ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

В. П. Петренко

Некоторые оценки логарифмической производной мероморфной функции

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в $z \neq \infty$. Будем пользоваться следующими обозначениями:
$n(r, a)$ — число корней уравнения $f(z) = a$, лежащих в круге $|z| \leqslant r$;

$$n(r) = n(r, 0) + n(r, \infty),$$

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \ln r,$$

$$N(r) = N(r, 0) + N(r, \infty),$$

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta,$$

$$m(r, \infty) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$T(r, f) = m(r, \infty) + N(r, \infty),$$

$$\varkappa = \varkappa(f) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r)}{T(r, f)},$$

$$\delta(a) = \delta(a, f) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a)}{T(r, f)},$$

$$S(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \rho; \quad \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \lambda$$

(напомним, что ρ называется порядком мероморфной функции $f(z)$, λ—ее нижним порядком). Буквой C с индексами будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от r и R $(R > r)$.

§ 1. Р. Неванлинна показал [1], что для всех значений r, $0<r_0\leqslant r<\infty$, за исключением, быть может, системы интервалов с конечной суммой длин, справедлива оценка

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right)=O(\ln(rT(r, f))) \quad (r\to\infty). \tag{1.1}$$

Эту оценку Р. Неванлинна использовал для доказательства соотношения дефектов

$$\sum_{(a)}\delta(a)\leqslant 2,$$

справедливого для любой мероморфной функции.

В работе [2] Фукс доказал, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка сходится ряд

$$\sum_{(a)}\sqrt{\delta(a)}.$$

В доказательстве Фукса весьма существенную роль играла оценка величины $S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ $\Big($растущей, вообще говоря, гораздо быстрее, чем $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)\Big)$. Эта оценка давалась следующей теоремой:

Теорема А. (Фукс [2]). *Пусть $g(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ. Положим*

$$p=\max(2, \lambda).$$

Справедливо соотношение

$$\varliminf_{r\to\infty}[T(r, g)]^{-1}\, rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\leqslant C_1p+C_2\varkappa p\ln p. \tag{1.2}$$

В недавней заметке [3] И. В. Островский и И. В. Казакова получили следующую оценку для $S\left(r, \frac{g'}{g}\right)$, дополняющую результат Фукса.

Теорема Б. *Пусть $g(z)$ — мероморфная функция порядка ρ, $0\leqslant\rho<1$. Справедливо соотношение*

$$\varliminf_{r\to\infty}[N(r)]^{-1}rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\leqslant C_3\rho^2\operatorname{cosec}\pi\rho, \tag{1.3}$$

где $C_3=4{,}4$.

Основным результатом нашей работы является

Теорема 1. *Пусть ρ и λ — соответственно порядок* и нижний порядок мероморфной функции $g(z)$. Тогда*

$$\varliminf_{r\to\infty}[N(r)]^{-1}rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\leqslant C_3\min_{\lambda\leqslant x\leqslant\rho}\{x^2|\operatorname{cosec}\pi x|\}. \tag{1.4}$$

Оценка (1.4) содержит оценку (1.3).

* ρ может равняться $+\infty$.

Отметим, что если $\rho > \lambda$ или $\rho = \lambda$ и ρ — нецелое, то из оценки (1.4) и элементарного неравенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ f(x)\,dx \leqslant \ln^+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\right) + \ln 2$$

вытекает следующая оценка для $m\left(r, \frac{g'}{g}\right)$, справедливая для некоторой последовательности значений $r = r_k$, $\{r_k\} \uparrow \infty$

$$m\left(r, \frac{g'}{g}\right) = \ln^+ \frac{N(r)}{r} + O(1).$$

Эта оценка дополняет оценку (1.1).

В доказательстве теоремы 1 мы использовали некоторые приемы Б. Чельберга [4], А. Эдрея и В. Фукса [5], И. В. Островского [8].

