

П. О. Галфаян

## Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника

В настоящей работе приводится решение смешанной плоской задачи теории упругости для прямоугольника, на одной кромке которого заданы перемещения, а на трех остальных—напряжения.

Функция напряжений рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье. Для определения коэффициентов разложений получены бесконечные системы линейных уравнений. Доказывается, что полученная система квазивполне регулярна и имеет ограниченные сверху свободные члены.

Частный случай этой задачи рассмотрен в статье [6]. Подобные задачи теории упругости для прямоугольника рассмотрены в работах [1—5].

В качестве примера решена задача изгиба консольной балки, когда изгибающая нагрузка приложена на конце балки  $x=l$  и статически эквивалентна заданному грузу  $P$ . Решение задачи доведено до числовых результатов. Исследовано распределение нормальных и касательных напряжений вблизи места закрепления и вычислен прогиб конца консоли.

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольника при несимметричных граничных условиях, заданных в напряжениях и перемещениях.

Как известно [7], в плоской задаче теории упругости в случае отсутствия массовых сил функция напряжений Эри удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta^2 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (1.1)$$

внутри прямоугольника  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq y \leq h$ .

Напряжения через функцию  $\Phi$  выражаются формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (1.2)$$

а перемещения определяются соотношениями [2]

$$u = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} - ay + b, \quad (1.3)$$

$$v = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} + ax + c.$$

Здесь  $E$ —модуль упругости,  $\nu$ —коэффициент Пуассона,  $a$ ,  $b$  и  $c$ —постоянные, которые определяются при помощи контурных условий.

Рассмотрим плоское напряженное состояние прямоугольника, на контуре которого выполняются следующие условия:

$$\sigma_y(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_k x, \quad \tau_{xy}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \alpha_k x \quad (1.4)$$

( $0 < x < l$ )

$$\sigma_y(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \alpha_k x, \quad \tau_{xy}(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \alpha_k x \quad (1.5)$$

$$\sigma_x(l, y) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \sin \beta_k y, \quad \tau_{xy}(l, y) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos \beta_k y \quad (1.6)$$

( $0 < y < h$ )

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin \beta_k y, \quad v(0, y) = \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos \beta_k y, \quad (1.7)$$

где

$$\alpha_k = (2k-1) \frac{\pi}{2l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{h}, \quad (1.8)$$

$l$ —длина прямоугольника, а  $h$ —высота.

Функцию напряжений  $\Phi(x, y)$  ищем в виде [6]

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & Axy + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ & + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y)] \cos \alpha_k x + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \beta_k x + F_k \operatorname{sh} \beta_k x + \beta_k x (G_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \operatorname{sh} \beta_k x)] \sin \beta_k y. \quad (1.9) \end{aligned}$$

Используя граничные условия (1.4)–(1.7), для определения неизвестных коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $A$ ,  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $E_k$  и  $F_k$  получаем соотношения

$$\begin{aligned} a = & -\frac{\nu}{E} A, \quad b = 0, \quad c = \frac{h_0}{2} + \\ & + \frac{1+\nu}{Eh} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k - c_k}{\alpha_k^2} - \frac{2}{1+\nu} \left( C_k + D_k \operatorname{th} \frac{\alpha_k h}{2} \right) \operatorname{sh} \alpha_k h \right], \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$A = -\frac{f_0}{2} - \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k - c_k}{\alpha_k}, \quad A_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_k^2}, \quad (1.11)$$

$$B_k = -\alpha_k h (D_k + C_k \operatorname{cth} \alpha_k h) + \frac{1}{\alpha_k^2} \left( \alpha_k \operatorname{cth} \alpha_k h - \frac{c_k}{\operatorname{sh} \alpha_k h} \right), \quad (1.12)$$

$$E_k = -G_k \left( \beta_k l + \frac{1-\nu}{1+\nu} \operatorname{th} \beta_k l \right) - H_k \beta_k l \operatorname{th} \beta_k l + \\ + \frac{1}{\beta_k^2} \left( \frac{E \beta_k}{1+\nu} g_k \operatorname{th} \beta_k l - \frac{e_k}{\operatorname{ch} \beta_k l} \right), \quad (1.13)$$

$$F_k = \frac{1-\nu}{1+\nu} G_k - \frac{E}{1+\nu} \frac{g_k}{\beta_k}. \quad (1.14)$$

Пользуясь этими значениями для определения неизвестных  $C_k$ ,  $D_k$ ,  $G_k$  и  $H_k$ , после некоторых преобразований получаем следующие четыре бесконечные системы линейных уравнений:

$$-(\operatorname{sh} \alpha_p h + \alpha_p h) \left( D_p + C_p \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2} \right) = \\ = \frac{8}{l} (-1)^{p+1} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} (G_k \operatorname{sh} \beta_k l + H_k \operatorname{ch} \beta_k l) + \\ + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{8}{\alpha_p l} \sum_{k=1,3}^{\infty} G_k \frac{\beta_k^2 (\alpha_p^2 - \nu \beta_k^2)}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} + \\ + \frac{4}{l} \cdot \frac{(-1)^p}{\alpha_p} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + \alpha_p^2} \left[ \frac{e_k}{\alpha_p} - \frac{(-1)^p}{1+\nu} E g_k \right] + \\ + \frac{1}{\alpha_p^2} \left[ b_p - d_p - (\alpha_p + c_p) \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2} \right], \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.15)$$

$$(\operatorname{sh} \alpha_p h - \alpha_p h) \left( D_p + C_p \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2} \right) = \\ = \frac{8}{l} (-1)^{p+1} \sum_{k=2,4}^{\infty} \frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} (G_k \operatorname{sh} \beta_k l + H_k \operatorname{ch} \beta_k l) + \\ + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{8}{\alpha_p l} \sum_{k=2,4}^{\infty} G_k \frac{\beta_k^2 (\alpha_p^2 - \nu \beta_k^2)}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} + \\ + \frac{4}{l} \cdot \frac{(-1)^p}{\alpha_p} \sum_{k=2,4}^{\infty} \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + \alpha_p^2} \left[ \frac{e_k}{\alpha_p} - \frac{(-1)^p}{1+\nu} E g_k \right] + \\ + \frac{1}{\alpha_p^2} \left[ b_p + d_p - (\alpha_p - c_p) \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2} + \frac{4}{\alpha_p l} \cdot A \right], \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \operatorname{sh} \beta_p l + \beta_p l \cdot \lambda_p - \frac{2}{1+\nu} \right) (H_p + G_p \gamma_p) = \\
& = \frac{4}{h} (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k^2}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \left[ \alpha_k + \frac{(-1)^k}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu \beta_p^2}{\beta_p} \right] (C_k \operatorname{sh} \alpha_k h + \\
& + D_k \operatorname{ch} \alpha_k h) + \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{(-1)^k \alpha_k^2}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \left[ \alpha_k + \frac{(-1)^k}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu \beta_p^2}{\beta_p} \right] + \\
& + \frac{2}{\beta_p h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - (-1)^p c_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \left[ 1 - (-1)^k \frac{\alpha_k}{\beta_p} \right] + \\
& + \frac{1}{\beta_p^2} \left[ e_p \mu_p - f_p + \frac{E \beta_p}{1+\nu} (h_p + g_p \lambda_p) \right] \quad (1.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \operatorname{sh} \beta_p l - \beta_p l \cdot \mu_p + \frac{2}{1+\nu} \right) (H_p + G_p \delta_p) = \\
& = \frac{4}{h} (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k^2}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \left[ \alpha_k - \frac{(-1)^k}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu \beta_p^2}{\beta_p} \right] \times \\
& \quad \times (C_k \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k \operatorname{ch} \alpha_k h) + \\
& + \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{(-1)^k \alpha_k^2}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \left[ \alpha_k - \frac{(-1)^k}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu \beta_p^2}{\beta_p} \right] - \\
& - \frac{2}{\beta_p h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - (-1)^p c_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \left[ 1 + (-1)^k \frac{\alpha_k}{\beta_p} \right] + \\
& + \frac{1}{\beta_p^2} \left[ e_p \lambda_p - f_p - \frac{E \beta_p}{1+\nu} (h_p + g_p \mu_p) \right], \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_p = \frac{\operatorname{ch} \beta_p l + \beta_p l + \frac{1-\nu}{1+\nu} \lambda_p}{\operatorname{sh} \beta_p l + \beta_p l \cdot \lambda_p - \frac{2}{1+\nu}}, \quad \delta_p = \frac{\operatorname{ch} \beta_p l - \beta_p l - \frac{1-\nu}{1+\nu} \mu_p}{\operatorname{sh} \beta_p l - \beta_p l \cdot \mu_p + \frac{2}{1+\nu}}, \quad (1.19)$$

$$\lambda_p = \frac{\operatorname{sh} \beta_p l + 1}{\operatorname{ch} \beta_p l}, \quad \mu_p = \frac{\operatorname{sh} \beta_p l - 1}{\operatorname{ch} \beta_p l}. \quad (1.20)$$

