

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Н. А. Петросян

Об одном численном решении нелинейного уравнения трансформации поля ветра

В работе [1] решена линейная плоская стационарная задача трансформации профиля ветра под влиянием подстилающей поверхности при заданном распределении скорости ветра на границе двух подстилающих поверхностей. Из этого решения были получены некоторые физические закономерности.

С целью проверки имеют ли место эти закономерности для нелинейных уравнений трансформации в настоящей статье приводится численное решение соответствующей нелинейной задачи о трансформации ветра при заданном распределении скорости ветра на границе двух подстилающих поверхностей суша—вода $U_0(z)$.

Уравнение трансформации берется в виде [1]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$U(x, z) \Big|_{x=0} = U_0(z), \quad (2)$$

$$k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = v_*^2. \quad (3)$$

Здесь: $U(x, z)$ — горизонтальная составляющая скорости ветра, $k(z)$ — коэффициент турбулентного обмена, v_* — динамическая скорость, x и z — соответственно горизонтальная и вертикальная координаты.

Поставленная нелинейная задача была решена на электронной вычислительной машине „Урал I“.

Представляя производные функции $U(x, z)$, входящие в уравнение (1) и в граничное условие (3), в явной конечноразностной схеме, получим систему уравнений в виде:

$$U_{i+1}^j = U_i^j + \frac{\Delta x}{2(\Delta z)^2} \left\{ \frac{U_{i+1}^{j+1}}{U_i^j} (k^{j+1} + k^j) + \frac{U_i^{j-1}}{U_i^j} (k^j + k^{j-1}) - (k^{j+1} + 2k^j + k^{j-1}) \right\}. \quad (1')$$

$$U_i^0 = U_i^1 - q \Delta z, \quad \text{где} \quad q = \frac{2v^2}{k^0 + k^1}. \quad (3')$$

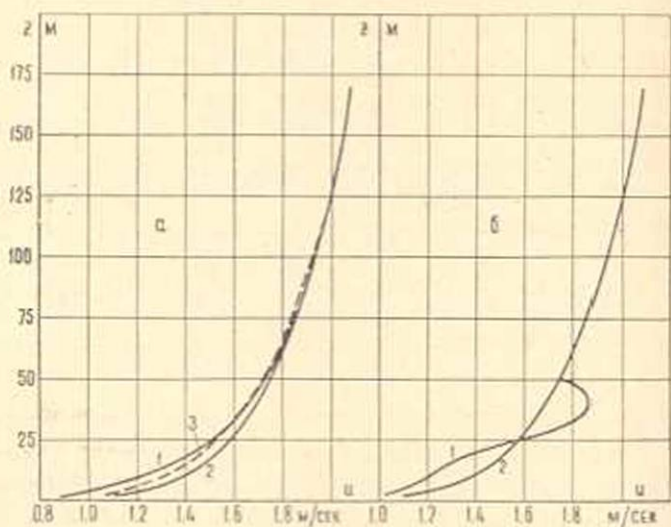
Здесь: $i=0, 1, 2 \dots m$, $j=0, 1, 2 \dots n$ соответствуют координатным осям x и z , Δx и Δz — шаги интегрирования по соответствующим направлениям. Согласно последней системе конечно-разностных уравнений, значения скорости ветра в каждом следующем по x слое получаются посредством значений скорости ветра предыдущего слоя.

При расчетах третье граничное условие берется в виде:

$$U(x, z)|_{z=H} = U_H. \quad (4)$$

где U_H — скорость ветра на достаточно большой высоте H . Рассчитаны следующие примеры:

1. Предельный профиль имеет вид кривой, описываемой простым степенным законом, начальный профиль выбран так, что в основном слое по высоте он мало отличается от предельного и на достаточно большой высоте совпадает с ним (случай *a* на фиг. 1). Для $k(z)$ также принят простой степенной закон по высоте. В этом случае „параллельный“ подход трансформирующегося профиля к предельному получается уже на расстоянии 2–3 км (пунктирная линия на фиг. 1).



Фиг. 1. Начальный (1) и предельный (2) профили ветра при большей (а) и при меньшей (б) рассогласованности. 3—профиль ветра на расстоянии $x=2280$ м.