Доказательство теоремы 1 мы изложим в § 2. § 3 посвящен приложениям этого результата к оценке $\sum\limits_{(a)} \sqrt{\delta(a)}$ и $\sum\limits_{(a)} \delta(a)$. В § 4 мы покажем, что оценка (1.4) в известной мере близка к наилучшей.

§ 2. Для доказательства теоремы 1 нам необходимо ввести некоторые обозначения и установить несколько вспомогательных соотношений.

Рассмотрим, следуя Эдрею и Фуксу [5], функцию

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - 1|}, \qquad (0 < r < +\infty).$$

Эдрей и Фукс показали [5], что при $0 < \sigma < 1$ для $\Phi(r)$ имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} r^{-\sigma}\Phi(r)\,dr = J(\sigma),$$

где

$$J(\sigma) = \frac{\pi^2 \operatorname{cosec} \pi\sigma}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4} + \frac{1-2\sigma}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1-2\sigma}{4}\right)} \leqslant 4{,}4 \operatorname{cosec} \pi\sigma. \qquad (2.1)$$

Условимся через $\{c_k\}$ обозначать объединенную последовательность, состоящую из нулей $\{a_k\}$ и полюсов $\{b_l\}$ мероморфной функции $g(z)$. Не нарушая общности, можно считать, что $g(0) = 1$.

Лемма 1. (Ср. лемма 1 [8]). *Пусть $g(z)$, $g(0) = 1$, — мероморфная функция с нулями $\{a_k\}$ и полюсами $\{b_l\}$; $q \geqslant 0$ — заданное целое число. При любом $R > 0$ имеет место соотношение*

$$z\frac{g'(z)}{g(z)}=\sum_{|a_k|<R}\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^{q+1}}{\frac{z}{a_k}-1}-\sum_{|b_l|<R}\frac{\left(\frac{z}{b_l}\right)^{q+1}}{\frac{z}{b_l}-1}+z\lambda_R(z), \tag{2.2}$$

где при $|z|\, r\leqslant\frac{R}{2}$

$$|z\lambda_R(z)|\leqslant C_4\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(2R)+C_5r^q. \tag{2.3}$$

Доказательство. Известно [1], что для мероморфной функции $g(z)$ при $|z|<R$ имеет место представление

$$\ln g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(Re^{i\theta})|\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta+$$

$$+\sum_{|b_l|<R}\ln\frac{R^2-\bar b_l z}{R(z-b_l)}-\sum_{|a_k|<R}\ln\frac{R^2-\bar a_k z}{R(z-a_k)}.$$

Дифференцируя $q+1$ раз по z, получим

$$\frac{d^{q+1}}{dz^{q+1}}\ln g(z)=\sum_{|a_k|<R}\frac{(-1)^q q!}{(z-a_k)^{q+1}}-\sum_{|b_l|<R}\frac{(-1)^q q!}{(z-b_l)^{q+1}}+K_R(z), \tag{2.4}$$

где

$$K_R(z)=q!\sum_{|a_k|<R}\left(\frac{\bar a_k}{R^2-\bar a_k z}\right)^{q+1}-q!\sum_{|b_l|<R}\left(\frac{\bar b_l}{R^2-\bar b_l z}\right)^{q+1}+$$

$$+\frac{(q+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(Re^{i\theta})|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^{q+2}}d\theta.$$

При $|z|=r\leqslant\frac{R}{2}$ находим

$$|K_R(z)|\leqslant q!2^{q+1}R^{-q-1}n(R,0)+q!2^{q+1}R^{-q-1}n(R,\infty)+$$

$$+(q+1)!2^{q+3}R^{-q-1}2T(R)=q!2^{q+1}R^{-q-1}n(R)+(q+1)!2^{q+4}R^{-q-1}T(R). \tag{2.5}$$

