

С. Е. Карапетян

Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (III)

В в е д е н и е

Эта работа является продолжением работ [1, 2]. В первом параграфе излагается выбор подвижного репера семейства плоскостей.

Во втором параграфе методом Г. Ф. Лаптева найдена одна важная инвариантная трilinearная форма, связанная с первой дифференциальной окрестностью, и выяснен ее геометрический смысл. Эта форма оказалась тесно связанной с тремя известными (см. [1, 2]) инвариантными билинейными системами. Фактически эта работа и работы [1, 2] посвящены исследованию инвариантной трilinearной формы.

В §§ 2–10 дается приложение всех этих результатов к теории многомерных поверхностей. Здесь получается много новых результатов. Кроме того, старые результаты получают новое содержание.

Параграфы 11 и 12 посвящены дифференциальным окрестностям высоких порядков. Каждая дифференциальная окрестность обладает одной или несколькими инвариантными трilinearными формами, исследование которых не отличается существенно от предыдущих исследований.

В § 13 дается общий принцип отображения многомерной проективной геометрии на множества различных образов другой проективной или непроективной геометрии. Доказывается изоморфизм этих двух геометрий.

В § 14 приводятся несколько примеров такого изоморфизма. В частности, здесь излагается так называемая проективная геометрия сфер и окружностей евклидова пространства.

§ 1. Выбор подвижного репера

Как известно [1, 2], дифференциальные уравнения семейства d -мерных плоскостей пишутся в виде

$$\omega_i^p = a_{\alpha}^p du^{\alpha}, \quad i = 0 \cdots d, \quad p = d + 1 \cdots n, \quad \alpha = 1 \cdots a. \quad (1.1)$$

Внешнее дифференцирование этой системы приводит к квадратичным уравнениям

$$[da_{ix}^p + a_{ix}^q \omega_q^p - a_{jx}^p \omega_i^j, du^x] = 0; \quad i, j = 0, \dots, d; \quad p, q = d+1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Вариация коэффициентов a_{ix}^p определяется системой

$$\delta a_{ix}^p = a_{jx}^p \pi_i^j - a_{ix}^q \pi_q^p, \quad (1.3)$$

где $\pi_\alpha^\beta (\alpha, \beta = 0, \dots, n)$ — значения форм ω_α^β при фиксации главных параметров.

Так как первые $d+1$ вершины подвижного репера лежат на d -плоскости семейства, то касательное подпространство над этой плоскостью определяется грасмановым произведением [1]

$$(A_0 \dots A_d, a_{0i}^p A_p, \dots, a_{di}^p A_p, \dots, a_{da}^p A_p) \quad (1.4)$$

или системой уравнений $X_i = 0, a_{ix}^p X_p = 0$, где X_α — тангенциальные координаты текущей гиперплоскости. (1.4) показывает, что миноры высшего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} E_{d+1} & 0 \\ 0 & a_{ix}^p \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

являются грасмановыми координатами касательного подпространства.

Как известно [1], размерность касательного подпространства всегда равна $d+r(a_{ix}^p)$. Полагая n достаточно большим, получим для этой размерности число $d+a(d+1)$. Выбрав первые $d+a(d+1)+1$ вершины репера в касательном подпространстве, получим

$$a_{ix}^p = 0, \quad p = d+a(d+1)+1, \dots, n, \quad (1.6)$$

и, в силу (1.6), нижняя матрица (1.5) будет квадратной, т. е. касательное подпространство будет иметь только одну отличную от нуля координату $|a_{ix}^p|$. Ради сохранения общности, мы пока не будем пользоваться системой (1.6).

§ 2. Инвариантная трilinearная форма дифференциальной окрестности первого порядка

Рассмотрим три произвольных объекта: точку x^i d — плоскости семейства, гиперплоскость X_p , проходящую через эту плоскость, и однопараметрическое подсемейство du^x нашего семейства. Методом Г. Ф. Лаптева [3] нетрудно доказать, что трilinearная форма

$$\Phi \equiv a_{ix}^p x^i X_p du^x \quad (2.1)$$

является относительно-инвариантной формой, т. е.

$$\delta \Phi = \theta \Phi.$$

Следовательно, обращение формы (2.1) в нуль устанавливает геометрическую связь между этими тремя объектами. Для выяснения геометрического смысла уравнения $\Phi = 0$ рассмотрим касательную в

точке x^i плоскость $d+1$ -мерной поверхности du^x (точечное многообразие, образованное однопараметрическим подсемейством d -мерных плоскостей, является $d+1$ -поверхностью). Эта плоскость определяется точками $A_0 \dots A_d$, $x^i \in A_p$ и принадлежит гиперплоскости $X_p a^p$ ($p = d+1 \dots n$), удовлетворяющей одному уравнению

$$\Phi = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, получается

Теорема 2.1. Если заданы точка $x^i A_i$ и перемещение du^x , то $a^p_{ix} x^i X_p du^x = 0$ определяет касательную в точке x^i $d+1$ -мерную плоскость $d+1$ -мерной поверхности du^x .

Так как $(a^{d+1} \dots a^n, df)$, где $(f = X_p a^p)$ определяет $d-1$ -мерное подпространство d -мерной плоскости, а уравнение этого подпространства также записывается в виде (2.2), то справедлива и следующая

Теорема 2.2. Если заданы гиперплоскость $X_p a^p$ и перемещение du^x , то $a^p_{ix} x^i X_p du^x = 0$ определяет такое $d-1$ -мерное подпространство d -мерной плоскости, в каждой точке которого касательная $d+1$ -плоскость $d+1$ -поверхности du^x принадлежит данной гиперплоскости.

Точно так же доказывается

Теорема 2.3 Если заданы точка $x^i A_i$ и гиперплоскость $X_p a^p$, то $a^p_{ix} x^i X_p du^x = 0$ определяет такое $a-1$ -мерное подсемейство нашего семейства, касательная в точке x^i $d+1$ -плоскость каждого 1-подсемейства которого принадлежит гиперплоскости X_p .