При этом использованы разложения

$$\operatorname{sh} \beta_k x = \frac{2\beta_k}{l} \operatorname{ch} \beta_k l \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} \sin \alpha_p x}{\alpha_p^2 + \beta_k^2}, \quad 1 = \frac{2}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_p x}{\alpha_p},$$

$$\operatorname{ch} \beta_k x = \frac{2\beta_k^2}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} \sin \alpha_p x}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left[ \operatorname{sh} \beta_k l + (-1)^{p+1} \frac{\alpha_p}{\beta_k} \right], \quad (1.21)$$

$$x \operatorname{sh} \beta_k x = \frac{2}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} \sin \alpha_p x}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left[ \operatorname{sh} \beta_k l + \beta_k l \cdot \operatorname{ch} \beta_k l - \right. \\ \left. - \frac{2\beta_k^2}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left( \operatorname{sh} \beta_k l + (-1)^{p+1} \frac{\alpha_p}{\beta_k} \right) \right],$$

$$x \operatorname{ch} \beta_k x = \frac{2}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} \sin \alpha_p x}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \left[ \operatorname{ch} \beta_k l + \beta_k l \cdot \operatorname{sh} \beta_k l - \frac{2\beta_k^2}{\alpha_p^2 + \beta_k^2} \operatorname{ch} \beta_k l \right],$$

а также аналогичные разложения для функций  $\operatorname{sh} \alpha_k y$ ,  $\operatorname{ch} \alpha_k y$ ,  $y \operatorname{sh} \alpha_k y$  и  $y \operatorname{ch} \alpha_k y$  по функциям  $\{\cos \beta_k y\}$  на интервале  $(0, h)$ .

Введем новые неизвестные

$$\frac{(-1)^k \alpha_k^2}{h} (C_k \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k \operatorname{ch} \alpha_k h) = X_k - Y_k, \quad \frac{(-1)^k \alpha_k^2}{h} D_k = X_k + Y_k, \quad (1.22)$$

$$\frac{\beta_k^2}{l} (G_k \operatorname{sh} \beta_k l + H_k \operatorname{ch} \beta_k l) = Z_k - W_k, \quad \frac{\beta_k^2}{l} G_k = Z_k + W_k.$$

Тогда

$$D_p + C_p \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2} = X_p \frac{(-1)^p}{\alpha_p^2} \cdot \frac{2h}{\operatorname{sh} \alpha_p h} \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2}, \\ D_p + C_p \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2} = -Y_p \frac{(-1)^p}{\alpha_p^2} \cdot \frac{2h}{\operatorname{sh} \alpha_p h} \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2}, \quad (1.23)$$

$$H_p + G_p \gamma_p = \frac{l}{\beta_p^2} [Z_p (\gamma_p - \mu_p) + W_p (\gamma_p - \lambda_p)],$$

$$H_p + G_p \delta_p = \frac{l}{\beta_p^2} [Z_p (\delta_p - \mu_p) + W_p (\delta_p - \lambda_p)].$$

Произведя замену неизвестных и решая уравнения (1.17) и (1.18) относительно  $Z_p$  и  $W_p$ , получаем следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$X_p = \sum_{k=1,3}^{\infty} a_{pk} Z_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} b_{pk} W_k + m_p, \\ Y_p = \sum_{k=2,4}^{\infty} c_{pk} Z_k + \sum_{k=2,4}^{\infty} d_{pk} W_k + n_p, \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.24)$$

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} e_{pk} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} f_{pk} Y_k + r_p,$$

$$W_p = \sum_{k=1}^{\infty} g_{pk} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} h_{pk} Y_k + s_p,$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{pk} &= \frac{4x_p^2}{h\zeta_p} \left[ \beta_k - \frac{(-1)^p}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p} \right] \frac{1}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}, \\
 b_{pk} &= -\frac{4x_p^2}{h\zeta_p} \left[ \beta_k + \frac{(-1)^p}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p} \right] \frac{1}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}, \\
 c_{pk} &= \frac{4x_p^2}{h\eta_p} \left[ \beta_k - \frac{(-1)^p}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p} \right] \frac{1}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}, \\
 d_{pk} &= -\frac{4x_p^2}{h\eta_p} \left[ \beta_k + \frac{(-1)^p}{1+\nu} \cdot \frac{\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2}{\alpha_p} \right] \frac{1}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}; \\
 e_{pk} &= \frac{4\beta_p^2}{l} \cdot \frac{[1 - (-1)^p](M_p + N_p)}{M_p^2 - N_p L_p} \left[ \alpha_k + (-1)^k \frac{R_p}{\beta_p} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu} \right] \frac{1}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}, \\
 f_{pk} &= \frac{4\beta_p^2}{l} \cdot \frac{[1 + (-1)^p](M_p + N_p)}{M_p^2 - N_p L_p} \left[ \alpha_k + (-1)^k \frac{R_p}{\beta_p} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu} \right] \frac{1}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}, \\
 g_{pk} &= -\frac{4\beta_p^2}{l} \cdot \frac{[1 - (-1)^p](M_p + L_p)}{M_p^2 - N_p L_p} \left[ \alpha_k - (-1)^k \frac{Q_p}{\beta_p} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu} \right] \frac{1}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}; \\
 h_{pk} &= -\frac{4\beta_p^2}{l} \cdot \frac{[1 + (-1)^p](M_p + L_p)}{M_p^2 - N_p L_p} \left[ \alpha_k - (-1)^k \frac{Q_p}{\beta_p} \cdot \frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu} \right] \frac{1}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}, \\
 m_p &= -\frac{2}{lh} \cdot \frac{\alpha_p}{\zeta_p} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + \alpha_p^2} \left[ \frac{e_k}{\alpha_p} - \frac{(-1)^p}{1+\nu} E g_k \right] + \\
 &\quad + \frac{(-1)^{p+1}}{2h\zeta_p} \left[ b_p - d_p - (a_p + c_p) \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2} \right], \\
 n_p &= -\frac{2}{lh} \cdot \frac{\alpha_p}{\eta_p} \sum_{k=2,4}^{\infty} \frac{\beta_k}{\beta_k^2 + \alpha_p^2} \left[ \frac{e_k}{\alpha_p} - \frac{(-1)^p}{1+\nu} E g_k \right] + \\
 &\quad + \frac{(-1)^{p+1}}{2h\eta_p} \left[ b_p + d_p - (a_p - c_p) \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2} + \frac{4}{\alpha_p l} \cdot A \right], \\
 r_p &= \frac{M_p + N_p}{M_p^2 - N_p L_p} \left\{ \frac{2\beta_p}{lh} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - (-1)^p c_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \left[ R_p - (-1)^k \frac{\alpha_k}{\beta_p} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{l} \left[ \frac{M_p \mu_p + N_p \lambda_p}{M_p + N_p} e_p - f_p + \frac{E \beta_p}{1+\nu} \left( R_p h_p + \frac{M_p \lambda_p - N_p \mu_p}{M_p + N_p} \cdot g_p \right) \right] \right\}, \\
 s_p &= \frac{M_p + L_p}{M_p^2 - N_p L_p} \left\{ \frac{2\beta_p}{lh} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - (-1)^p c_k}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \left[ Q_p + (-1)^k \frac{\alpha_k}{\beta_p} \right] - \right.
 \end{aligned}
 \tag{1.27}$$