Для $n(R)$ имеем оценку

$$n(R)\ln 2\leqslant\int_0^R\ln^+\frac{2R}{t}dn(t)\leqslant\int_0^{2R}\ln^+\frac{2R}{t}dn(t)=N(2R)\leqslant T(2R). \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует неравенство

$$|K_R(z)|\leqslant C_6\, q!\, R^{-q-1}T(2R).$$

Интегрируя обе части равенства (2.4) q раз в пределах от 0 до z, находим

$$\frac{g'(z)}{g(z)} - P_{q-1}(z) = \sum_{|a_k|<R} \frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^q}{z-a_k} - \sum_{|b_l|<R} \frac{\left(\frac{z}{b_l}\right)^q}{z-b_l} + K_R^1(z),$$

где

$$|K_R^1(z)| \leqslant C_6 r^q R^{-q-1} T(2R), \tag{2.7}$$

а $P_{q-1}(z)$ — полином степени не выше $q-1$.

Поэтому

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{|a_k|<R} \frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^{q+1}}{\frac{z}{a_k}-1} - \sum_{|b_l|<R} \frac{\left(\frac{z}{b_l}\right)^{q+1}}{\frac{z}{b_l}-1} + zK_R^1(z) + P_q(z).$$

Обозначая

$$zK_R^1(z) + P_q(z) = z\lambda_R(z)$$

и используя оценку (2.7), получаем утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Для мероморфной функции $g(z)$, удовлетворяющей условиям леммы 1, имеет место неравенство*

$$rS\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leqslant \int_0^R \left(\frac{r}{t}\right)^q \Phi\left(\frac{t}{r}\right) dn(t) + C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1} T(2R) + C_8 r^q, \tag{2.8}$$

где $r \leqslant \frac{R}{2}$, $R > 0$.

Доказательство. Из соотношения (2.2) находим

$$rS\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leqslant \sum_{|c_k|<R} \left(\frac{r}{|c_k|}\right)^{q+1} \Phi\left(\frac{r}{|c_k|}\right) + C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1} T(2R) +$$

$$+ C_8 r^q = \int_0^R \left(\frac{r}{t}\right)^{q+1} \Phi\left(\frac{r}{t}\right) dn(t) + C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1} T(2R) + C_8 r^q =^*$$

$$= \int_0^R \left(\frac{r}{t}\right)^q \Phi\left(\frac{t}{r}\right) dn(t) + C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1} T(2R) + C_8 r^q.$$

Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству теоремы 1 для случая, когда $\lambda < \rho$. Выберем в (2.8) $q = [x]$, где x — любое нецелое число, удовлетворяющее неравенству

$$\lambda < x < \rho.$$

Тогда

* Используется тождество $t\Phi(t) \equiv \Phi\left(\frac{1}{t}\right)$.

$$\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr \leqslant \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{q-x-1}\int\limits_0^R t^{-q}\Phi\left(\frac{t}{r}\right) dn(t)\, dr +$$

$$+ C_9 \frac{T(2R)}{R^x} + \frac{C_8}{(x-q)\, r_0^{x-q}}. \tag{2.9}$$

Обозначим через I повторный интеграл в (2.9). Мы имеем

$$I = \int\limits_0^R t^{-q}\, dn(t) \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{q-x-1}\Phi\left(\frac{t}{r}\right) dr.$$

Производя замену $r = ts$, находим

$$I = \int\limits_0^R t^{-x} dn(t) \int\limits_{\frac{r_0}{t}}^{\frac{R}{2t}} s^{q-x-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right) ds \leqslant \int\limits_0^{\infty} s^{q-x-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right) ds \int\limits_0^R t^{-x}\, dn(t).$$

Интегрирование по частям второго интеграла справа дает

$$\int\limits_0^R t^{-x}\, dn(t) = \frac{n(R)}{R^x} + x\frac{N(R)}{R^x} + x^2\int\limits_0^R N(s)\, s^{-x-1} ds,$$