Наконец, мы здесь дадим четвертую (наиболее ясную) трактовку уравнения (2.2).

Теорема 2.4. Точка $x^i A_i$, гиперплоскость $X_p a^p$ и перемещение du^x удовлетворяют уравнению $a^p_{ix} x^i X_p du^x = 0$ тогда и только тогда, когда касательная в точке x^i плоскость $d+1$ -поверхности du^x принадлежит гиперплоскости X_p , или, когда фокальное в гиперплоскости X_p $d-1$ -подпространство перемещения du^x содержит точку x^i [1, 2].

Эта теорема дает два необходимых и достаточных условия для выполнения (2.2).

В дальнейшем, если тройка объектов $(x^i, X_p$ и $du^x)$ удовлетворяет инвариантному соотношению (2.2), то она называется сопряженной тройкой.

Три билинейные системы

$$a^p_{ix} x^i du^x = 0, \quad a^p_{ix} x^i X_p = 0, \quad a^p_{ix} X_p du^x = 0 \quad (2.3)$$

получаются из (2.2) приравниванием нулю всех коэффициентов соответственно при X_p , du^x и x^i .

Решение первой системы (2.3) означает, что в семействе существующих такие точки x^i и перемещения du^i , которые образуют сопряженную тройку с любой гиперплоскостью X_p . Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных двух систем.

Исследование систем (2.3) изложено в работах [1, 2].

Теперь приведем ряд примеров из известных семейств трехмерного пространства и рассмотрим форму (2.2) для каждого из них.

(I) Для линейчатой поверхности уравнение (2.2) пишется в виде $a_{ii}^p x^i X_p du^i = 0$, что кроме $du^i = 0$ дает еще $a_{ii}^p x^i X_p = 0$. Последнее соотношение устанавливает известное соответствие между x^i -точкой луча и X_p -касательной в этой точке плоскости поверхности. Причем, в этом соответствии один из объектов (точку или гиперплоскость) можно задавать произвольно, после чего второй объект определяется однозначно.

(II) Для линейчатой конгруэнции равенство (2.2) приводит к результату: в сопряженной тройке два объекта задаются вполне произвольно, после чего третий объект определяется однозначно. Решение систем (2.3) дает фокусы, фокальные направления и фокальные плоскости конгруэнции.

(III) Для комплекса прямых трехмерного пространства теоремы 2.1, 2.2 и 2.3 приведут к тривиальным результатам. Первая и третья системы (2.3) после решения дают развертывающиеся поверхности, их точки возврата и касательные плоскости. Вторая система (2.3) для комплекса не имеет решения.

Приложение этих теорем к семействам четырехмерного пространства дает более интересные результаты, на которых мы здесь останавливаться не будем (см. [4, 5]).

§ 3. Приложение к теории многомерных поверхностей

Рассмотрим некоторые частные случаи приложения вышеуказанных результатов. Пусть $d=0$, тогда наше семейство становится d -мерной поверхностью, а уравнение (2.2) пишется в виде $a_{ii}^p X_p du^i = 0$ и устанавливает соответствие между направлениями du^i поверхности и гиперплоскостями X_p , проходящими через точку поверхности. Для каждого направления du^i получается одно уравнение между X_p , которое в силу теоремы 2.1 дает касательную прямую этого направления. Наоборот, если задана произвольная гиперплоскость X_p , то то же самое уравнение устанавливает одну связь между параметрами du^i , т. е. определяет одно $a-1$ -мерное подмногообразие (неголономное) нашей поверхности, касательная плоскость которой принадлежит гиперплоскости X_p .

Касательная плоскость поверхности определяется из того же уравнения, если в нем полагать все коэффициенты при du^i равными нулю: $a_{ii}^p X_p = 0$ ($p = 1 \dots n$). Располагая первые вершины $A_1 \dots A_a$ в касательной плоскости, получим $\omega_0^p = 0$ или $a_{0a}^p = 0$ ($p = a + 1 \dots n$).

Теперь мы продолжаем изучать ту же поверхность, но с новой точки зрения: ее мы рассматриваем как геометрическое место своих касательных плоскостей ($d = a$). Следовательно, здесь можно применить всю теорию семейств многомерных плоскостей.

Итак, предположим, что наша поверхность (A_0) тангенциально не вырождается, т. е. ее касательная плоскость зависит ровно от a параметров, а это значит, что мы имеем a -параметрическое 0 -фокальное семейство a -мерных плоскостей.

Как известно, уравнение поверхности для такого репера пишется в виде

$$\omega_0^p = 0, \quad \omega_i^p = a_{ij}^p \omega^j, \quad a_{ij}^p = a_{ji}^p, \quad \omega_0^i \equiv \omega^i; \quad i, j = 1 \dots d, \quad p = d + 1 \dots n. \quad (3.1)$$

В дальнейшем вместо независимых неизвестных du^x мы будем брать ω^i .

Уравнение (2.2) для поверхности запишется в виде

$$a_{ij}^p x^i X_p \omega^j = 0; \quad i, j = 1 \dots a = d, \quad p = d + 1 \dots n. \quad (3.2)$$

Так как для поверхности каждое перемещение ω^i в подпространстве $A_1 \dots A_d$ определяет некоторую точку $y^i = \theta \omega^i$, то вместо уравнения (3.2) можно взять уравнение

$$a_{ij}^p x^i y^j X_p = 0. \quad (3.3)$$

Каждое однопараметрическое семейство ω^i касательных плоскостей d -мерной поверхности образует $d + 1$ -мерную поверхность, которая в дальнейшем будет называться $d + 1$ -мерной поверхностью ω^i .