$$-\frac{1}{l} \left[ \frac{M_p \lambda_p + L_p \mu_p}{M_p + L_p} e_p - f_p - \frac{E \beta_p}{1 + \nu} \left( Q_p h_p + \frac{M_p \mu_p - L_p \lambda_p}{M_p + L_p} g_p \right) \right],$$

$$(p = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\zeta_p = \left( 1 + \frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh} \alpha_p h} \right) \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2}, \quad \tau_p = \left( 1 - \frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh} \alpha_p h} \right) \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2},$$

$$R_p = \frac{M_p - N_p}{M_p + N_p}, \quad Q_p = \frac{M_p - L_p}{M_p + L_p},$$

$$M_p = \frac{4}{1 + \nu} \operatorname{th} \beta_p l + \frac{2 \beta_p l}{\operatorname{ch}^2 \beta_p l}, \quad (1.28)$$

$$N_p = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \lambda_p - \mu_p - \frac{2 \beta_p l}{\operatorname{ch} \beta_p l} \operatorname{th} \beta_p l,$$

$$L_p = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \mu_p - \lambda_p + \frac{2 \beta_p l}{\operatorname{ch} \beta_p l} \operatorname{th} \beta_p l.$$

2. Докажем квазиполную регулярность бесконечной системы (1.24).

Рассмотрим уравнения системы (1.24) отдельно при четном и нечетном  $p$ . Для суммы абсолютных значений коэффициентов уравнений первой бесконечной системы (1.24) при  $p$  нечетном будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,3}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1,3}^{\infty} |b_{pk}| &= \frac{4x_p^2}{h\zeta_p} \left\{ \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} \left| \beta_k + \frac{\alpha_p^2 - \nu \beta_k^2}{(1 + \nu) \alpha_p} \right| + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} \left| \beta_k - \frac{\alpha_p^2 - \nu \beta_k^2}{(1 + \nu) \alpha_p} \right| \right\} = \\ &= \frac{4x_p^2}{\pi \tau_p(x_p)} \left\{ \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left| k + \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right| + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left| k - \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right| \right\}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где

$$x_p = \frac{\alpha_p h}{\pi} = (2p - 1) \frac{h}{2l}, \quad \tau_p(x_p) = \left( 1 + \frac{x_p \pi}{\operatorname{sh} x_p \pi} \right) \operatorname{th} \frac{x_p \pi}{2},$$

$$(p = 1, 3, \dots) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,3}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1,3}^{\infty} |b_{pk}| &= \frac{4x_p^2}{\pi \tau_p(x_p)} \left\{ \sum_{k=1,3}^{k_p^0} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k + \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] - \right. \\ &- \sum_{k_p^0+2}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k + \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] - \sum_{k=1,3}^{k_p^1} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k - \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k_p^1+2}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k - \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] \Bigg\}. \quad (2.3)$$

Здесь  $k_p^0$  и  $k_p^1$  — нечетные числа, определяемые из следующих неравенств

$$k + \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{x_p^2 - \nu k^2}{x_p} \geq 0 \quad \text{при всех нечетных } k \leq k_p^0, \quad (2.4)$$

$$k - \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{x_p^2 - \nu k^2}{x_p} \leq 0 \quad \text{при всех нечетных } k \leq k_p^1.$$

Из формул (2.4) получим

$$k_p^0 \leq \nu_0 \cdot x_p, \quad k_p^1 \leq \nu_1 \cdot x_p, \quad (2.5)$$

где

$$\nu_0 = \frac{\sqrt{(1 + \nu)^2 + 4\nu} + (1 + \nu)}{2\nu}, \quad \nu_1 = \frac{\sqrt{(1 + \nu)^2 + 4\nu} - (1 + \nu)}{2\nu}. \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$k_p^0 \geq k_p^1. \quad (2.7)$$

В силу (2.7) для выражения (2.3) будем иметь

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1,3}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1,3}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{4x_p^2}{\pi \zeta_p(x_p)} \left\{ \sum_{k=1,3}^{k_p^1} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k + \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] + \right. \\ & + \sum_{k_p^1+2}^{k_p^0} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k + \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] - \sum_{k_p^0+2}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k + \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] - \\ & - \sum_{k=1,3}^{k_p^1} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k - \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] + \sum_{k_p^1+2}^{k_p^0} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k - \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] + \\ & \left. + \sum_{k_p^0+2}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} \left[ k - \frac{x_p^2 - \nu k^2}{(1 + \nu) x_p} \right] \right\} = \\ & = \frac{8x_p^2}{\pi \zeta_p(x_p)} \left\{ \sum_{k_p^1+2}^{k_p^0} \frac{k}{(k^2 + x_p^2)^2} + \frac{x_p}{1 + \nu} \sum_{k=1,3}^{k_p^1} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{x_p} \sum_{k_p^0+2}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 + x_p^2)^2} - \frac{x_p}{1 + \nu} \sum_{k_p^0+2}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + x_p^2)^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{x_p} \sum_{k=1,3}^{k_p^1} \frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2} \Big\} = \\
 & = \frac{8x_p^2}{\pi^2 x_p} \left\{ \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{k}{(k^2+x_p^2)^2} + J_1(x_p, \nu) \right\} = \varphi_1(x_p, \nu), \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

где

$$\sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{k}{(k^2+x_p^2)^2} \leq S_1(x_p) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x_p^2)^2} + \frac{21+x_p^2}{4(9+x_p^2)^2} & \text{при } x_p < 3 \\ \frac{3+x_p^2}{4(1+x_p^2)^2} + \frac{1}{8x_p^3} & \text{при } x_p > 3, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 J_1(x_p, \nu) &= \frac{x_p}{1+\nu} \sum_{k=1,3}^{k_p^0} \frac{1}{(k^2+x_p^2)^2} - \frac{x_p}{1+\nu} \sum_{k_p^1+2}^{\infty} \frac{1}{(k^2+x_p^2)^2} + \\
 &+ \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{x_p} \sum_{k_p^1+2}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{x_p} \sum_{k=1,3}^{k_p^0} \frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2} - \\
 &- \sum_{k=1,3}^{k_p^1} \frac{k}{(k^2+x_p^2)^2} - \sum_{k_p^0+2}^{\infty} \frac{k}{(k^2+x_p^2)^2}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Оценки (2.9) получаются при помощи формул для приближенного интегрирования [2].

