

МАТЕМАТИКА

К. Б. Санджиева

Об одной оценке решения уравнения
второго порядка

Пусть имеем уравнение

$$\Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta c(x, y) u = 0, \quad (1)$$

где

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — аналитические функции переменных x, y в области G , β — вещественный параметр. В качестве области G возьмем единичный круг.

Задача Д. Найти решение уравнения (1) по граничному условию

$$u(x, y)|_{\Gamma} = f(s).$$

Известно, что если коэффициент при u в уравнении (1) отрицателен или равен нулю, то задача Дирихле для такого уравнения всегда имеет единственное решение.

Рассмотрим случай положительного коэффициента. При $\beta = 0$ уравнение (1) примет вид

$$\Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Запишем уравнение (2) в комплексной форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} + A(z, \bar{z}) \frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \bar{z}) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2')$$

Задача Дирихле для уравнения (2) имеет единственное решение для любой непрерывной граничной функции. Для решения уравнения (2) справедлив принцип максимума (см. [2])

$$|u(z)| \leq M \max_{t \in \Gamma} |u(t)|, \quad (3)$$

где M — положительная постоянная, зависящая от коэффициентов уравнения.

Возьмем для уравнения (1) общее представление решений (см. 1)

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}) \Phi(z) - \int_{z_0}^z \Phi(t) H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) dt \right\}, \quad (4)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная в G функция, причем $\Phi(z_0) = \overline{\Phi(z_0)}$,

$$H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) - B(t, z_0) G(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}),$$

$$\Phi(z) = 2u(z, \bar{z}_0) - u(z_0, \bar{z}_0) G(z_0, \bar{z}_0, z, \bar{z}_0). \quad (5)$$

Функция Римана $G(t, \tau, z, \bar{z})$ определяется из уравнения

$$G(t, \tau, z, \bar{z}) - \int_t^z B(\xi, \bar{z}) G(t, \tau, \xi, \bar{z}) d\xi -$$

$$- \int_{\tau}^{\bar{z}} A(z, \eta) G(t, \tau, z, \eta) d\eta + \beta \int_t^z d\xi \int_{\tau}^{\bar{z}} c(\xi, \eta) G(t, \tau, \xi, \eta) d\eta = 1.$$

Методом последовательных приближений находим

$$G(t, \tau, z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t, \tau, z, \bar{z}),$$

данный ряд всегда сходится абсолютно и равномерно. Обозначим через $\|A\|$, $\|B\|$, $\|c\|$, $\|G\|$ соответственно суммы модулей коэффициентов $A(z, \bar{z})$, $B(z, \bar{z})$, $c(z, \bar{z})$, $G(t, 0, z, \bar{z})$.

Тогда имеем (см. [3])

$$\|G\| < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = e^D = L, \quad (6)$$

где

$$D = 2\|B\| + \|A\| + 2\beta\|c\|.$$

Будем искать решение задачи Д. для уравнения (1) в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k u_k(x, y), \quad (7)$$

где $u_k(x, y)$ — некоторые аналитические от x, y функции, которые определим ниже.

Из равенства (5) получим также

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \Phi_k(z). \quad (8)$$

Подставим (7) и (8) в равенство (4) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра β , получим

$$u_0(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ g_0(0, 0, z, \bar{z}) \Phi_0(z) - \int_0^z \Phi_0(t) H_0(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) dt \right\},$$

$$u_n(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ g_0(0, 0, z, \bar{z}) \Phi_n(z) - \int_0^z \Phi_n(t) \left[\frac{\partial}{\partial t} g_0(t, 0, z, \bar{z}) - \right. \right. \\ \left. \left. - B(t, 0) g_0(t, 0, z, \bar{z}) \right] dt \right\} + \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left\{ g_k(0, 0, z, \bar{z}) \Phi_{n-k}(z) - \right. \\ \left. - \int_0^z \Phi_{n-k}(t) \left[\frac{\partial}{\partial t} g_k(t, 0, z, \bar{z}) - B(t, 0) g_k(t, 0, z, \bar{z}) \right] dt \right\} \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Возьмем для $u_n(x, y)$ следующие граничные условия:

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = f(s), \quad u_n(x, y)|_{\Gamma} = 0.$$

Таким образом, для определения приближений $u_k(x, y)$ нужно решать задачу Д. для уравнения (2) при различных граничных условиях.