Теорема 2.1 для многомерной поверхности утверждает, что если взять произвольную точку x^i на касательной плоскости и произвольное перемещение ω^i (или y^i), то уравнение (3.3) определяет единственную $d + 1$ -мерную плоскость, касающуюся в точке x^i $d + 1$ -мерной поверхности y^i . Так как 1) касательная $d + 1$ -мерная плоскость в 0 -фокальном семействе вдоль прямой $A_0 + x^i A_i$ не меняется (см. [2]). 2) каждому перемещению ω^i соответствует некоторая вполне определенная точка y^i в плоскости $A_1 \dots A_d$ и 3) коэффициенты a_{ij}^p симметричны относительно нижних индексов, то для многомерной поверхности мы получим несколько неожиданную теорему.

Теорема 3.1. *Каждая пара произвольных направлений x^i и y^i в касательной плоскости d -мерной поверхности определяет единственное $d + 1$ -мерное подпространство, которое в точках первого направления касается $d + 1$ -мерной поверхности y^i , и наоборот. Единственное, но весьма важное исключение из этой теоремы приводит к тождественному удовлетворению уравнения (3.3), т. е.*

$$a_{ij}^p x^i y^j = 0. \quad (3.4)$$

Как известно, если пара направлений удовлетворяет соотношениям (3.4), то она называется сопряженной парой направлений много-

мерной поверхности. Таким образом, получается новая характеристика сопряженных направлений на поверхности.

Теорема 3.2. *Сопряженная пара направлений d -мерной поверхности характеризуется тем свойством, что $d+1$ -мерное подпространство этой пары является неопределенным.*

Формулировка этой теоремы не корректна для случая гиперповерхности. Но для гиперповерхности уравнение (3.3) имеет единственный коэффициент $a_{ij}^p x^i y^j$, обращение в нуль которого приводит к сопряженным направлениям.

§ 4. Конус сопряженности многомерной поверхности

Как известно, два направления на поверхности называются сопряженными, если характеристика касательной плоскости по одному направлению содержит второе направление.

Сопряженные направления удовлетворяют соотношениям

$$a_{ij}^p x^i y^j = 0, \quad i, j = 1 \dots d; \quad p = d+1 \dots n. \quad (4.1)$$

В этом параграфе мы найдем условия, при которых многомерная поверхность допускает сопряженные направления. Система (4.1) представляет собой алгебраическое соответствие (см. [6], т. II). Для существования $s-1$ -мерного решения y^i необходимо и достаточно, чтобы

$$r(a_{ij}^p x^i) = d - s, \quad s \geq 1, \quad (4.2)$$

где $r(a_{ij}^p x^i)$ — ранг матрицы (a_{ij}^p) . Система (4.2) содержит ровно $s(n-2d+s)$ независимых алгебраических уравнений. Следовательно, для ее совместности, вообще говоря, должно соблюдаться условие

$$s(n-2d+s) \leq d-1. \quad (4.3)$$

Разность этих двух чисел, т. е.

$$R_s = d-1-s(n-2d+s),$$

дает размерность алгебраического многообразия (4.2). Так как система (4.1) симметрична относительно двух серий неизвестных, то для y^i получим то же самое алгебраическое многообразие (4.2).

Многообразие (4.2) лежит в пространстве $A_1 \dots A_d$. Так как из $s < t$ следует, что $R_s > R_t$, то наибольшая размерность для многообразия получится при $s=1$, т. е. когда

$$r(a_{ij}^p x^i) = d-1. \quad (4.4)$$

Соединяя прямыми все точки алгебраического многообразия (4.4) с точкой A_0 поверхности, в касательной плоскости получим некоторый конус. Он здесь называется конусом сопряженности. Это название оправдывается тем, что каждая образующая прямая этого конуса образует сопряженную пару направлений с некоторой образующей прямой того же конуса.

При $s > 1$ каждому направлению x^i , удовлетворяющему системе (4.2), сопряжено уже s -мерное подпространство, которое также принадлежит конусу сопряженности.

Таким образом, для сопряженных направлений многомерной поверхности получается

Теорема 4.1. *Конус сопряженности наиболее общей d -мерной поверхности n -мерного пространства определяется системой $r(a_{ij}^p x^i) = d - 1$. Размерность этого конуса равна числу $R_1 + 1 = 3d - n - 1$. В случае $R_1 = 0$ поверхность имеет конечное число сопряженных направлений.*

Из соотношения (4.3) следует

Теорема 4.2. *Наиболее общая d -мерная поверхность допускает s -мерные сопряженные направления тогда и только тогда, когда $d(2s + 1) \geq sn + s^2 + 1$. Равенство соответствует случаю, когда на поверхности существует конечное число таких сопряженных направлений.*

Теперь мы найдем условие, при котором каждое направление на касательной плоскости составляет сопряженную пару с некоторым другим направлением. В этом случае условие

$$r(a_{ij}^p x^i) = d - 1$$

не должно накладывать никакого ограничения на x^i . А это означает, что число строк этой матрицы не больше $d - 1$ или $n - d \leq d - 1$, или $n \leq 2d - 1$. Таким образом,

Теорема 4.3. *Каждое направление касательной плоскости является направлением некоторой сопряженной пары тогда и только тогда, когда $n \leq 2d - 1$.*

§ 5. Тангенциально вырожденные поверхности

Пусть направление x^i на поверхности сопряжено с любым другим направлением. В этом случае все коэффициенты при y^i в системе (3.4) должны обращаться в нуль, т. е.

$$a_{ij}^p x^i = 0. \quad (5.1)$$

Эта система будет иметь решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы (a_{ij}^p) (где i — индекс столбцов) меньше d ; или короче

$$r(a_{ij}^p) = d - s, \quad s \geq 1. \quad (5.2)$$

Нетрудно заметить, что число параметров касательной плоскости будет равно $d - s$ и, следовательно, поверхность тангенциально вырождается. Действительно, из (3.1) имеем $\omega_i^p = a_{ij}^p \omega^j$. По направлению $\omega^j = \theta x^j$ в силу (5.1) все формы ω_i^p обращаются в нуль, следовательно, касательная плоскость поверхности по направлению x^i не меняется. Причем, если соблюдается условие (5.2), то направления, вдоль кото-