Оценим значение функции  $J_1(x_p, \nu)$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{x_p}{1+\nu} \sum_{k=1,3}^{k_p^0} \frac{1}{(k^2+x_p^2)^2} &= \frac{x_p}{1+\nu} \sum_{k=1}^{k_p^0+1} \frac{1}{[(2k-1)^2+x_p^2]^2} \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \frac{x_p}{1+\nu} \int_0^{k_p^0} \frac{dx}{(x^2+x_p^2)^2}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Аналогично оценивая остальные слагаемые правой части (2.10), будем иметь

$$\begin{aligned}
 J_1(x_p, \nu) &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{x_p}{1+\nu} \int_0^{k_p^0} \frac{dx}{(x^2+x_p^2)^2} - \frac{x_p}{1+\nu} \int_{k_p^1+2}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x_p^2)^2} + \right. \\
 &+ \frac{\nu}{1+\nu} \frac{1}{x_p} \int_{k_p^1+2}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+x_p^2)^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{1}{x_p} \int_1^{k_p^0} \frac{x^2 dx}{(x^2+x_p^2)^2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_1^{k_p^1} \frac{x dx}{(x^2 + x_p^2)^2} - \int_{k_p^0+2}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + x_p^2)^2} + \frac{1+2\nu}{2(1+\nu)} \cdot \frac{1}{x_p^3} \Bigg] = \\
& = \frac{1}{4x_p^2} \left\{ \frac{\nu_0}{1+\nu_0^2} - \frac{x_p^2}{x_p^2 + (2+\nu_0 \cdot x_p)^2} + \frac{1}{1+\nu_1^2} + \right. \\
& + \frac{(2+\nu_1 \cdot x_p) x_p}{x_p^2 + (2+\nu_1 \cdot x_p)^2} - \frac{x_p^2}{1+x_p^2} \left( 1 + \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{x_p} \right) + \frac{1+2\nu}{1+\nu} \cdot \frac{1}{x_p} + \\
& \left. + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{arctg} \frac{1}{x_p} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \left[ \operatorname{arctg} \nu_0 + \operatorname{arctg} \left( \nu_1 + \frac{2}{x_p} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Из (2.2), (2.8), (2.9) и (2.12) получаем

$$\lim_{x_p \rightarrow \infty} \varphi_1(x_p, \nu) = \frac{2}{\pi} + f_1(\nu), \quad (2.13)$$

где

$$f_1(\nu) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\nu_0 - 1}{1 + \nu_0^2} + \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_1^2} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left( \operatorname{arctg} \nu_0 + \operatorname{arctg} \nu_1 - \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right]. \quad (2.14)$$

Расчеты показывают, что

$$f_1(0) = 0,5, \quad f_1(0,5) = 0,3. \quad (2.15)$$

Для производной функции  $f_1(\nu)$  имеем

$$f_1'(\nu) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+\nu)^2} \left( \operatorname{arctg} \nu_0 + \operatorname{arctg} \nu_1 - \frac{\pi}{2} \right). \quad (2.16)$$

Обозначим

$$z_0 = \operatorname{arctg} \nu_0 + \operatorname{arctg} \nu_1. \quad (2.17)$$

Тогда

$$\operatorname{tg} z_0 = \frac{\nu_0 + \nu_1}{1 - \nu_0 \cdot \nu_1} = -\frac{\sqrt{(1+\nu)^2 + 4\nu}}{1-\nu}. \quad (2.18)$$

Следовательно,

$$z_0 > \frac{\pi}{2}. \quad (2.19)$$

На основании (2.16) и (2.19) получаем

$$f_1'(\nu) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \nu \leq 0,5. \quad (2.20)$$

Из отрицательности  $f_1'(\nu)$  следует, что функция  $f_1(\nu)$  монотонно убывает, а из (2.15) получаем, что она меняется в пределах от 0,5 до 0,3. Поэтому функция  $f_1(\nu)$  получает свое максимальное значение при  $\nu = 0$ . Следовательно,

$$\sum_{k=1,3} |a_{pk}| + \sum_{k=1,3} |b_{pk}| \leq \frac{2}{\pi} + f_1^{\max}(\nu) \leq 1,1366. \quad (2.21)$$

Аналогичным образом для второго уравнения системы (1.24) получим

$$\sum_{k=2,4} |c_{pk}| + \sum_{k=2,4} |d_{pk}| = \frac{8x_p^2}{\pi \eta_p(x_p)} \left\{ \sum_{k=2,4} \frac{k}{(k^2 + x_p^2)^2} + J_2(x_p, \nu) \right\} = \varphi_2(x_p, \nu), \quad (2.22)$$

где

$$\eta_p(x_p) = \left( 1 - \frac{x_p \pi}{\operatorname{sh} x_p \pi} \right) \operatorname{cth} \frac{x_p \pi}{2}, \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=2,4} \frac{k}{(k^2 + x_p^2)^2} \leq S_2(x_p) = \begin{cases} \frac{2}{(4 + x_p^2)^2} + \frac{32 + x_p^2}{4(16 + x_p^2)^2} & \text{при } x_p \leq 4 \\ \frac{8 + x_p^2}{4(4 + x_p^2)^2} + \frac{1}{8x_p^3} & \text{при } x_p > 4, \end{cases} \quad (2.24)$$

$$J_2(x_p, \nu) \leq \frac{1}{4x_p^2} \left\{ \frac{\nu_0}{1 + \nu_0^2} - \frac{x_p^2}{x_p^2 + (2 + \nu_0 x_p)^2} + \frac{1}{1 + \nu_1^2} + \frac{(2 + \nu_1 x_p) x_p}{x_p^2 + (2 + \nu_1 x_p)^2} - \frac{x_p^2}{4 + x_p^2} \left( 1 + \frac{2\nu}{1 + \nu} \frac{1}{x_p} \right) + \frac{1 + 2\nu}{1 + \nu} \frac{1}{x_p} + \frac{\nu}{1 + \nu} \operatorname{arctg} \frac{2}{x_p} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left[ \operatorname{arctg} \nu_0 + \operatorname{arctg} \left( \nu_1 + \frac{2}{x_p} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \quad (2.25)$$

Из (2.22)–(2.25) и (2.13) получаем

$$\lim_{x_p \rightarrow \infty} \varphi_2(x_p, \nu) = \lim_{x_p \rightarrow \infty} \varphi_1(x_p, \nu) = \frac{2}{\pi} + f_1(\nu). \quad (2.26)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=2,4} |c_{pk}| + \sum_{k=2,4} |d_{pk}| \leq \frac{2}{\pi} + f_1^{\max}(\nu) \leq 1,1366. \quad (2.27)$$

Для третьего уравнения системы (1.24) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1} |e_{pk}| &= \frac{8\beta_p^2}{l} |D^*| \sum_{k=1} \frac{1}{(x_k^2 + \beta_p^2)^2} \left| \alpha_k + (-1)^k \frac{|R_p|}{\beta_p} \frac{\alpha_k^2 - \nu \beta_p^2}{1 + \nu} \right| = \\ &= \frac{16 y_p^2}{\pi} |D^*| \sum_{n=1,3} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left| n + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right| = \\ &= \frac{16 y_p^2}{\pi} |D^*| \left\{ \sum_{n=1,5,9} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left| n - \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=3,7,11} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left| n + \frac{|R_p|}{y} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right| \right\}, \quad (2.28) \end{aligned}$$

где

$$D^* = \frac{M_p(y_p) + N_p(y_p)}{M_p^2(y_p) - N_p(y_p)L_p(y_p)}, \quad y_p = \frac{2\beta_p l}{\pi} = 2p \frac{l}{h}, \quad (p = 1, 3, \dots). \quad (2.29)$$

Как и в случае первого уравнения системы (1.24), освобождаемся от абсолютных значений в правой части выражения (2.28)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |e_{pk}| = \frac{16 y_p^2}{\pi} |D^*| & \left\{ \sum_{n=1,5,9}^{n_p^0} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left( n - \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) - \right. \\ & - \sum_{n_p^0+4}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left( n - \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) - \\ & - \sum_{n=3,7,11}^{n_p^1} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left( n + \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) + \\ & \left. + \sum_{n_p^1+4}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left( n + \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) \right\}, \quad (2.30) \end{aligned}$$

где  $n_p^0$  и  $n_p^1$  — нечетные числа, определяемые из следующих неравенств:

$$n - \frac{|R_p|}{y_p} \cdot \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \geq 0 \quad \text{при всех } n \leq n_p^0, \quad (2.31)$$

$$n + \frac{|R_p|}{y_p} \cdot \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} < 0 \quad \text{при всех } n \leq n_p^1.$$

Из формул (2.31) получим

$$n_p^0 \leq \bar{\nu}_0 \cdot y_p, \quad n_p^1 \leq \bar{\nu}_1 \cdot y_p, \quad (2.32)$$