Теперь покажем сходимость ряда (7).

За граничную функцию возьмем полином

$$f(s) = \sum_{-M}^M \delta_k e^{iks}, \quad \sum_{-M}^M |\delta_k| = N, \quad (\delta_k = \bar{\delta}_{-k}).$$

Тогда из неравенства (3) имеем

$$|u_0(x, y)| < MN.$$

Теперь нам нужно оценить граничные значения для любого u_k , то есть иметь оценку суммы

$$f_n(s) = \left\{ \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \left[g_k(0, 0, z, \bar{z}) \Phi_{n-k}(z) - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^z \Phi_{n-k}(t) \left[\frac{\partial}{\partial t} g_k(t, 0, z, \bar{z}) - B(t, 0) g_k(t, 0, z, \bar{z}) \right] dt \right] \right\}_{\Gamma}.$$

Для оценки $\Phi_n(z)$ используется равенство (5). Имеем

$$|\Phi_0(z)| < MN(2 + L). \quad (9)$$

Из неравенства (6) следует также, что

$$\|g_k(t, 0, z, \bar{z})\| < L. \quad (10)$$

Так как (см. [3], стр. 47)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z}) \right\| < D e^D = DL,$$

тогда получим тем более

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} g_k(t, 0, z, \bar{z}) \right\| < DL. \quad (11)$$

Подставим оценки (9) (10), (11) в неравенство

$$|f_n(x, y)| < \sum_{k=1}^n |\Phi_{n-k}(z)| \left[|g_k(0, 0, z, \bar{z})| + \left| \frac{\partial}{\partial t} g_k(t, 0, z, \bar{z}) \right| + \right. \\ \left. + |B(t, 0)| |g_k(t, 0, z, \bar{z})| \right].$$

Легко видеть, что справедливы оценки

$$|f_1(x, y)| < MN(2+L)(1+D+B), \\ |u_1(x, y)| < M^2NL(2+L)(1+D+B), \\ |\Phi_1(z)| < M^2NL(1+D+B)(2+L)^2,$$

где $B = \|B(t, 0)\|$.

Аналогично находим для любого n

$$|u_n(x, y)| < M^2NL(2+L)(1+D+B)[1+ML(1+D+B)(2+L)]^{n-1}.$$

Запишем мажорантный ряд для ряда (7)

$$MN + NLM^2(2+L)(1+D+B) \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k [1+ML(1+D+B)(2+L)]^{k-1}.$$

Отсюда получим, что при условии

$$\beta [1+ML(1+D+B)(2+L)] < 1, \quad (12)$$

ряд (7) сходится абсолютно и равномерно, и сумма его есть решение задачи Д. Имеет место оценка

$$|u(x, y)| < MN + \frac{M^2NL(2+L)(1+D+B)\beta}{1 - \beta [1+ML(1+D+B)(2+L)]}.$$

Так как при условии (12) для любой $f(s)$ вида $\sum_{k=-M}^M \delta_k e^{2ks}$ задача Д имеет решение, то, следовательно, она будет иметь решение для любой один раз непрерывно дифференцируемой функции.

Отсюда следует:

Теорема. Задача Д. для уравнения (1) при достаточно малом β всегда имеет решение и притом единственное.

Единственность решения задачи Д. следует из того, что для любой непрерывно дифференцируемой функции $f(s)$ она разрешима (см. [1]).

В заключение выражаю благодарность академику Н. Н. Векуа за предложенную тему и ценные советы.

Կ. Բ. Սանժուելա

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է

$$\Delta u + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta c(x, y) u = 0 \quad (1)$$

հավասարումը, որտեղ $a(x, y)$ -ը, $b(x, y)$ -ը, $c(x, y)$ -ը x, y փոփոխականների անալիտիկ ֆունկցիաներն են, y ախրայթում (միավոր շրջան), β -ն իրական պարամետր է:

$\beta c(x, y) > 0$ դրական գործակցի դեպքի համար ապացուցված է հետևյալ թեորեման՝

Թեորեմ — Իրիխիլեի խնդիրը (1) հավասարման համար, բավական փոքր β -ի դեպքում, միշտ ունի միակ լուծում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, 1948.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, 1959.
3. Санжувела К. Б. Приближенный метод расчета оболочки. Кандидатская диссертация.