поэтому

$$I \leqslant \left\{\frac{n(R)}{R^x} + x\frac{N(R)}{R^x} + x^2\int\limits_0^R N(s)\, s^{-x-1}\, ds\right\}\int\limits_0^{\infty} s^{q-x}\Phi(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \left\{x^2 \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} N(s)\, s^{-x-1} ds + \frac{n(R)}{R^x} + C_{10}\frac{N(R)}{R^x} + O(1)\right\} J(x-q) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{x^2 \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} N(s)\, s^{-x-1} ds + C_{11}\frac{T(2R)}{R^x} + O(1)\right\} J(x-q).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr \leqslant x^2 J(x-q)\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}N(r)\, dr +$$

$$+ C_{12}\frac{T(2R)}{R^x} + O(1).$$

и

$$\frac{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\}dr}{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}N(r)\,dr} \leqslant x^2 J(x-q) + \frac{C_{12}R^{-x}\,T(2R) + O(1)}{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}N(r)\,dr}. \tag{2.10}$$

Так как $x < \rho$, то при $R \to \infty$

$$\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}N(r)\,dr \to +\infty.$$

Так как $\lambda < x$, то найдется последовательность $\{R_i\} \uparrow \infty$, такая, что

$$R_i^{-x}T(2R_i) \to 0.$$

Следовательно, устремляя в (2.10) $R \to \infty$ по этой последовательности $\{R_i\} \uparrow \infty$, находим

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\}dr}{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}N(r)\,dr} \leqslant x^2 J(x-q).$$

Поэтому

$$\varliminf_{r \to \infty} [N(r)]^{-1}\, rS\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leqslant x^2 J(x-q).$$

Учитывая неравенство (2.1), мы получаем (1.4).

Для завершения доказательства теоремы 1 остается рассмотреть случай, когда мероморфная функция $g(z)$ имеет регулярный рост, т. е. $\lambda = \rho$, причем ρ — нецелое.

Установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Если $g(z)$ — мероморфная функция нецелого порядка $\rho < +\infty$ и $\rho < \gamma < \rho + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то*

$$\varlimsup_{t \to \infty} t^{2\varepsilon}\left\{\sum_{|c_k| \geqslant t} \frac{1}{|c_k|^{\gamma}}\right\} = \varlimsup_{t \to \infty} t^{2\varepsilon}\int\limits_t^{\infty} \frac{dn(s)}{s^{\gamma}} = +\infty.$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы неверно.

Тогда

$$\int\limits_t^{\infty} \frac{dn(s)}{s^{\gamma}} \leqslant \frac{C_{13}}{t^{2\varepsilon}}, \quad 0 < C_{13} < \infty,$$

и

$$\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\int_{t}^{\infty}\frac{dn(s)}{s^{\gamma}} \leqslant \frac{C_{13}}{t^{1+\varepsilon}}.$$

Поэтому при достаточно большом $N > N_0$ будем иметь

$$\int_{1}^{N}\frac{dt}{t^{1-\varepsilon}}\int_{t}^{\infty}\frac{dn(s)}{s^{\gamma}} \leqslant \frac{C_{13}}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

С другой стороны,

$$\int_{1}^{N}\frac{dt}{t^{1-\varepsilon}}\int_{t}^{\infty}\frac{dn(s)}{s^{\gamma}} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{ t^{\varepsilon}\int_{t}^{\infty}\frac{dn(s)}{s^{\gamma}}\Bigg|_{1}^{N} + \int_{1}^{N}\frac{dn(s)}{s^{\gamma-\varepsilon}}\right\}.$$

Так как $\gamma-\varepsilon<\rho$, то при $N\to\infty$

$$\int_{1}^{N}\frac{dn(s)}{s^{\gamma-\varepsilon}}\to\infty,$$

поэтому получаем противоречие с неравенством (2.11). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь мероморфную функцию $g(z)$ нецелого порядка ρ. Не уменьшая общности, можно считать, что $g(z)$ имеет вид

$$g(z) = e^{P_p(z)}\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_k}, p\right)}{\prod\limits_{l=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{b_l}, p\right)},$$

где $P_p(z)$ — полином степени не выше $p=[\rho]$.