где

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\sqrt{(1 + \nu)^2 + 4\nu R_p^2} + (1 + \nu)}{2|R_p|}, \quad \bar{\nu}_1 = \frac{\sqrt{(1 + \nu)^2 + 4\nu R_p^2} - (1 + \nu)}{2|R_p|}. \quad (2.33)$$

Из (2.32) и (2.33) легко заметить, что

$$n_p^0 \geq n_p^1. \quad (2.34)$$

В силу (2.34) для выражения (2.30) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |e_{pk}| = \frac{16 y_p^2}{\pi} |D^*| & \left\{ \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left( n + \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) - \right. \\ & - 2 \sum_{n=1,3}^{n_p^1} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left( n + \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{n=1,3,5,7}^{n_p^0} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \left( n - \frac{|R_p|}{y_p} \frac{(n^2 - \nu y_p^2)}{1 + \nu} \right) - \sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \times \\
& \times \left( n - \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) + 2 \sum_{n=1,3,5,7}^{n_p^1} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \times \\
& \times \left( n + \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) - \sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \times \\
& \times \left( n + \frac{|R_p|}{y_p} \frac{n^2 - \nu y_p^2}{1 + \nu} \right) \Big\} = \\
& = \frac{16y_p^2}{\pi} |D^*| \left\{ \sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + y_p^2)^2} - \frac{\nu}{1 + \nu} |R_p| y_p \sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1 + \nu} \frac{|R_p|}{y_p} \sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + y_p^2)^2} + J_3(y_p, \nu) \right\} = \psi_1(y_p, \nu), \quad (2.35)
\end{aligned}$$

где

$$\sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} = \frac{\pi}{8y_p^3} \left( \operatorname{th} \frac{y_p \pi}{2} - \frac{y_p \pi}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{y_p \pi}{2} \right), \quad (2.36)$$

$$\sum_{n=1,3,5,7}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + y_p^2)^2} = \frac{\pi}{8y_p} \left( \operatorname{th} \frac{y_p \pi}{2} + \frac{y_p \pi}{2} \operatorname{sch}^2 \frac{y_p \pi}{2} \right), \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
J_2(y_p, \nu) & = 2 \left\{ \frac{\nu}{1 + \nu} |R_p| y_p \left[ \sum_{n=3,5,7}^{n_p^1} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} + \sum_{n=1,3,5,7}^{n_p^0} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} \right] - \right. \\
& - \frac{1}{1 + \nu} \frac{|R_p|}{y_p} \left[ \sum_{n=3,5,7}^{n_p^1} \frac{n^2}{(n^2 + y_p^2)^2} + \sum_{n=1,3,5,7}^{n_p^0} \frac{n^2}{(n^2 + y_p^2)^2} \right] - \\
& - \left. \sum_{n=3,5,7}^{n_p^1} \frac{n}{(n^2 + y_p^2)^2} - \sum_{n_p^0-4}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + y_p^2)^2} \right\} < \\
& \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{\nu}{1 + \nu} |R_p| y_p \left[ \int_0^{n_p^1} \frac{dy}{(y^2 + y_p^2)^2} + \int_0^{n_p^0} \frac{dy}{(y^2 + y_p^2)^2} \right] - \right. \\
& - \left. \frac{1}{1 + \nu} \frac{|R_p|}{y_p} \left[ \int_1^{n_p^1} \frac{y^2 dy}{(y^2 + y_p^2)^2} + \int_1^{n_p^0} \frac{y^2 dy}{(y^2 + y_p^2)^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_1^{n_p^1} \frac{y dy}{(y^2 + y_p^2)^2} - \int_{n_p^0+4}^{\infty} \frac{y dy}{(y^2 + y_p^2)^2} + \frac{1}{y_p^3} \left( 1 + \frac{|R_p|}{1+\nu} \right) \Bigg) = \\
& = \frac{1}{4y_p^2} \left[ |R_p| \left( \frac{\bar{v}_0}{1+\bar{v}_0^2} + \frac{\bar{v}_1}{1+\bar{v}_1^2} \right) + \frac{1}{1+\bar{v}_1^2} - \frac{y_p^2}{y_p^2 + (4+\bar{v}_0 y_p)^2} - \right. \\
& \quad - \frac{y_p^2}{1+y_p^2} \left( 1 + \frac{2}{1+\nu} \frac{|R_p|}{y_p} \right) + \frac{2}{y_p} \left( 1 + \frac{|R_p|}{1+\nu} \right) + \frac{2}{1+\nu} |R_p| \times \\
& \quad \left. \times \operatorname{arctg} \frac{1}{y_p} - |R_p| \frac{1-\nu}{1+\nu} (\operatorname{arctg} \bar{v}_0 + \operatorname{arctg} \bar{v}_1) \right]. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Из (1.20), (1.28), (2.9), (2.29) и (2.35)–(2.38) получим

$$\lim_{y_p \rightarrow \infty} \psi_1(y_p, \nu) = \frac{2}{\pi} + f_2(\nu), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned}
f_2(\nu) = & \frac{1-\nu}{3-\nu} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1+\nu}{3-\nu} \left( \frac{\bar{v}_0}{1+\bar{v}_0^2} + \frac{\bar{v}_1}{1+\bar{v}_1^2} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1+\bar{v}_1^2} - \frac{1}{1+\bar{v}_0^2} - 1 - \frac{1-\nu}{3-\nu} (\operatorname{arctg} \bar{v}_0 + \operatorname{arctg} \bar{v}_1) \right], \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\bar{v}_0 = \lim_{y_p \rightarrow \infty} \bar{v}_0 = \frac{1}{2} [V(3-\nu)^2 + 4\nu + (3-\nu)], \quad (2.4)$$

$$\bar{v}_1 = \lim_{y_p \rightarrow \infty} \bar{v}_1 = \frac{1}{2} [V(3-\nu)^2 + 4\nu - (3-\nu)].$$

Расчеты показывают, что

$$f_2(0) = 0,0680, \quad f_2(0,5) = 0,1169. \quad (2.4)$$

Для производной функции  $f_2(\nu)$  имеем

$$f_2'(\nu) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(3-\nu)^2} \left[ \operatorname{arctg} \frac{V(3-\nu)^2 + 4\nu}{1-\nu} + \frac{(1+\nu)V(3-\nu)^2 + 4\nu}{5-2\nu+\nu^2} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (2.4)$$

Имеем

$$\frac{(1+\nu)V(3-\nu)^2 + 4\nu}{5-2\nu+\nu^2} > \operatorname{arctg} \frac{(1+\nu)V(3-\nu)^2 + 4\nu}{5-2\nu+\nu^2}, \quad (0 \leq \nu \leq 0,5) \quad (2.4)$$

Значит

$$\operatorname{arctg} \frac{V(3-\nu)^2 + 4\nu}{1-\nu} + \frac{(1+\nu)V(3-\nu)^2 + 4\nu}{5-2\nu+\nu^2} > \operatorname{arctg} \frac{V(3-\nu)^2 + 4\nu}{1-\nu}$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{(1+\nu) \sqrt{(3-\nu)^2 + 4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}. \quad (2.45)$$

Обозначим

$$z_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(3-\nu)^2 + 4\nu}}{1-\nu} + \operatorname{arctg} \frac{(1+\nu) \sqrt{(3-\nu)^2 + 4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}. \quad (2.46)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z_1 &= \frac{\frac{\sqrt{(3-\nu)^2 + 4\nu}}{1-\nu} + \frac{(1+\nu) \sqrt{(3-\nu)^2 + 4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}}{1 - \frac{(1+\nu)(9-2\nu+\nu^2)}{(1-\nu)(5-2\nu+\nu^2)}} = \\ &= - \frac{(3-\nu) \sqrt{(3-\nu)^2 + 4\nu}}{2(1-\nu^2) + 7\nu + \nu^3}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Следовательно,

$$z_1 > \frac{\pi}{2}. \quad (2.48)$$

На основании (2.43), (2.45) и (2.48) получаем

$$f_2'(\nu) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \nu \leq 0,5. \quad (2.49)$$