рых касательные плоскости не меняются, образуют s -мерную поверхность. Такие поверхности называются разворачивающимися поверхностями класса s . Следовательно, справедлива следующая

Теорема 5.1. *Развертывающаяся поверхность класса s характеризуется условием $r(a_{ij}^p) = d - s$. В каждой точке этой поверхности существует такое s -мерное направление, которое сопряжено с любым направлением этой поверхности.*

Нетрудно, заметить, что такие направления удовлетворяют уравнениям $a_{ij}^p x^i x^j = 0$ и, следовательно, являются асимптотическими направлениями.

§ 6. Касательное подпространство направлений многомерной поверхности

В третьем параграфе мы видели, что с любой несамосопряженной парой направлений поверхности связывается единственное $d+1$ -мерное подпространство (см. теорему 3.1). В этом параграфе мы предположим, что эти направления совпадают. Уравнение (3.3) в этом случае запишется в виде

$$a_{ij}^p x^i x^j X_p = 0, \quad (6.1)$$

которое для данного направления x^i определяет $d+1$ -мерное подпространство. Это подпространство называется касательным по данному направлению. Таким образом, получается

Теорема 6.1. *С каждым направлением многомерной поверхности связывается единственное $d+1$ -мерное (касательное) подпространство, которое в точках этого направления касается $d+1$ -мерной поверхности того же направления.*

Единственное исключение этой теоремы получается только тогда, когда уравнение (6.1) тождественно обращается в нуль, т. е.

$$a_{ij}^p x^i x^j = 0. \quad (6.2)$$

Как известно, направления, удовлетворяющие системе (6.2), называются асимптотическими. Таким образом, асимптотические направления получают новый характеризующий признак:

Теорема 6.2. *Асимптотические направления многомерной поверхности характеризуются тем, что касательные подпространства по этим направлениям становятся неопределенными.*

На каждой поверхности асимптотические направления (если существуют) образуют асимптотический конус с уравнениями (6.2), вершина которого совпадает с рассматриваемой точкой поверхности. Асимптотический конус является подмногообразием конуса сопряженности.

Так как число уравнений системы (6.2) в общем случае равно $n-d$, а число неизвестных равно d , то для совместности этой системы необходимо и достаточно выполнение требования

$$n - d \leq d - 1. \quad (6.3)$$

Следовательно, здесь доказывается

Теорема 6.3. *Наиболее общая многомерная поверхность обладает асимптотическими направлениями тогда и только тогда, когда $n \leq 2d + 1$.*

§ 7. «Сопряженная пара» и поверхности, допускающие такую пару

Мы здесь опять возвращаемся к сопряженной тройке объектов. Для краткости эта тройка обозначается в виде $(xX\omega)$, где x — точка касательной плоскости, X — гиперплоскость, проходящая через эту плоскость и ω — перемещение (или направление на касательной плоскости). Согласно определению эта тройка удовлетворяет инвариантному уравнению

$$a_{ij}^p x^i X^j \omega^j = 0. \quad (7.1)$$

Теорема 2.2 для многомерной поверхности гласит

Теорема 7.1. *Если заданы произвольно гиперплоскость X и направление ω , то (7.1) определяет такое $d-1$ -мерное подпространство (проходящее через A_0), каждая точка x которого образует сопряженную тройку $(xX\omega)$. Причем, заданное направление ω принадлежит этому $d-1$ -мерному подпространству тогда и только тогда, когда гиперплоскость X принадлежит касательному подпространству направления ω .*

Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из уравнения (6.1).

Таким образом, с каждой парой (ωX) направления и гиперплоскости однозначно связывается определенное $d-1$ -мерное подпространство, инцидентное точке касания и касательной плоскости поверхности. В дальнейшем оно называется подпространством пары (ωX) .

Из условий $a_{ij}^p = a_{ji}^p$ и из теоремы 7.1 вытекает, что если x образует сопряженную тройку с y и X , то y также образует сопряженную тройку с x и X , т. е.

Теорема 7.2. *Если x принадлежит $d-1$ -мерному подпространству пары $\omega^i = \theta y^i$ и X , то y принадлежит $d-1$ -мерному подпространству пары $\omega^i = \theta x^i$ и X , и наоборот.*

Теорема 7.1 имеет единственное, но очень важное исключение. Действительно, если пара (ωX) удовлетворяет соотношениям

$$a_{ij}^p \omega^i X^j = 0, \quad (7.2)$$

то подпространство этой пары становится неопределенным.

Определение. Если пара (ωX) удовлетворяет соотношениям (7.2), то она называется сопряженной парой (ωX) . Следовательно, геометрический смысл сопряженной пары (ωX) заключается в том, что она не обладает $d-1$ -мерным подпространством.

Теперь найдем поверхности, которые допускают такую пару. Для таких поверхностей алгебраическое соответствие (7.2) должно быть совместным. Если в этой системе полагать $\omega^i = \theta x^i$, то для существования единственного решения X_p необходимо и достаточно, чтобы

$$r(a_{ij}^p x^i) = n - d - 1. \quad (7.3)$$

Соотношения (7.3) содержат всего $2d - n + 1$ независимых алгебраических соотношений. В общем случае (7.3) будет иметь решение относительно x^i тогда и только тогда, когда

$$n \geq d + 2. \quad (7.4)$$

Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 7.3. Многомерная поверхность обладает сопряженной парой (ωX) тогда и только тогда, когда $n \geq d + 2$. Когда $n = d + 2$, то в каждой точке поверхность имеет ровно d таких пар.

