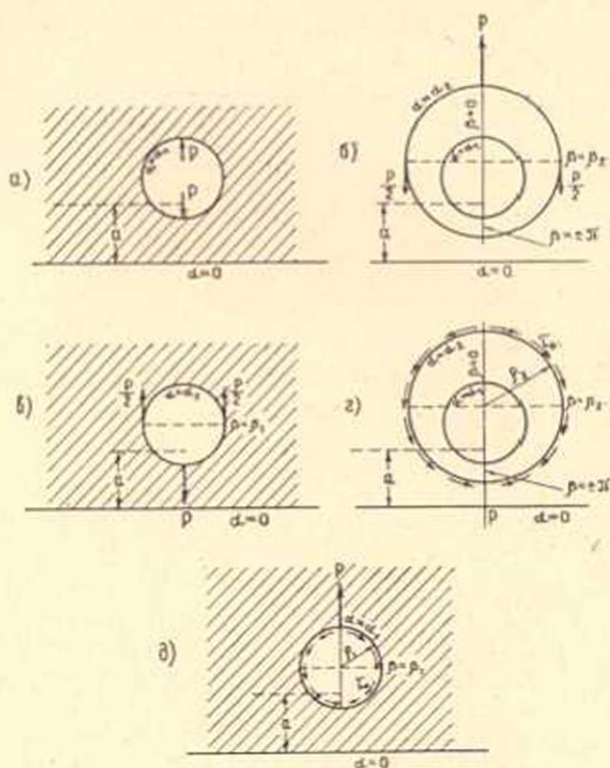
где

$$D_0 = 2(\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2) \operatorname{sh} (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Это решение совпадает с решением Я. С. Уфлянда [1].

По изложенному методу, кроме рассмотренных задач, легко решаются некоторые конкретные задачи. Для решения этих задач необходимо соответственным образом выбрать внешние нагрузки, далее в

полученных результатах перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ и приравнять суммарную нагрузку заданной величине P или $\frac{P}{2}$ (фиг. 4).



Фиг. 4.

Здесь рассмотрены следующие задачи:

1. Полуплоскость с отверстием (фиг. 4а). Решение этой задачи получается из первой рассмотренной задачи, где нужно лишь принять $a_2 = 0$, $P_1 = -P$.

2. Эксцентричное кольцо (фиг. 4б)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\beta) = \tau_1(\beta) &= 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leq \beta \leq \pi \\ \sigma_2(\beta) &= Q_2 (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta)^2 (\cos \beta_2 - \cos \beta) e^{-k\beta} \\ \tau_2(\beta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad 0 \leq \beta \leq \beta_2$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2(\beta) &= 0 \\ \tau_2(\beta) &= H_2 (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta)^2 \sin \beta e^{-k(\beta - \beta_2)} \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad \beta_2 \leq \beta \leq \pi$$

$$\beta_2 = \arctg \operatorname{sh} \alpha_2.$$

3. Полуплоскость с отверстием (фиг. 4в)

$$\sigma_2(\beta) = \tau_2(\beta) = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leq \beta \leq \pi$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\beta) &= 0 \\ \tau_1(\beta) &= H_1 (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta)^2 \sin \beta e^{-k(\beta - \beta_1)} \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad 0 \leq \beta \leq \beta_1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\beta) &= Q_1 (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta)^2 (\cos \beta_1 - \cos \beta) e^{-k(z-\beta)} \\ \tau_1(\beta) &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ при } \beta_1 \leq \beta \leq \pi$$

где

$$\beta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} \alpha_1.$$

В результатах надо положить $\alpha_2 = 0$.

4. Эксцентричное кольцо (фиг. 4г)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\beta) &= \tau_1(\beta) = 0 \quad \text{при } -\pi \leq \beta \leq \pi, \\ \sigma_2(\beta) &= 0, \quad \tau_2(\beta) = \tau_0 \quad \text{при } 0 \leq \beta \leq \beta_2, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2(\beta) &= Q_2 (\operatorname{ch} \alpha_2 - \cos \beta)^2 (\cos \beta_2 - \cos \beta) e^{-k(z-\beta)} \\ \tau_2(\beta) &= \tau_0, \end{aligned} \right\} \text{ при } \beta_2 \leq \beta \leq \pi,$$

где

$$\tau_0 = \frac{P}{4\rho_2}, \quad \rho_2 = \frac{a}{\operatorname{sh} \alpha_2}, \quad \beta_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{sh} \alpha_2.$$

5. Полу плоскость с отверстием (фиг. 4д)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\beta) &= Q_1 (\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \beta)^2 (\cos \beta_1 - \cos \beta) e^{-k\beta} \\ \tau_1(\beta) &= \tau_0 \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 \leq \beta \leq \beta_1$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(\beta) &= 0, \quad \tau_1(\beta) = \tau_0 \quad \text{при } \beta_1 \leq \beta \leq \pi \\ \sigma_2(\beta) &= \tau_2(\beta) = 0 \quad \text{при } -\pi \leq \beta \leq \pi, \end{aligned} \right\}$$

где

$$\tau_0 = \frac{P}{4\rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{a}{\operatorname{sh} \alpha_1}.$$

В результатах надо принять $\alpha_2 = 0$.

При решении перечисленных задач интегралы (16) и (17) берутся очень легко, и коэффициенты функции напряжений выражаются в замкнутой форме.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступила 10 VI 1963.

Վ. Վ. Եզանյան

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑ ԽՆԴԻՐԸ ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում տրվում է արտակենտրոն օղակի հարթ խնդրի լուծումը՝ երբ եղբերում կիրառված են կամադականորեն բաշխված բեռներ:

Խնդիրը դիտարկվում է երկրենև կորագիծ կոորդինատներով: Խնդրի լուծումը՝ լարումների ֆունկցիան, պատկերված է ֆուրիեի շարքի տեսքով: Արտաքին բեռի ընտրությունը 2-4 դժգոհների տեսքով հնարավորություն է տալիս, ա) հեշտություն գտնել լարումների ֆունկցիայի գործակիցները և բ) անցնել կենտրոնացած ուժին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Гостехтеориздат, Л., 1950.
2. Еганян В. В. Плоская задача теории упругости для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей. Кандидатская диссертация, Ереван, 1959.