Из положительности  $f_2'(\nu)$  следует, что функция  $f_2(\nu)$  монотонно возрастает, а из (2.42) получаем, что она меняется в пределах от 0,068 до 0,1169. Поэтому функция  $f_2(\nu)$  получает свое максимальное значение при  $\nu = 0,5$ . Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |e_{pk}| \leq \frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \leq 0,7535. \quad (2.50)$$

Аналогичным образом для четвертого уравнения системы (1.24) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g_{pk}| &= \frac{16y_p^2}{\pi} |D^{**}| \left\{ \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + y_p^2)^2} - \frac{\nu}{1+\nu} |Q_p| y_p \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + y_p^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{1+\nu} \frac{|Q_p|}{y_p} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + y_p^2)^2} + J_4(y_p, \nu) \right\} = \psi_2(y_p, \nu), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где

$$D^{**} = \frac{M_p(y_p) + L_n(\nu_n)}{M_p^2(y_p) - N_p(y_p) L_p(y_p)}, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} J_4(y_p, \nu) &\leq \frac{1}{4y_p^2} \left\{ |Q_p| \left( \frac{\bar{\nu}_0}{1+\bar{\nu}_0} + \frac{\bar{\nu}_1}{1+\bar{\nu}_1} \right) + \frac{1}{1+\bar{\nu}_1} - \frac{y_p^2}{y_p^2 + (4+\bar{\nu}_0)y_p^2} - \right. \\ &\left. - \frac{y_p^2}{1+y_p^2} \left( 1 + \frac{2}{1+\nu} \frac{|Q_p|}{y_p} \right) + \frac{2}{y_p} \left( 1 + \frac{|Q_p|}{1+\nu} \right) + \frac{2}{1+\nu} |Q_p| \operatorname{arctg} \frac{1}{y_p} - \right. \end{aligned}$$

$$-|Q_p| \frac{1-\nu}{1+\nu} (\operatorname{arctg} \bar{\nu}_0 + \operatorname{arctg} \bar{\nu}_1) \Big\}, \quad (2.53)$$

$$\bar{\nu}_0 = \frac{\sqrt{(1+\nu)^2 + 4\nu Q_p^2} + (1+\nu)}{2|Q_p|}, \quad \bar{\nu}_1 = \frac{\sqrt{(1+\nu)^2 + 4\nu Q_p^2} - (1+\nu)}{2|Q_p|}. \quad (2.54)$$

Из (1.20), (1.28), (2.9), (2.35)–(2.37) и (2.51)–(2.54) получим

$$\lim_{y_p \rightarrow \infty} \psi_2(y_p, \nu) = \lim_{y_p \rightarrow \infty} \psi_1(y_p, \nu) = \frac{2}{\pi} + f_2(\nu). \quad (2.55)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_{pk}| \leq \frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \leq 0,7535. \quad (2.56)$$

Если подставим  $X_p$  и  $Y_p$  из первого и второго уравнений (1.24) в третье и четвертое, получим бесконечную систему относительно неизвестных  $Z_p$  и  $W_p$ , для суммы абсолютных значений коэффициентов которой в рассматриваемом случае, т. е. при  $p$  нечетном, согласно (2.21), (2.27), (2.50) и (2.56), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |e_{pk}| \left( \sum_{n=1,3}^{\infty} |a_{kn}| + \sum_{n=1,3}^{\infty} |b_{kn}| \right) &\leq \left[ \frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \right] \left[ \frac{2}{\pi} + f_1^{\max}(\nu) \right] \leq \\ &\leq 0,7535 \cdot 1,1366 = 1 - \theta, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |g_{pk}| \left( \sum_{n=1,3}^{\infty} |a_{kn}| + \sum_{n=1,3}^{\infty} |b_{kn}| \right) &\leq \left[ \frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \right] \left[ \frac{2}{\pi} + f_1^{\max}(\nu) \right] \leq \\ &\leq 0,7535 \cdot 1,1366 = 1 - \theta, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где

$$0 < \theta = 0,1436 \quad \text{при} \quad 0 \leq \nu \leq 0,5. \quad (2.59)$$

Аналогичные оценки получим для сумм коэффициентов бесконечной системы для  $X_p$  и  $Y_p$ , получаемой из (1.24) исключением  $Z_p$  и  $W_p$ .

Точно такие же оценки получаются при  $p$  четном.

Таким образом, на основании (2.57)–(2.59) бесконечная система (1.24) при произвольном отношении  $l$  и  $h$  и любом возможном значении коэффициента Пуассона квазивполне регулярна [8]. Как видно из (1.27), свободные члены бесконечной системы (1.24) имеют порядок коэффициентов Фурье разложений (1.4)–(1.7). Следовательно, они ограничены сверху и имеют порядок не ниже, чем  $p^{-1}$ , если внешняя нагрузка и первые производные перемещений  $u(0, y)$  и  $v(0, y)$  в данном интервале кусочно-непрерывны.

Квазивполне регулярность бесконечной системы (1.24) вместе с ограниченностью свободных членов (1.27) позволяет определить искомого коэффициенты разложения  $\Phi(x, y)$  (1.9) с любой степенью точности.

ности [8]. А при помощи этих оценок определяются верхняя и нижняя границы для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и перемещений  $u$  и  $v$ .

3. В качестве численного примера рассмотрим изгиб консольной балки, когда нагрузка приложена на конце балки  $x=l$  по следующему закону

$$\tau_{xy}(l, y) = qy(y-h), \quad (0 \leq y \leq h) \quad (3.1)$$

где  $q = \text{const}$ .

Пользуясь разложениями (1.4)–(1.7), имеем

$$a_p = b_p^i = c_p = d_p = e_p = g_p = h_p = 0, \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

$$f_0 = -2 \frac{P}{h}, \quad f_p = \frac{24}{p^2 \pi^2} \cdot \frac{P}{h}, \quad (p = 2, 4, 6, \dots), \quad (3.3)$$

где

$$P = - \int_0^h \tau_{xy}(l, y) dy = - \int_0^h qy(y-h) dy = \frac{qh^3}{6}. \quad (3.4)$$