Последнее утверждение теоремы доказывается в силу (7.5), которое получается ниже.

Таким образом, сопряженной парой (ωX) обладают все поверхности, кроме гиперповерхностей.

В силу принципа счета констант (см. [6], т. II) тот же самый результат получится, если систему (7.2) рассматривать как уравнения относительно неизвестных x^i (или ω^i). В этом случае для существования единственного решения x^i необходимо

$$r(a_{ij}^p X_p) = d - 1. \quad (7.5)$$

Нетрудно заметить, что (7.5) содержит только одно уравнение порядка d , ибо матрица (7.5) квадратная. Таким образом, в пространстве переменных X_p ($p = d + 1 \dots n$) уравнение (7.5) является гиперповерхностью порядка d .

Таким образом, алгебраическое многообразие образовано только из тех направлений, которые принадлежат к сопряженным парам (ωX) . Точно так же уравнениям (7.5) удовлетворяют только те гиперповерхности, которые образуют сопряженную пару (ωX) . Оба многообразия (7.4) и (7.5) являются конусами. Первый конус лежит в касательной плоскости, причем его вершина совпадает с точкой касания. Этот конус называется конусом направлений сопряженных пар (ωX) . Второй конус образован из гиперплоскостей, причем его вершина совпадает с касательной плоскостью поверхности. Этот конус называется конусом гиперплоскостей сопряженных пар (ωX) . Следовательно, здесь справедлива

Теорема 7.4. С каждой точкой многомерной поверхности связываются два конуса, первый из которых образован направлениями сопряженных пар (ωX) , второй образован из гиперповерхностей тех же пар. Исключение составляют только гиперповерхности, которые не обладают сопряженными парами (ωX) .

Особый интерес представляет случай, когда конус направлений сопряженных пар (ωX) является гиперконусом. В этом случае из (7.3) получим $n = 2d$. Следовательно, когда $n > 2d$, то каждое направление ω^i в касательной плоскости образует сопряженную пару (ωX) с некоторой гиперплоскостью X . Таким образом,

Теорема 7.5. *Конус направлений сопряженных пар (ωX) d -мерной поверхности является гиперконусом тогда и только тогда, когда $n = 2d$. Каждое направление касательной плоскости образует сопряженную пару (ωX) с некоторой гиперповерхностью тогда и только тогда, когда $n > 2d$.*

§ 8. Совпадение конусов сопряженности и сопряженных пар (ωX) поверхности

Как уже известно, конус сопряженности и конус направлений сопряженных пар (ωX) определяются соответственно системами

$$r(a_{ij}^p x^i) = d - 1, \quad r(a_{ij}^p x^i) = n - d - 1. \quad (8.1)$$

Здесь возможны только три случая: $d > n - d$, $d = n - d$ и $d < n - d$, и так как левые части соотношений (8.1) одни и те же, то справедливы

Теорема 8.1. *Конус сопряженности и конус пар (ωX) многомерной поверхности совпадают тогда и только тогда, когда $n = 2d$. Если $n > 2d$, то первый конус является подмногообразием второго конуса. Если $n < 2d$ то, наоборот, второй конус является подмногообразием первого.*

Например, в четырехмерном пространстве ($n = 4$) двумерная поверхность обладает единственной сопряженной сетью. В силу теоремы 8.1 каждое из этих направлений одновременно образует пару (ωX) с двумя определенными гиперповерхностями X (см. [3,4]).

Приложение теоремы 2.3 к теории поверхностей в силу теоремы 7.2 приводит к уже известным результатам.

§ 9. Соприкасающаяся плоскость поверхности

Рассмотрим такие гиперплоскости, которые образуют сопряженную пару (ωX) с любым направлением, т. е. удовлетворяют системе

$$a_{ij}^p X_p = 0. \quad (9.1)$$

Нетрудно заметить, что система (9.1) определяет соприкасающуюся плоскость поверхности (плоскость минимальной размерности, в которой лежат все дифференциалы второго порядка точки поверхности). Таким образом,

Теорема 9.1. *Соприкасающаяся плоскость многомерной поверхности характеризуется тем свойством, что каждая гиперплоскость, инцидентная этой плоскости, образует сопряженную пару (ωX) с любым направлением поверхности.*

Если система (9.1) имеет только нулевое решение, то соприкасающаяся плоскость совпадает с n -пространством.

Система (9.1) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы (a_{ij}^p) (где p — индекс столбцов) меньше $n - d$ или короче

$$r(a_{ij}^p) = n - d - s, \quad s \geq 1. \quad (9.2)$$

Следовательно, система (9.1) в силу (9.2) определяет плоскость размерности $n - s$. Итак,

Теорема 9.2. *Размерность соприкасающейся плоскости многомерной поверхности всегда равна $n - s$, где $r(a_{ij}^p) = n - d - s$.*

Нетрудно заметить, что для наиболее общей поверхности размерность соприкасающейся плоскости равна $d + \min \left(n - d, d + \frac{d(d-1)}{2} \right)$. Если n достаточно велико, то эта размерность равна $2d + \frac{d(d-1)}{2}$.

§ 10. Связки гиперплоскостей многомерной поверхности

Пусть d -мерная поверхность отнесена к подвижному реперу первого порядка, т. е.