Очевидно, при всех $r>r_0$ имеет место неравенство

$$rS\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leqslant C_{14}r^{p} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|c_k|}\right)^{p+1}\Phi\left(\frac{r}{|c_k|}\right).$$

Выберем $\rho<\gamma<\rho+\varepsilon$, тогда предыдущее неравенство дает

$$r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} \leqslant r^{-\gamma-1}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p}\frac{r}{t}\Phi\left(\frac{r}{t}\right)dn(t) + C_{14}r^{p-\gamma-1} =$$

$$= r^{-\gamma-1}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{r}{t}\right)^{p}\Phi\left(\frac{t}{r}\right)dn(t) + C_{14}r^{p-\gamma-1}.$$

Поэтому

$$\int_{x}^{\infty} r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\}dr \leqslant \int_{x}^{\infty} r^{p-\gamma-1}\int_{0}^{\infty} t^{-p}\Phi\left(\frac{t}{r}\right)dn(t)\,dr +$$

$$+ C_{14}(\gamma-p)^{-1}x^{p-\gamma}. \tag{2.12}$$

Обозначим через I повторный интеграл в (2.12). Мы находим, производя замену $r=ts$

$$I=\int\limits_0^\infty t^{-p}dn(t)\int\limits_x^\infty r^{p-\gamma-1}\Phi\left(\frac{t}{r}\right)dr=\int\limits_0^\infty t^{-p}\,dn(t)\int\limits_{\frac{x}{t}}^\infty t^{p-\gamma}s^{p-\gamma-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)ds=$$

$$=\int\limits_0^\infty t^{-\gamma}dn(t)\int\limits_{\frac{x}{t}}^\infty s^{p-\gamma-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)ds.$$

Введем следующие обозначения

$$G(t)=\int\limits_t^\infty s^{p-\gamma-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)ds,$$

$$F(t)=\int\limits_t^\infty s^{-\gamma}dn(s).$$

Производя интегрирование по частям в последнем интеграле, находим

$$F(t)=-\frac{n(t)}{t^\gamma}-\gamma\frac{N(t)}{t^\gamma}+\gamma^2\int\limits_t^\infty N(s)\,s^{-\gamma-1}\,ds. \tag{2.13}$$

Кроме того, для I имеем

$$I=-\int\limits_0^\infty G\left(\frac{x}{t}\right)dF(t)=-F(t)\,G\left(\frac{x}{t}\right)\Big|_0^\infty+$$

$$+\int\limits_0^\infty F(t)\left(\frac{x}{t}\right)^{p-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dt}{t}=\int\limits_0^\infty F(t)\left(\frac{x}{t}\right)^{p-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dt}{t}. \tag{2.14}$$

В силу леммы 3 существует последовательность $\{x_l\}\uparrow\infty$, что

$$t^{2\varepsilon}F(t)\leqslant x_l^{2\varepsilon}F(x_l)\quad\text{при}\quad t\leqslant x_l \tag{2.15}$$

и, так как $F(t)$ монотонно убывает, то

$$F(t)\leqslant F(x_l)\quad\text{при}\quad t\geqslant x_l. \tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.15) и (2.16) находим

$$I\leqslant F(x_l)\left\{\int\limits_0^{x_l}\left(\frac{x_l}{t}\right)^{2\varepsilon+p-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x_l}\right)\frac{dt}{t}+\int\limits_{x_l}^\infty\left(\frac{x_l}{t}\right)^{p-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x_l}\right)\frac{dt}{t}\right\}=$$

$$=F(x_l)\left\{\int\limits_0^1 u^{\gamma-p-2\varepsilon-1}\Phi(u)\,du+\int\limits_1^\infty u^{\gamma-p-1}\Phi(u)\,du\right\}=F(x_l)\,A(\varepsilon).$$

Положив в (2.12) $x = x_l$, получим

$$\int_{x_l}^{\infty} r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr \leqslant F(x_l) A(\varepsilon) + C_{15} x_l^{p-\gamma}. \tag{2.17}$$

Из (2.15) и леммы 3 находим, что

$$\lim_{x_l \to \infty} x_l^{2\varepsilon} F(x_l) = +\infty,$$

поэтому при $x_l > x_0$

$$[F(x_l)]^{-1} \leqslant x_l^{2\varepsilon}$$

и

$$x_l^{p-\gamma} [F(x_l)]^{-1} \leqslant x_l^{p-\gamma+2\varepsilon} \to 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, из (2.13), (2.17) и (2.18) следует неравенство

$$\varlimsup_{x \to \infty} \frac{\int_x^{\infty} r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr}{\int_x^{\infty} r^{-\gamma-1} N(r)\, dr} \leqslant \gamma^2 A(\varepsilon),$$

т. е.