Для коэффициента Пуассона материала и размеров балки принимаем

$$\nu = 0,3, \quad l = 5h. \quad (3.5)$$

На основании (1.2), (1.3), (1.9)–(1.14), (1.22), (1.23) и (3.2)–(3.5) для напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и перемещения  $v$  будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = & h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\text{sh } \alpha_k h} \left\{ (X_k + Y_k) \left[ 2 \text{sh } \alpha_k (h-y) - \alpha_k y \text{ch } \alpha_k (h-y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_k h \frac{\text{sh } \alpha_k y}{\text{sh } \alpha_k h} \right] + (X_k - Y_k) \left[ (2 - \alpha_k h \cdot \text{cth } \alpha_k h) \text{sh } \alpha_k y + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_k y \cdot \text{ch } \alpha_k y \right] \right\} \cos \alpha_k x + l \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k + W_k) \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} - \beta_k x \right) \times \\ & \times (\text{ch } \beta_k x - \text{sh } \beta_k x) \sin \beta_k y, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, y) = & h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\text{sh } \alpha_k h} \left\{ (X_k + Y_k) \left[ \alpha_k y \cdot \text{ch } \alpha_k (h-y) - \alpha_k h \frac{\text{sh } \alpha_k y}{\text{sh } \alpha_k h} \right] + \right. \\ & \left. + (X_k - Y_k) \left[ \alpha_k h \cdot \text{cth } \alpha_k h \cdot \text{sh } \alpha_k y - \alpha_k y \cdot \text{ch } \alpha_k y \right] \right\} \cos \alpha_k x - \\ & - l \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k + W_k) \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} - \beta_k x \right) (\text{ch } \beta_k x - \text{sh } \beta_k x) \sin \beta_k y, \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \frac{P}{h} + h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\text{sh } \alpha_k h} \left\{ (X_k + Y_k) \left[ \text{ch } \alpha_k (h-y) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_k y \cdot \operatorname{sh} \alpha_k (h-y) - \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k h} \Big] - \\
 & - (X_k - Y_k) [(1 - \alpha_k h \cdot \operatorname{cth} \alpha_k h) \operatorname{ch} \alpha_k y + \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y] \Big\} \sin \alpha_k x - \\
 & - l \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k + W_k) \left( \frac{2}{1+\nu} - \beta_k x \right) (\operatorname{ch} \beta_k x - \operatorname{sh} \beta_k x) \cos \beta_k y, \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = & \frac{1+\nu}{E} h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k \cdot \operatorname{sh} \alpha_k h} \left\{ (X_k + Y_k) \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \operatorname{ch} \alpha_k (h-y) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \alpha_k y \cdot \operatorname{sh} \alpha_k (h-y) + \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k h} \right] + \right. \\
 & \left. + (X_k - Y_k) \left[ \alpha_k y \cdot \operatorname{sh} \alpha_k y - \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \alpha_k h \cdot \operatorname{cth} \alpha_k h \right) \operatorname{ch} \alpha_k y \right] \right\} \cos \alpha_k x + \\
 & + \frac{1+\nu}{E} l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k + W_k}{\beta_k} \left( \frac{3-\nu}{1+\nu} - \beta_k x \right) (\operatorname{ch} \beta_k x - \operatorname{sh} \beta_k x) \cos \beta_k y + \\
 & + \frac{4}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k^2} Y_k - 2\nu \frac{P}{E} \frac{x}{h}. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Из (3.9) для прогиба правого конца изогнутой оси балки получаем

$$v\left(l, \frac{h}{2}\right) = \frac{16l^3}{E\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} Y_k - 2\nu \frac{P}{E} \frac{l}{h}. \quad (3.10)$$

Пользуясь теорией квазивполне регулярных систем линейных уравнений [8], получим следующие оценки для неизвестных

$$\begin{aligned}
 0,00087 \frac{P}{h^2} & \leq X_1 \leq 0,00101 \frac{P}{h^2} & 12,519 \frac{P}{h^2} & \leq Y_1 \leq 12,520 \frac{P}{h^2} \\
 -0,00022 \frac{P}{h^2} & \leq X_2 \leq -0,00004 \frac{P}{h^2} & -1,3597 \frac{P}{h^2} & \leq Y_2 \leq -1,3554 \frac{P}{h^2} \\
 0,00195 \frac{P}{h^2} & \leq X_3 \leq 0,00243 \frac{P}{h^2} & 0,51805 \frac{P}{h^2} & \leq Y_3 \leq 0,52496 \frac{P}{h^2} \\
 0,00030 \frac{P}{h^2} & \leq X_4 \leq 0,00080 \frac{P}{h^2} & -0,25137 \frac{P}{h^2} & \leq Y_4 \leq -0,24208 \frac{P}{h^2} \\
 0,00251 \frac{P}{h^2} & \leq X_k \leq 0,00446 \frac{P}{h^2} & 0,14540 \frac{P}{h^2} & \leq Y_k \leq 0,21563 \frac{P}{h^2} \\
 & (k \geq 5) & & (k \geq 5)
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
 0,00129 \frac{P}{h^2} &\leq Z_1 \leq 0,00219 \frac{P}{h^2} & -0,00214 \frac{P}{h^2} &\leq W_1 \leq -0,00124 \frac{P}{h^2} \\
 0,28107 \frac{P}{h^2} &\leq Z_2 \leq 0,32181 \frac{P}{h^2} & 0,07779 \frac{P}{h^2} &\leq W_2 \leq 0,11775 \frac{P}{h^2} \\
 0,00160 \frac{P}{h^2} &\leq Z_3 \leq 0,00280 \frac{P}{h^2} & -0,00270 \frac{P}{h^2} &\leq W_3 \leq -0,00152 \frac{P}{h^2} \\
 0,19279 \frac{P}{h^2} &\leq Z_4 \leq 0,23676 \frac{P}{h^2} & -0,03044 \frac{P}{h^2} &\leq W_4 \leq 0,01309 \frac{P}{h^2} \\
 0,00262 \frac{P}{h^2} &\leq Z_k \leq 0,00263 \frac{P}{h^2} & -0,06692 \frac{P}{h^2} &\leq W_k \leq -0,06180 \frac{P}{h^2}
 \end{aligned}$$

( $k \geq 5$ )

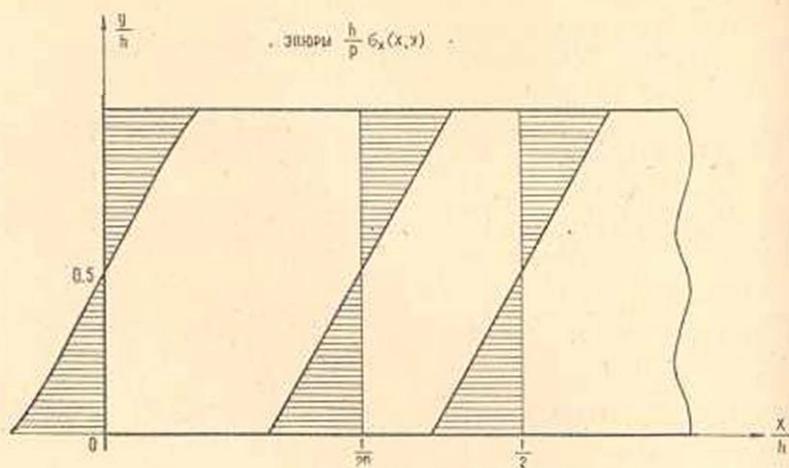
Подставив коэффициенты  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  и  $W_k$  из (3.11) в полученные выражения (3.6)–(3.10), определим значения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в пяти сечениях вблизи места закрепления  $x=0$  и прогиб правого конца  $x=l$ . Эти значения напряжений приведены в таблицах 1–3. Максимальные расхождения в значениях напряжений в сечениях  $x = \frac{h}{20}, \frac{h}{10}, \frac{h}{5}, \frac{h}{2}$  с избытком и недостатком, вычисленных при сохранении четырех первых членов рядов с помощью оценок (3.11), не превосходят 7%. Оценки напряжений в самой заделке затруднительны. Картина изменения напряжений иллюстрирована на графиках 1–3.

Как видно из эпюры  $\tau_{xy}$  (фиг. 2), касательные напряжения по мере приближения к заделке отклоняются от параболического закона распределения по высоте.

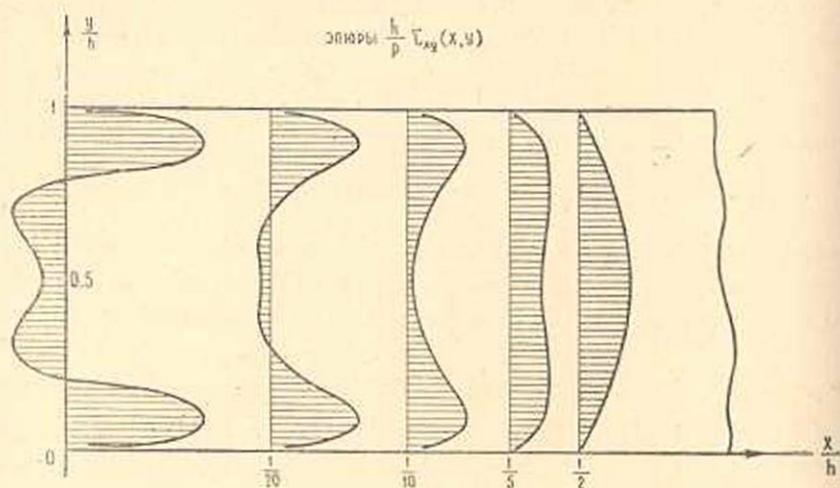
Таблица 1

Значения  $\frac{h}{P} \sigma_x(x, y)$ .