На этом же примере можно видеть влияние нелинейности задачи на длину трансформации. Если сравнить значения добавочной скорости на расстоянии $2 \cdot 10^3$ м от берега в случае линейного решения (0,09 м/сек) и в случае численного решения нелинейной задачи (0,08 м/сек), то видно, что нелинейность убыстряет трансформацию по сравнению с линейным решением.

II. Предельный профиль и распределение $k(z)$ те же, что в случае I. Начальный профиль выбран так, что рассогласованность [1] начального и предельного профилей $Q = 0$ (случай б на фиг. 1).

Результаты расчета в этом случае показывают, что на расстоянии $x = 1520$ м получается 0,818 от общей величины трансформации, точнее говоря,

$$\tau_1[1520] = 1 - \frac{\max |U - u_\infty|}{\max |U_0 - u_\infty|}.$$

Если при этом учесть, что в предыдущем примере на расстоянии 1520 м получается только 0,572 от общей величины трансформации, то очевидно, что длина трансформации сильно зависит от вида начального профиля.

Наряду с этим по программе этой же задачи были произведены расчеты для проверки имеют ли место вышеуказанные закономерности в случае, когда задается для $k(z)$ закон с изломом, т. е.

$$\begin{aligned} k(z) &= \kappa v_* z & \text{при } z \leq h, \\ k(z) &= \kappa v_* h & \text{при } z > h, \end{aligned} \quad (5)$$

где h — высота приземного слоя воздуха,

κ — постоянная Кармана.

При этом предельный профиль скорости ветра, который устанавливается над водной поверхностью при $x = \infty$, получен как решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

при граничных условиях (3) и (4); он имеет следующий вид:

$$u_\infty = \frac{v_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{h} + 1 - \frac{H}{h} \right) + U_H \quad \text{для } z \leq h,$$

$$u_\infty = U_H - \frac{v_*}{\kappa h} (H - z) \quad \text{для } z > h.$$

Начальный профиль — распределение скорости ветра $U_0(z)$ на границе двух подстилающих поверхностей — принят в виде степенного закона

$$U_0(z) = U_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m, \quad m < 1.$$

Расчеты примеров в случае закона с изломом для $k(z)$ показывают, что явление „параллельного“ подхода профиля и сокращение длины трансформации при малой рассогласованности наблюдаются и в этом случае (фиг. 4, 5). При этом, ради простоты, рассогласованность грубо взята равной

$$Q = \int_0^H [U_0(z) - u_\infty(z)] dz, \quad (5')$$

так как мы не знаем точно асимптотического разложения U^* , считаем, что вследствие малости m можно брать в качестве Q (5).

Произведены расчеты для двух характерных значений $U_1 = 1 \text{ м/сек}$ (случай слабых скоростей) и $U_1 = 10 \text{ м/сек}$ (случай сильных скоростей) и для двух значений параметра шероховатости $z_0 = 10^{-3} \text{ м}$ и 10^{-5} для водной поверхности в четырех вариантах: I. $U_1 = 1 \text{ м/сек}$, $z_0 = 10^{-3} \text{ м}$; II. $U_1 = 1 \text{ м/сек}$, $z_0 = 10^{-5} \text{ м}$; III. $U_1 = 10 \text{ м/сек}$, $z_0 = 10^{-3} \text{ м}$; IV. $U_1 = 10 \text{ м/сек}$, $z_0 = 10^{-5} \text{ м}$. Эти расчеты дали возможность определить: 1. длину трансформации (то расстояние, на котором устанавливается новый профиль с определенной точностью) и 2. изменение скорости ветра над водной поверхностью в зависимости от расстояния до берега. При этом для определения длины трансформации брали критерий

$$\varepsilon = \frac{\max |U - U_0|}{\max |u_\infty - U_0|},$$

а изменение скорости ветра над водной поверхностью определялось отношением скоростей на высоте 2 м над водной поверхностью U_w над сушей U_c , т. е.

$$K = \frac{U_w}{U_c}.$$

Результаты этих вычислений приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Случай слабых скоростей

Варианты	$z_0, \text{м}$	$x, \text{м}$	50	$5 \cdot 10^2$	10^3	$1,1 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^4$
I	10^{-3}	ε	0,607	0,862	1,00	—	—
		K	1,09	1,13	1,15	—	—
II	10^{-5}	ε	0,357	0,453	0,525	0,837	0,906
		K	1,16	1,20	1,23	1,37	1,40