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)}{N(r)} \leqslant \gamma^2 A(\varepsilon).$$

Устремляя $\varepsilon \to \infty$, мы получим

$$\gamma^2 A(\varepsilon) \to \rho^2 \int_0^{\infty} u^{\rho-p-1} \Phi(u)\, du = \rho^2 J(p+1-\rho).$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. При помощи оценки величины $S\left(r, \frac{g'}{g}\right)$, даваемой теоремой А, Фукс [2] получил следующий результат.

Теорема В. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, $p = \max(2, \lambda)$. Тогда для дефектов мероморфной функции $f(z)$ имеет место неравенство*

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant C_{16} \sqrt{p \ln p}.$$

Используя нашу теорему 1, мы сейчас получим теорему, усиливающую этот результат при малых λ.

Теорема 2. *Пусть ρ и λ — соответственно порядок и нижний порядок мероморфной функции $f(z)$. Если $f(z)$ обладает по меньшей мере двумя дефектными значениями, то ее дефекты должны удовлетворять неравенству*

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant C_{17} \min_{\lambda \leqslant x \leqslant \rho} x \sqrt{|\operatorname{cosec} \pi x|} \qquad (C_{17} = 10{,}6). \tag{3.1}$$

Доказательство. Мы будем опираться на следующий результат Фукса [2].

Теорема Г. *Если $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка—обладает по меньшей мере двумя дефектными значениями, то имеет место соотношение*

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant \sqrt{2\pi \varliminf_{r \to \infty} [T(r, f)]^{-1} r S\left(r, \frac{f''}{f'}\right)}. \tag{3.2}$$

Из неравенства (3.2) находим

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant \sqrt{2\pi \varliminf_{r \to \infty} [T(r, f)]^{-1} r S\left(r, \frac{f''}{f'}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi\varkappa \varliminf_{r \to \infty} [N(r, f)]^{-1} r S\left(r, \frac{f''}{f'}\right)}. \tag{3.3}$$

Положив теперь в (1.4) $g(z) = f'(z)$ и заметив, что

$$N(r, f') \leqslant 2N(r, f),$$

получим неравенство

$$\varliminf_{r \to \infty} [N(r, f)]^{-1} r S\left(r, \frac{f''}{f'}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{r \to \infty} [N(r, f')]^{-1} r S\left(r, \frac{f''}{f'}\right) \varlimsup_{r \to \infty} N(r, f') [N(r, f)]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2 C_3 \min_{\lambda' \leqslant x \leqslant \rho'} [x^2 |\operatorname{cosec} \pi x|], \tag{3.4}$$

где λ' — нижний порядок мероморфной функции $f'(z)$, ρ' — ее порядок.

Как известно, при $r > r_0$ имеют место следующие неравенства [6] (стр. 52):

$$\ln T(r, f') \leqslant \ln T(kr, f) + C_{18},$$

$$\ln T(r, f) \leqslant \ln T(kr, f') + C_{19},$$

где $k > 1$. Из этих неравенств следует, что $\rho' = \rho$, $\lambda' = \lambda$. Теорема доказана.

Из неравенства (3.1) вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если мероморфная функция $f(z)$ обладает по крайней мере двумя дефектными значениями, то ее дефекты должны удовлетворять неравенству*

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant C_{20} \min_{\lambda \leqslant x \leqslant \rho} x^2 |\operatorname{cosec} \pi x| \qquad (C_{20} = 112{,}4). \tag{3.5}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant \left(\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)}\right)^2.$$

Из второй основной теоремы Неванлинна следует, что величины дефектов мероморфной функции удовлетворяют условию

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant 2.$$

При $\lambda \leqslant 0{,}03$ правая часть (3.5) строго меньше 2.