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^i A_i, \quad \omega_0^p = 0, \quad \omega_i^p = a_{ij}^p \omega^j, \quad a_{ij}^p = a_{ji}^p; \\ i, j = 1 \dots d; \quad p = d+1 \dots n. \quad (10.1)$$

Инфинитезимальное перемещение тангенциального репера пишется в виде (см. [1])

$$da^\alpha = -\omega_\beta^\alpha a^\beta, \quad a^\alpha = (-1)^\alpha (A_0 \dots A_{\alpha-1} A_{\alpha+1} \dots A_n); \quad \alpha, \beta = 0 \dots n. \quad (10.2)$$

Гиперплоскость, проходящая через точку A_0 поверхности (A_0) в тангенциальных координатах пишется в виде

$$m = X_q a^q, \quad q = 1 \dots n. \quad (10.3)$$

Найдем условие, при котором дифференциал гиперплоскости (10.2) принадлежит той же связке. В силу (10.2) это требование приведет к единственному уравнению

$$X_i \omega^i = 0, \quad i = 1 \dots d, \quad (10.4)$$

а это означает, что гиперплоскость X проходит через касательную $d-1$ -мерную плоскость $d-1$ -мерной поверхности (10.4). Итак, каждой гиперповерхности X связки (10.3) соответствует такая $d-1$ -мерная поверхность (неголомомная), по которой пересекаются гиперплоскость X и поверхность (A_0) . Для краткости связку гиперповерхностей (10.3), проходящих через точку поверхности, назовем 0-связкой

гиперповерхностей, а связку гиперповерхностей, проходящих через касательную плоскость d -мерной поверхности, назовем d -связкой. Следовательно, здесь доказывается следующая

Теорема 10.1. *Дифференциал гиперплоскости 0-связки принадлежит той же 0-связке тогда и только тогда, когда дифференциал берется по направлениям пересечения этой гиперплоскости с поверхностью. Гиперповерхность принадлежит d -связке тогда и только тогда, когда ее дифференциал по всем направлениям принадлежит 0-связке.*

Последнее утверждение теоремы просто вытекает из основного соотношения (10.4) при обращении всех коэффициентов при ω^i в нуль. Мы фактически здесь имеем новое характеризующее свойство касательной плоскости многомерной поверхности.

Все результаты этого параграфа фактически были получены с помощью инвариантной трilinearной формы в § 3.

Аналогичная задача для d -связки гиперплоскостей приводит к соотношениям

$$a_{ij}^p X_p \omega^i = 0; \quad i, j = 1 \dots d, \quad p = d + 1 \dots n, \quad (10.5)$$

которые приводят к теореме:

Теорема 10.2. *Дифференциал гиперплоскости d -связки приводит к гиперплоскости той же связки тогда и только тогда, когда эта гиперплоскость и направление дифференцирования образуют сопряженную пару (ωX) .*

§ 11. Число $d - 1$ -мерных сопряженных направлений многомерной поверхности

В силу теоремы 4.2 d -мерная поверхность в n -мерном пространстве допускает конечное число $d - 1$ -мерных сопряженных направлений тогда и только тогда, когда

$$n = d + 2. \quad (11.1)$$

В этом параграфе мы найдем число таких направлений на поверхности. Как известно (см. [2]), эта задача сводится к отысканию числа $(d - 2)$ -мерных фокусов d -семейства $d - 1$ -мерных плоскостей $n - 1$ -мерного пространства.

Известно, что совокупность всех $d - 1$ -мерных плоскостей, пересекающихся с данной $d - 1$ -мерной плоскостью по $d - 2$ -мерным подпространствам, образует шубертово многообразие (см. [1, 6]), которое на грассмановом многообразии $\Omega(d - 1, n - 1)$ представляет $n - 1$ -мерный конус порядка C_{n-2}^{d-1} . В силу (11.1) порядок этого конуса равен числу d . Таким образом, доказывается

Теорема 11.1. *В общем случае только $d = n - 2$ -мерная поверхность допускает конечное число $d - 1$ -мерных сопряженных направлений. Количество этих направлений равно числу d .*

Характеристика $d = n - 2$ -мерной касательной плоскости по одному из этих направлений представляет $d - 1$ -мерное подпространство, проходящее через остальные $d - 1$ направления.

§ 12. Дифференциальные окрестности высоких порядков

Мы в этом параграфе опять возвращаемся к общим a -семействам d -мерных плоскостей. Здесь рассмотрим дифференциальную окрестность второго порядка и сделаем соответствующие выводы для окрестностей более высоких порядков.

Для краткости будем пользоваться соотношениями (1.6), т. е. предположим, что касательное подпространство семейства является гранью подвижного репера. С помощью леммы Картана из (1.2) получим

$$da_{ix}^p + a_{ix}^q \omega_q^p - a_{jx}^p \omega_l^j = a_{ix_1}^p du^{x_1}, \quad a_{ix_1}^p = a_{ix_1}^p, \\ i, j = 0 \dots d; \quad p, q = d + 1 \dots n; \quad x, x_1 = 1 \dots a. \quad (12.1)$$

В силу (1.6) из (12.1) получим систему

$$a_{ix}^q \omega_q^p = a_{ix_1}^p du^{x_1}; \quad q = d + 1 \dots d + a(d + 1); \\ p = d + a(d + 1) \dots n, \quad (12.2)$$

которая однозначно определяет новые главные формы ω_q^p .

Теперь мы можем рассматривать новое семейство, образованное из касательных подпространств a -семейства d -мерных плоскостей. В общем случае размерность этого семейства также будет равна a . Инвариантная трilinearная форма этого семейства имеет вид

$$\Phi_1 = \omega_q^p x^q X_p = b_{qx_1}^p x^q X_p du^{x_1}, \quad (12.3)$$

где тензор $b_{qx_1}^p$ однозначно определяется из системы

$$a_{ix}^q b_{qx_1}^p = a_{ix_1}^p. \quad (12.4)$$

Семейство касательных подпространств является d -фокальным семейством, т. е. все подпространства первой дифференциальной окрестности каждого подпространства проходят через d -мерную плоскость первоначального семейства.

Обращение формы (12.3) в нуль приводит к известным уже результатам (§ 2), но для нового семейства касательных подпространств. В работах [1, 2] и в этой работе фактически мы занимались геометрией инвариантной трilinearной формы Φ . Аналогичные приемы, примененные к инвариантной форме Φ_1 , приводят к новым, но столь же глубоким результатам. Все эти результаты будут связаны со второй дифференциальной окрестностью d -мерной плоскости.