Таблица 2

Случай сильных скоростей

Варианты	$z_0, \text{м}$	$x, \text{м}$	50	$5 \cdot 10^2$	10^3	$1,1 \cdot 10^4$	$1,9 \cdot 10^4$
III	10^{-3}	ε	0,353	0,486	0,572	1,00	—
		K	1,09	1,13	1,15	1,26	—
IV	10^{-5}	ε	0,308	0,397	0,457	0,799	0,881
		K	1,16	1,20	1,23	1,41	1,45

Данные этих таблиц показывают, что:

1. Изменение K с расстоянием от берега, естественно, не зависит от характерного значения скорости U_1 (варианты I и III и II и IV).

2. Изменение K с расстоянием от берега сильно зависит от шероховатости. Если при большей шероховатости $z_0 = 10^{-3}$ м (варианты I и III) $K = 1,15$ на расстоянии 10^3 м, то при меньшей шероховатости $z_0 = 10^{-5}$ м (варианты II и IV) $K = 1,16$ уже на расстоянии 50 м.

3. Длина трансформации сильно зависит от характерного значения скорости U_1 при большей шероховатости $z_0 = 10^{-3}$ м. Так, если в случае слабых ветров трансформация заканчивается на расстоянии 10^3 м, то в случае сильных ветров она заканчивается на расстоянии $1,1 \cdot 10^4$ м, при этом на расстоянии 10^3 м имеем только 57% трансформации (варианты I и III).

4. Длина трансформации слабо зависит от характерного значения скорости U_1 при малой шероховатости $z_0 = 10^{-5}$ м. В двух случаях слабых и сильных ветров примерно 90% трансформации получается на расстоянии порядка 20 км, причем 50% — на расстоянии 10^3 м, остальная же половина затягивается до 20 км (варианты II и IV).

Полученные значения K хорошо согласуются с его средними значениями 1,15—1,30, полученными в экспериментальных работах, тщательно проанализированных автором работы [2]. Такие же значения получаются по материалам Черноморской экспедиции 1962 г. отдела физики приземного слоя атмосферы Главной геофизической обсерватории, любезно предоставленным мне заведующим отделом Л. Л. Лайхтманом.

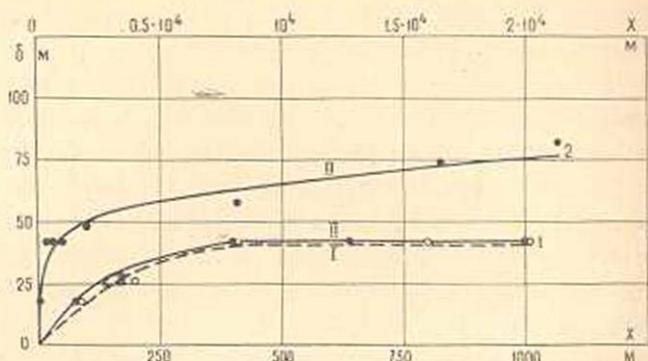
Результаты о зависимости длины трансформации от шероховатости являются предварительными. Относительно зависимости $\varepsilon(z_0)$ более уверенные выводы можно сделать при наличии большего расчетного материала для различных значений z_0 .

По расчетам вариантов I—IV была сделана попытка определить также высоту внутреннего пограничного слоя δ , которая, как известно, определяется как корень уравнения

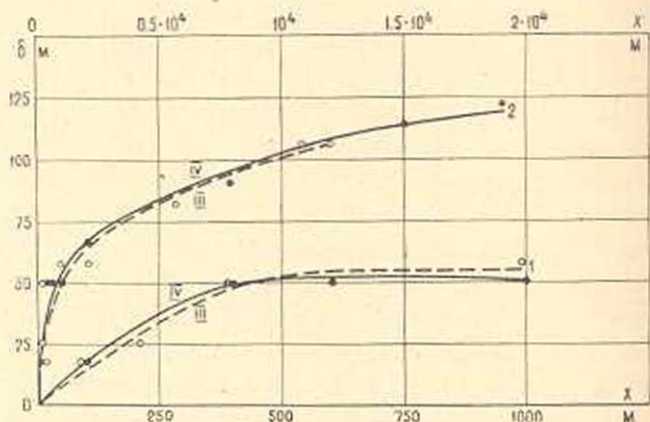
$$U(x, \delta) - U_0(\delta) = \Delta,$$

где $U(x, z)$ — профиль ветра над новой поверхностью, $U_0(z)$ — заданный профиль на стыке двух поверхностей; Δ — некоторая малая величина.