Наша теорема 3 является усилением следующей теоремы, недавно полученной Эдреем и Фуксом [7]:

Теорема Д. *Если мероморфная функция конечного порядка* ρ, $0 \leqslant \rho < \frac{1}{2}$ *обладает по крайней мере двумя дефектными значениями, то*

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant C_{21} \sin \frac{\pi\rho}{2},$$

где C_{21} — *абсолютная постоянная.*

§ 4. Следующий пример дает возможность проверить точность оценки (1.4). Пусть $\rho > 0$ — нецелое число.

Рассмотрим каноническое произведение

$$h(z, \rho) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{k^{\frac{1}{\rho}}}; p\right) \quad p = [\rho],$$

где $E(u, p)$ — канонический множитель Вейерштрасса рода p. В плоскости с разрезом по лучу от -1 до $-\infty$ выберем ту ветвь $\ln h(z, \rho)$, которая равна 0 при $z = 0$. Мы имеем

$$\ln h(z, \rho) = (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{n(t) z^{p+1}}{t^{p+1}(z+t)} dt.$$

Отсюда

$$\frac{h'(z, \rho)}{h(z, \rho)} = (-1)^p z^p \int_1^{\infty} \frac{n(t)\,[pz + (p+1)t]}{t^{p+1}(z+t)^2} dt.$$

Найдем асимптотику последнего выражения в угле

$$V = \{|\arg z| \leqslant \pi - \delta\}, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Учитывая, что в угле V имеет место неравенство

$$|z + t| \geqslant \frac{\sin \delta}{2}(r + t) \quad (z = re^{i\theta},\ t \geqslant 0)$$

и что $|n(t) - t^{\rho}| < 1$, мы имеем оценки

$$\left|\frac{h'(z, \rho)}{h(z, \rho)} - (-1)^p z^p \int_1^{\infty} \frac{t^{\rho}\,[pz + (p+1)t]}{t^{p+1}(z+t)^2} dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4(p+1) r^p}{\sin^2 \delta} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{p+1}(t+r)} = O(|z|^{p-1}), \qquad (4.1$$

$$\left| z^p \int_0^1 \frac{t^\rho [pz + (p+1)t]}{t^{p+1}(t+z)^2} dt \right| < \frac{4(p+1)r^p}{\sin^2\delta} \int_0^1 \frac{dt}{t^{p+1-\rho}(t+r)} <$$

$$\leqslant \frac{4(p+1)r^{p-1}}{\sin^2\delta} \int_0^1 \frac{dt}{t^{p+1-\rho}} = O(|z|^{p-1}). \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) следует равенство

$$\frac{h'(z,\rho)}{h(z,\rho)} = (-1)^p z^p \int_0^\infty \frac{pz+(p+1)t}{t^s(z+t)^2} dt + O(|z|^{p-1}),$$

где

$$s = p+1-\rho, \quad 0 < s < 1, \quad z \in V.$$

Замечая, что

$$(-1)^p z^p \int_0^\infty \frac{pz+(p+1)t}{t^s(z+t)^2} dt = (-1)^p \pi\rho \operatorname{cosec} \pi(\rho - p) z^{\rho-1} =$$

$$= \pi\rho \operatorname{cosec} \pi\rho \, z^{\rho-1},$$

получаем

$$z\frac{h'(z,\rho)}{h(z,\rho)} = \pi\rho \operatorname{cosec} \pi\rho \, z^\rho + O(|z|^p) \quad (z \in V). \tag{4.3}$$

Для величины $N(r, 0) = N(r)$ мы имеем соотношение

$$\left| N(r) - \int_1^r t^{\rho-1} dt \right| = \left| \int_1^r \frac{n(t) - t^\rho}{t} dt \right| \leqslant \int_1^r \frac{dt}{t} = \ln r.$$