Точно так же с третьей дифференциальной окрестностью связывается инвариантная форма Φ_2 (и, следовательно, тензор $C_{px_1}^p$), проводится аналогичное исследование и т. д.

Значение последовательности инвариантных трилинейных форм $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ в дифференциальной геометрии трудно переоценить. Каждое подмногообразие изучаемого многообразия также обладает такой последовательностью инвариантных форм. Каждая такая последовательность обрывается только тогда, когда касательное подпространство данного порядка совпадает с объемлющим пространством.

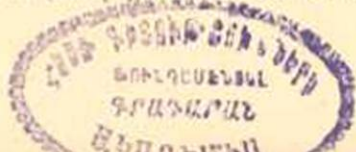
§ 13. Последовательность инвариантных трилинейных форм на грассмановом отображении семейства

В классической теории конгруэнций и комплексов прямых большая роль принадлежит линейным многообразиям прямых, т. е. деми-квадрике, линейной конгруэнции и линейному комплексу. Эти многообразия в P_3 представляются подпространствами различных измерений. Каждое семейство (линейчатая поверхность, конгруэнция или комплекс) на грассмановом (плюккеровом) многообразии представляет некоторую поверхность. Касательные плоскости (различных порядков) этих поверхностей (или их сопряженные плоскости) как раз представляют касательные линейные многообразия к этим семействам.

В четырехмерном пространстве касательные линейные многообразия для двупараметрического семейства прямых и плоскостей подробно изучены в работах [3, 4]. В работе [1] изучается касательное линейное многообразие произвольного a -параметрического семейства d -мерных плоскостей. Так как касательные плоскости различных порядков многомерной поверхности получаются с помощью трилинейной инвариантной формы соответствующей дифференциальной окрестности (см. § 3—10), то изучение линейного многообразия данного a -семейства приводится к изучению последовательности инвариантных форм, присоединенной к a -поверхности (образу a -семейства) грассманова многообразия $\Omega(d, n)$.

Мы здесь не будем заниматься подробным изучением этих многообразий, несмотря на то, что результаты будут представлять определенный интерес в проективно-дифференциальной геометрии. Дело в том, что метод изучения этих многообразий ничем не отличается от метода, примененного в этой работе и в работах [1, 2].

Отображение на грассмановом многообразии дает хорошую интерпретацию теории пар семейств d -мерных плоскостей. Действительно, пара a -семейств d -мерных плоскостей отображается в пару a -поверхностей, принадлежащих грассманову многообразию. Две касательные плоскости этих поверхностей в пространстве P_N ($N = C_{n+1}^{d+1} - 1$) в общем случае либо пересекаются по некоторому s -мерному подпространству, либо находятся в некотором k -мерном подпространстве. Так как каждое подпространство из P_N отображает некоторое линейное многообразие d -мерных плоскостей (см. [1]), то это линейное



многообразие инвариантно связывается с рассматриваемой парой семейств d -плоскостей. В случаях, когда размерность пересечения или суммы этих плоскостей больше s или меньше k , получаются частные случаи (классы) пары семейств, причем в каждом конкретном случае очень легко можно классифицировать пары в каждом пространстве. Например, в трехмерном пространстве существуют три основные пары конгруэнций: A , T и Θ [7, 8]. В том же пространстве существует только одна основная пара комплексов, это пара Γ [9], и т. д.

§ 14. Изоморфизм проективных геометрий различных образующих элементов

Согласно идее Д. Гильберта [10] основные элементы (точка, прямая и т. д.) геометрии не получают определения. Следовательно, эти элементы и отношения между ними могут выбираться произвольно, только лишь с одним ограничением; выбранные элементы и отношения между ними должны удовлетворять определенным свойствам (аксиомам) этой геометрии.

В этом параграфе мы будем пользоваться этой идеей и построим ряд геометрий, изоморфных проективным геометриям многомерных пространств. Взаимно-однозначное соответствие этих геометрий поκειται на следующем принципе:

Принцип отображения. Точка (x^i) пространства P_n ставится в соответствие с таким геометрическим объектом другого пространства P (не обязательно проективного), уравнение которого имеет ровно $n+1$ однородных коэффициентов (x^i) . Если $x^i F_i = 0$ уравнение этого объекта в P (где F_i зависят от координат пространства P), то точки $x^i + \lambda y^i$ прямой (xy) соответствуют объектам пучка $(x^i + \lambda y^i) F_i = 0$; точки $x^i + \lambda y^i + \mu z^i$ плоскости (xyz) соответствуют объектам $(x^i + \lambda y^i + \mu z^i) F_i = 0$ и т. д.

Устанавливаемое таким образом соответствие пространств P_n и P всегда является взаимно-однозначным. Фундаментальная группа пространства P совпадает с фундаментальной группой P_n .

Соответствие инцидентностей этих двух геометрий устанавливается следующей очевидной теоремой:

Теорема 14.1. Если два подпространства в P_n пересекаются по k -мерному подпространству, то соответствующие им пучки в P пересекаются по k -мерному пучку.

Здесь k -мерным пучком называется совокупность объектов, которая определяется уравнением

$$(x^i + \lambda_1 y^i + \dots + \lambda_k z^i) F_i = 0.$$

Таким образом, устанавливается изоморфизм между точечной геометрией P_n и геометрией данных образов другого пространства P . Мы последнюю геометрию называем проективной геометрией

образов в пространстве P . Все эти рассуждения более подробно выясним на следующем примере.