Кривые зависимости высоты пограничного слоя δ от расстояния до береговой черты для рассчитанных вариантов I—IV приведены на фиг. 2, 3. При удалении от берега высота пограничного слоя растет вначале очень быстро, затем этот рост замедляется. Сравнение значений δ в случаях сильных скоростей и слабых скоростей показывает, что исключая прибрежную зону, высота пограничного слоя при сильно развитой турбулентности значительно больше (фиг. 3), чем при слабой турбулентности (фиг. 2). Кривые, приведенные на фиг. 2 и 3, показывают также, что высота пограничного слоя δ слабо зависит от шероховатости второй подстилающей поверхности при переходе воздушного потока от более шероховатой к менее шероховатой поверхности.



Фиг. 2. Зависимость толщины пограничного слоя от расстояния до берега. Варианты I, II.
1.—при малых x (нижн. шкала),
2.—при больш. x (верхн. шкала).

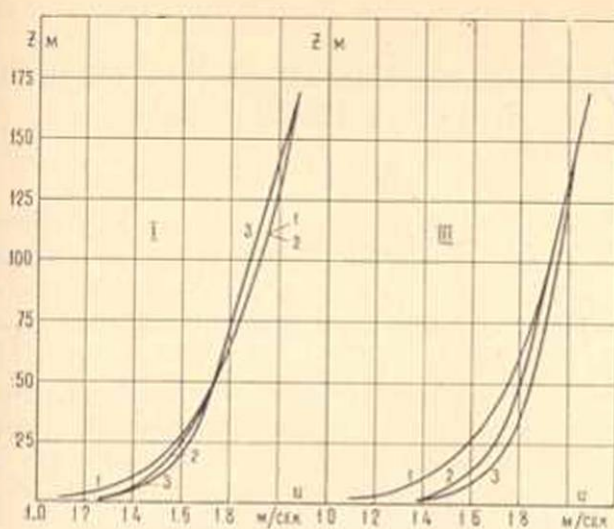


Фиг. 3. Зависимость толщины пограничного слоя от расстояния до берега. Варианты III, IV.
1.—при малых x (нижн. шкала),
2.—при больш. x (верхн. шкала).

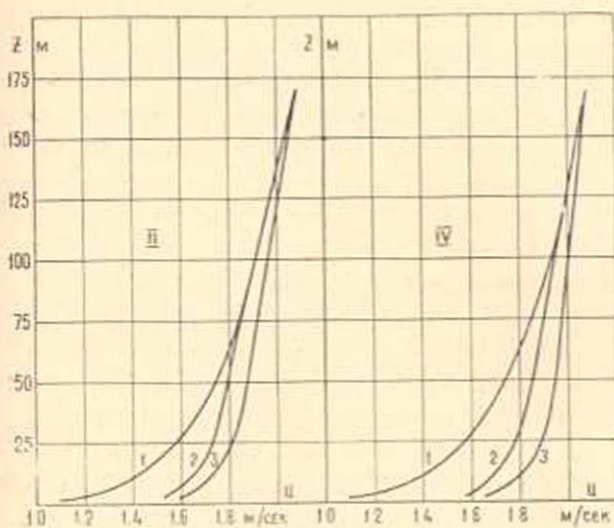
Зависимости скорости ветра от высоты для рассчитанных вариантов I—IV приведены на фиг. 4 и 5. Здесь приводятся профили ветра в начальном сечении $x=0$ (кривая 1), трансформирующийся профиль (кривая 2) и предельный профиль (кривая 3). При этом кривая 2 приведена для разных вариантов при разных расстояниях по x .

По изменению скорости ветра над новой подстилающей поверхностью в теоретических исследованиях известны две статьи в нашей литературе [3, 4]. В этих работах решается задача о трансформации ветра приближенно, методом внутреннего пограничного слоя М. Е. Цвеца [5].