Поэтому

$$N(r) = \frac{r^\rho}{\rho} + O(\ln r). \tag{4.4}$$

Учитывая (4.3) и (4.4), находим

$$\varliminf_{r\to\infty} [N(r)]^{-1} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{h'(re^{i\theta},\rho)}{h(re^{i\theta},\rho)} \right| d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{r\to\infty} [N(r)]^{-1} \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \left| \frac{h'(re^{i\theta},\rho)}{h(re^{i\theta},\rho)} \right| d\theta = (\pi - \delta)\rho^2 |\operatorname{cosec} \pi\rho|.$$

Так как это последнее соотношение справедливо при любом $\delta > 0$, то

$$\varliminf_{r\to\infty} [N(r)]^{-1} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{h'(re^{i\theta},\rho)}{h(re^{i\theta},\rho)} \right| d\theta \geqslant \pi\rho^2 |\operatorname{cosec} \pi\rho|.$$

Полученное неравенство показывает, что оценка (1.4) близка к точной. Действительно, из (1.4) находим

$$\varliminf_{r\to\infty}[N(r)]^{-1}\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{h'(re^{i\theta},\rho)}{h(re^{i\theta},\rho)}\right|d\theta\leqslant 4{,}4\rho^2|\operatorname{cosec}\pi\rho|.$$

Выражаю глубокую благодарность И. В. Островскому за ценные замечания.

Харьковский государственный университет

Поступила 1 VII 1963

Վ. Պ. Պետրենկո

ՄԵՐՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է։

Դիցուկ $f(z)$-ը ρ կարգի և λ ստորին կարգի մերոմորֆ ֆունկցիա է։ Այն դեպքում

$$\varliminf_{r\to\infty}[N(r,0)+N(r,\infty)]^{-1}\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|d\theta\leqslant 4{,}4\min_{\lambda\leqslant x\leqslant\rho}\{x^2|\operatorname{cosec}\pi x|\}.$$

Այս թեորեմը λ-ի փոքր արժեքների դեպքում ուժեղացնում է [2]-ում և [3]-ում ստացված արդյունքը։

Որպես կիրառումներ ստացված են

$$\sum_{(a)}\delta(a)\leqslant 112{,}4\min_{\lambda\leqslant x\leqslant\rho}x^2|\operatorname{cosec}\pi x|,$$

$$\sum_{(a)}\sqrt{\delta(a)}\leqslant 10{,}6\min_{\lambda\leqslant x\leqslant\rho}x\sqrt{|\operatorname{cosec}\pi x|},$$

գնահատականները, որոնք ճիշտ են երկուսից ոչ պակաս դեֆեկտային արժեքներ ունեցող, ρ կարգի և λ ստորին կարգի ամեն մի մերոմորֆ ֆունկցիայի համար։ Այդ գնահատականները փոքր λ-ների համար ավելի ճշգրիտ են, քան [2], [3] և [7] աշխատություններում բերվածները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nevanlinna R.* Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris, 1929.
2. *Fuchs W. H. J.* A Theorem on the Nevanlinnas Deficiencies of Meromorphic Functions of Finite Order. Ann. of Math., **68**, № 2, 1958, 203—209.
3. *Островский И. В.* и *Казакова И. В.* Замечание о дефектах мероморфных функций малого порядка. Записки мех.-мат. фак. ХГУ и ХМО, **30**, 1963, 73—78.

4. *Kjellberg B.* On the Minimum Modulus of Entire Functions of Lower Order less than one. Math. Scand., **8**, 1960, 189—197.
5. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* On the Growth of Meromorphic Functions with Several Deficient Values. Trans. Amer. Math. Soc., **93**, № 2, 1959, 292—328.
6. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Физматгиз, М., 1960.
7. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* On the Deficiencies of Meromorphic Functions of Order less than one. Duke. Math. J., **27**, 1960, 233—240.
8. *Островский И. В.* К одной задаче из теории распределения значений, ДАН СССР, **151**, № 1, 1963, 34—37.