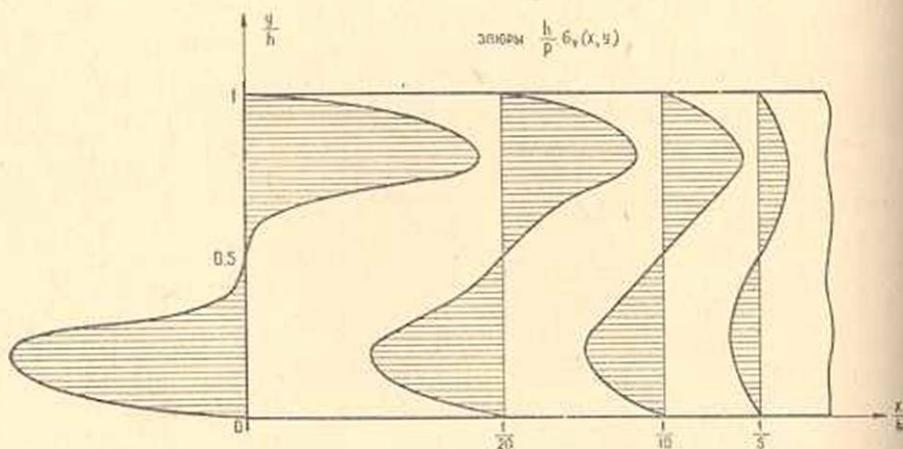
$\frac{y}{h} \backslash \frac{x}{h}$	0	1/20	1/10	1/5	1/2
0,9	21,88	23,05	23,48	23,52	22,47
0,8	15,77	16,99	17,51	17,72	16,88
0,7	10,74	11,12	11,42	11,71	11,29
0,6	5,654	5,467	5,566	5,766	5,650
0,5	-0,0038	-0,0017	-0,0012	-0,0019	-0,0032
0,4	-5,658	-5,462	-5,524	-5,754	-5,643
0,3	-10,73	-11,09	-11,39	-11,69	-11,26
0,2	-15,75	-16,97	-17,46	-17,65	-16,85
0,1	-21,87	-23,04	-23,42	-23,45	-22,45



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Таблица 2

Значения  $-\frac{h}{\rho} \tau_{xy}(x, y)$ 

$\frac{y}{h} \backslash \frac{x}{h}$	0	1/20	1/10	1/5	1/2
0,9	3,950	2,561	1,744	0,9743	0,5602
0,8	0,4855	1,110	1,235	1,104	0,9303
0,7	-1,595	-0,0782	0,6267	1,091	1,224
0,6	-1,136	-0,3687	0,2319	0,9535	1,411
0,5	-0,5885	-0,3224	0,1058	0,8692	1,476
0,4	-1,148	-0,3721	0,2323	0,9556	1,410
0,3	-1,605	-0,0791	0,6294	1,087	1,222
0,2	0,4933	1,118	1,229	1,099	0,9315
0,1	3,928	2,546	1,734	0,9679	0,5622

Таблица 3

Значения  $\frac{h}{\rho} \varepsilon_y(x, y)$ 

$\frac{y}{h} \backslash \frac{x}{h}$	0	1/20	1/10	1/5	1/2
0,9	6,082	3,402	1,847	0,5705	0,0475
0,8	7,288	4,269	2,529	0,8947	0,0573
0,7	3,548	2,756	1,976	0,8741	0,0442
0,6	0,3315	1,046	0,9474	0,5318	0,0229
0,5	0,0053	0,0025	0,0015	0,0019	0
0,4	-0,3341	-0,9940	-0,9271	-0,5190	-0,0201
0,3	-3,585	-2,724	-1,910	-0,8490	-0,0424
0,2	-7,239	-4,191	-2,491	-0,8780	-0,0555
0,1	-6,022	-3,338	-1,765	-0,5619	-0,0459

Отметим, что ряды, определяющие напряжения в заделке, сходятся медленно. Для увеличения точности вычислений следует решать систему линейных уравнений с большим числом неизвестных.

Значения напряжений, приведенные в таблицах 1—3, вычислены по формулам (3.6)–(3.8), ограничиваясь первыми четырьмя членами рядов. Расчеты показывают, что остатки рядов для максимальных значений напряжений в сечениях  $x = \frac{h}{20}, \frac{h}{10}, \frac{h}{5}, \frac{h}{2}$  не превосходят 5% для касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и 1% для нормальных напряжений  $\varepsilon_x$ .

Для прогиба правого конца с избытком и недостатком согласно (3.10) и (3.11) получаем

$$-517,65 \frac{P}{E} \leq v \left( l, \frac{h}{2} \right) \leq -517,59 \frac{P}{E}. \quad (3.12)$$

Приведем значение прогиба правого конца, вычисленное по известной формуле ([9], стр. 158), т. е.

$$f = - \left[ \frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{3Pl}{2Gh} \right]_{\gamma=0,3}^{\gamma=0,5} = -519,5 \frac{P}{E}. \quad (3.13)$$

Сравнивая эти результаты, мы видим, что разность составляет всего  $0,4\%$ .

С целью проверки полученных результатов в лаборатории фотоупругости Института математики и механики АН АрмССР Ваданяном Г. С. были поставлены опыты. Результаты эксперимента подтвердили теоретические расчеты.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 11 VII 1963

## Պ. Ն. Գալֆայան

### ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԳՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է առաձգականության տեսության խառը հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան մի կողմում արված են տեղափոխումները, իսկ մյուս երեք կողմերում՝ լարումները:

Խնդրի լուծումը բերվում է ուղղանկյան ներսում լարումների էրիթի  $\Phi(x, y)$  ֆունկցիայի որոնմանը խառը եզրային պայմաններով:

Դիտարկվող խնդրում  $\Phi(x, y)$  ֆունկցիան ներկայացվում է եռանկյունաչափական շարքերով, որի վերլուծության գործակիցները որոշելու համար ստացվում է դժային հավասարումների անվերջ սիստեմ: Ապացուցվում է ստացված դժային հավասարումների անվերջ սիստեմի թվադիլիովին սեղուլ-լարուկյունը և ազատ անդամների սահմանափակությունը:

Այս խնդրի մասնավոր դեպքը դիտարկված է [6] աշխատությունում: Որպես օրինակ դիտարկված է կոնսոլային հեծանի ծաման խնդիրը, երբ հեծանի  $x=0$  հատվածը ամրակցված է, իսկ մյուս՝  $x=l$  ազատ հատվածքում կիրառված է ծոց  $P$  ուժը: Դիտարկվող խնդրի լուծումը հասցված է մինչև թվային արդյունքների: Ուսումնասիրված է նորմալ և շոշափող լարումների բաշխման օրենքը ամրակցված  $x=0$  հատվածքի մոտակայքում: Մաքսիմալ ճկվածքի համար ստացված թվային արդյունքը համեմատված է հայտնի բանաձևից [9] ստացված արդյունքի հետ: Կազմված են լարումների բաշխման դրաֆիկները:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Прокопов В. К. Задача о стесненном изгибе прямоугольной полосы. Инженерный сборник, 11, 1952, 151—160.
2. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 21, № 1, 1957, 89—100.
3. Валов Г. М. Об одной основной смешанной задаче теории упругости для прямоугольника. Известия АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 3, 1961, 133—142.
4. Прокопов В. К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. ПММ, 16, № 1, 1952, 45—56.
5. Абрамян Б. Л. и Манукян М. М. Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях. ДАН АрмССР, 25, № 4, 1957, 177—184.
6. Галфаян П. О. Об изгибе защемленной прямоугольной балки. ДАН АрмССР, 37, № 3, 1963, 143—150.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1934.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1962.
9. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. Физматгиз, М., 1959.