§ 15. Проективная геометрия окружностей и сфер трехмерного евклидова пространства

Как известно, сфера трехмерного евклидова пространства в прямоугольных координатах определяется уравнением

$$x^0(x^2 + y^2 + z^2) + 2x^1x + 2x^2y + 2x^3z + x^4 = 0. \quad (15.1)$$

Следовательно, каждая сфера из E_3 однозначно определяется точкой (x^i) проективного четырехмерного пространства P_4 . Для получения взаимно-однозначного соответствия мы должны во множество сфер E_3 включить все сферы мнимого радиуса, все плоскости (когда $x_0 = 0$), в том числе и бесконечно удаленную плоскость и, наконец, все точки пространства E_3 .

Легко заметить, что соответствие между основными элементами этих двух пространств будет иметь вид

 P_4
 E_3

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1. Точки. | 1. Сфера. |
| 2. Точки прямой. | 2. Сферы, проходящие через данную окружность. Эта окружность действительна, когда пучок сфер эллиптический; мнимая, когда этот пучок гиперболический и, наконец, является точкой, когда пучок параболический. Причем не нужно ставить различия между этими тремя видами окружностей, ибо существуют преобразования фундаментальной группы, которые переводят один вид окружностей в другой. Мы в дальнейшем их назовем просто окружностями. |
| 3. Точки двумерной плоскости. | 3. Сферы двумерного пучка, т. е. все сферы, проходящие через две (действительные или мнимо-сопряженные) точки. |
| 4. Точки трехмерной плоскости. | 4. Сферы трехмерного пучка или (как легко доказать) все сферы, ортогональные одной сфере. |
| 5. Две прямые пересекаются. | 5. Две окружности концентричны (принадлежат одной сфере) и т. д. |

Принцип двойственности четырехмерного пространства приводит к такому же принципу в E_3 , т. е. сфера $\longleftrightarrow$ трехмерный пучок сфер, одномерный пучок сфер $\longleftrightarrow$ двумерный пучок сфер.

Таким образом, устанавливается изоморфизм между точечной четырехмерной проективной геометрией и так называемой „проективной геометрией сфер“ трехмерного пространства.

С помощью этого изоморфизма каждой теореме из P_4 соответствует теорема в геометрии сфер и окружностей. Например, в P_4

если три прямые не принадлежат одной гиперплоскости, то обладают единственной трансверсалью (прямой, пересекающей эти прямые). В E_3 этот результат приводит к теореме (доказательство которой в элементарной геометрии связано с большими затруднениями):

Теорема 15.1. Существует единственная окружность, которая концентрична с каждой из трех заданных (не ортогональных одной сфере) окружностей.

Две прямые в P_4 определяют единственную гиперплоскость, в которой они лежат. Точно так же

Теорема 15.2. Две окружности s и s_1 определяют единственную сферу O , которой ортогональны все сферы пучков этих окружностей. Причем на каждой сфере, ортогональной O , существует единственная окружность, которая концентрична как с s , так и с s_1 .

На этом пути без доказательства можно сформулировать очень много теорем в геометрии сфер и окружностей, но мы на этом не останавливаемся.

В работе [11] нами были подробно изучены линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Все результаты этой работы автоматически переносятся в геометрию сфер и окружностей. В этой работе мы рассматриваем некоторые свойства конфигурации Власова. В свете этого изоморфизма получается

Теорема 15.3. Пентациклы Стефаноса являются изоморфными отображениями прямых конфигурации Власова. Все замечательные свойства конфигурации Власова переходят в новые свойства для пентациклов Стефаноса.

Аналогично доказывается, что линейчатая геометрия трехмерного проективного пространства изоморфна проективной геометрии окружностей евклидовой плоскости.

Другим примером изоморфизма двух геометрий является изоморфизм между точками пятимерного проективного пространства и линейного комплекса прямых трехмерного пространства. Этот изоморфизм приводит к ряду интересных свойств семейства демиквадрик которыми здесь заниматься не будем.

Армянский заочный педагогический институт
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 VI 1963

Ս. Ե. Կարապետյան

ԲԱԶՄԱԶԱՓ ՀԱՐԹՈՒՅՑՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ
ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒՅՑՈՒՆԸ (III)

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատությունը հանդիսանում է [1, 2] աշխատությունների շարունակությունը: Այստեղ հաշվարկված է մի երկրորդին ինվարիանտ ձև, որը լրիվ հեռացված է:

3—10-րդ պարագրաֆներում տրված է որդ ձևի կիրառությունը բազմաչափ մակերևույթների ուսումնասիրության համար: Այստեղ ստացված են մի շարք նոր արդյունքներ:

Վերջում տրված է բազմաչափ տարածությունների երկրաչափության մի մեկնարկություն, որի օգնությամբ ստանում են նոր երկրաչափություններ, որոնց տարածության հիմնական էլեմենտը ոչ թե կետն է, այլ՝ մի ուրիշ երկրաչափական օբյեկտ: Այս սկզբունքով շարադրված է էվկլիդեսյան եռաչափ տարածության դեղերի և շրջանագծերի պրոյեկտիվ երկրաչափությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Կարապետյան Ս. Ե. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, № 3, 1963.
2. Կարապետյան Ս. Ե. Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, № 5, 1963.
3. Лантес Г. Ф. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Труды III мат. съезда, т. III, М., 1958.
4. Կարապետյան Ս. Ե. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 2, 1962.
5. Կարապետյան Ս. Ե. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 3, 1962.
6. Ходж В. и Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. I, II. ИЛ, М., 1954.
7. Կարապետյան Ս. Ե. О теории пар конгруэнций. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 4, 1961.
8. Կարապետյան Ս. Ե. Пара А и некоторые свойства пары Т. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 4, 1959.
9. Կարապետյան Ս. Ե. Сопряженные многообразия и их приложения. ДАН СССР, **133**, № 5, 1960.
10. Гильберт Д. Основания геометрии. ИЛ, М., 1948.
11. Կարապետյան Ս. Ե. Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 1, 1962.