К сожалению, мы не имеем возможности сравнить результаты наших расчетов с результатами этих работ, так как постановки задач отличаются.



Фиг. 4. Зависимость скорости ветра от высоты. Варианты I, III. 1—при $x=0$, 2—на расстоянии $x=1040$ м (I) и $x=7890$ м (III), 3—предельный профиль.



Фиг. 5. Зависимость скорости ветра от высоты. Варианты II, IV. 1—при $x=0$, 2—на расстоянии $x=15520$ м (II) и $x=15400$ м (IV), 3—предельный профиль.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность доктору физико-математических наук М. П. Тимофееву за ценные советы при выполнении этой работы.

Ն. 2. Պեղծում

ԲԱՍՈՒ ԴԱՇՏԻ ՏՐԱՆՍՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽԶ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ
ՄԻ ԹՎԱՅԻՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեր [1] աշխատության մեջ լուծված է քամու պրոֆիլի տրանսֆորմացիայի գծայնացրած հարթ, ստացվող խնդիրը ծածկույթի ադգեզիվային տակ, երբ արված է քամու արագության բաշխումը երկու մակերևույթների բաժանման սահմանում։ Այդ լուծումից ստացված են որոշ ֆիզիկական օրինաչափություններ։

Ստուգելու նպատակով՝ ստացվում են արդյոք վերահիշյալ ֆիզիկական օրինաչափությունները քամու դաշտի տրանսֆորմացիայի ոչ գծային հավասարման լուծումից, ներկա աշխատության մեջ բերվում է (1) հավասարման թվային լուծումը սահմանային (2)–(4) պայմանների դեպքում, որն ստացվել է էլեկտրոնային հաշվիչ «Ուրալ 1» մեքենայի վրա։

Այդ նպատակով, ներկայացնելով հավասարման և սահմանային պայմանների մեջ մանող ածանցյալները վերջավոր աճերի բացահայտ սխեմայով, ստացվում են (1) հավասարումը և սահմանային պայմանները (2), (3) և (4) տեսքով։ Հավասարումների այդ սխեման համաձայն կազմված ծրագրով հաշվված օրինակները ցույց են տալիս՝

1. Նշված ֆիզիկական օրինաչափություններն ստացվում են նաև ոչ գծային հավասարման լուծումից, ըստ որում դրանք ստացվում են տուրբուլենտը-շիման գործակցի բաշխման պարզ գծային օրենքի, ինչպես նաև նրա (5) տեսքի դեպքերում։

2. Այնից 2 կմ հեռավորության վրա լրացուցիչ արագության արժեքները, ստացված գծային հավասարման անալիտիկ լուծումից՝ 0,09 մ/վրկ և ոչ գծային հավասարման թվային լուծումից՝ 0,08 մ/վրկ, ցույց են տալիս, որ խնդիր-ն ուղղակիությունը արագացնում է տրանսֆորմացիայի երևույթը։

3. Զրի մակերևույթի վրա քամու արագության փոփոխության՝ (7) գործակցի համար ստացված արժեքները բավարար ճշտությամբ համընկնում են զրահանության մեջ նրա հայտնի արժեքների՝ 1,15–1,30 հետ։

Հաշվված օրինակների համար ստացված է ներքին սահմանային շերտի բարձրության՝ չ փոփոխությունը՝ ըստ ափից ունեցած հեռավորությունը։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Петросян Н. А. К вопросу о трансформации профиля ветра под влиянием подстилающей поверхности. Известия АН АрмССР, серия техн. наук, II, № 1, 1963.
2. Тимофеев М. П. Основные вопросы физики приземного слоя воздуха над водоемами. Автореферат докторской диссертации, Л., 1962.
3. Гандин Л. С. К вопросу о трансформации профиля ветра. Труды ГГО, вып. 33(95), 1952.
4. Дмитриев А. А. и Соколова И. Н. Схема оценки изменений скорости и профиля ветра при переходе с суши на море. Труды Морск. гидрофиз. ин-та, 4, 1954.
5. Швец М. Е. О приближенном методе решения некоторых задач геофизики и аэрогидромеханики. Труды ГГО, вып. 19(81), 1950.