

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

И. И. Круш

Применение принципа Вольтерра для приближенного
 расчета ползучести и прочности материалов,
 обладающих свойствами наследственности и старения

Как показано в работе [1], при обработке серии кривых ползучести, полученных при разном возрасте материала, обладающего свойствами наследственности и старения, целесообразно использовать ядро типа Н. Х. Арутюняна:

$$R(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left(\frac{A}{\tau} + C \right) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \right\}, \quad (1)$$

где A , C , γ — постоянные параметры, A — характеристика старения материала.

Поэтому решение задач с учетом старения на основе принципа Вольтерра связано во многих случаях с необходимостью расшифровывать функции интегральных операторов с ядрами вида (1).

Расшифровка функции интегральных операторов, у которой в числителе находится некоторая функция времени, а в знаменателе — сумма интегральных операторов, эквивалентна решению интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода с ядром в виде суммы ядер операторов. Если ограничиться приближенным решением, аппроксимируя ядра вида (1) с помощью экспонент, нужно определить максимальную ошибку, получающуюся при такой аппроксимации.

Пусть $R(t, \tau)$ — положительное ядро интегрального уравнения

$$\tau(t) = \varphi(t) - \int_{t_1}^t R(t, \tau) \tau(\tau) d\tau, \quad (2)$$

а $f(t, \tau)$ — аппроксимирующее ядро уравнения

$$\tau_1(t) = \varphi(t) - \int_{t_1}^t f(t, \tau) \tau_1(\tau) d\tau, \quad (3)$$

решение которого может быть найдено

$$\tau_1(t) = (1 - \Phi^*) \varphi(t).$$

Здесь

$\Phi^* \varphi(t) = \int_{t_1}^t \Phi(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau$, $\Phi(t, \tau)$ — резольвента ядра $f(t, \tau)$. Добавим

к обеим частям уравнения (2) интеграл $\int_{t_1}^t f(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau$. Решением полученного при этом интегрального уравнения будет

$$\sigma(t) = \varphi_1(t) - \int_{t_1}^t \Phi(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) - \int_{t_1}^t [R(t, \tau) - f(t, \tau)] \sigma(\tau) d\tau.$$

Пусть

$$R(t, \tau) - f(t, \tau) \geq 0 \quad \text{и} \quad \sigma(t) \leq \sigma(\tau) \leq \sigma(t_1), \quad \text{где} \quad t_1 \leq \tau \leq t.$$

Тогда

$$\varphi(t) - \sigma(t_1) h(t) \leq \varphi_1(t) \leq \varphi(t) - \sigma(t) h(t), \quad (5)$$

где

$$h(t) = \int_{t_1}^t [R(t, \tau) - f(t, \tau)] d\tau.$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\sigma_1(t) - \sigma(t_1) F(t) \leq \sigma(t) \leq \frac{\sigma_1(t)}{1 + F(t)}, \quad (6)$$

где

$$F(t) = h(t) - \int_{t_1}^t \Phi(t, \tau) h(\tau) d\tau \geq 0.$$

Полученная двусторонняя оценка (6) точного решения уравнения (2) может быть использована для уточнения приближенного решения этого уравнения. Для этого целесообразно взять арифметическое среднее предельных значений

$$\sigma(t) \approx \frac{1}{2} \left[\sigma_1(t) \frac{2 + F(t)}{1 + F(t)} + \sigma(t_1) F(t) \right]. \quad (7)$$

Повторение выкладок с отрицательным ядром приводит к несколько иному неравенству

$$\sigma_2(t) + \sigma(t_1) F_1(t) \leq \sigma(t) \leq \frac{\sigma_2(t)}{1 - F_1(t)}, \quad (8)$$

где

$$F_1(t) = h(t) + \int_{t_1}^t \Phi(t, \tau) h(\tau) d\tau.$$

$\lambda_1(t)$ —точное решение интегрального уравнения (3) с отрицательным экспоненциальным ядром.

Для оценки погрешности, получающейся при использовании формулы (7) по сравнению с точным решением, используем полученное в работе [1] точное решение интегрального уравнения (2), в котором ядро взято в виде (1). Такое ядро положительно при любых допустимых значениях переменных.

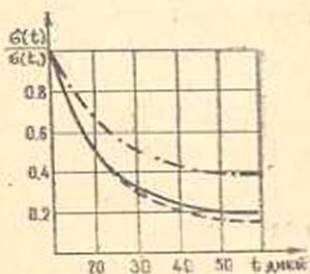
Пусть

$$f(t, \tau) = \gamma C e^{-\gamma(t-\tau)}.$$

При этом выполняются все условия, использованные при выводе формулы (7).

На графике (фиг. 1) отражены результаты вычислений для бетона, замешанного на нормальном портланд-цементе со следующими параметрами ядра ползучести [1]: $A = 9,6$ дней, $C = 1,8$, $\gamma = 0,026 \frac{1}{\text{день}}$.

Как видно из графика, кривые простой релаксации, построенные на основе точного решения (сплошная линия) и при помощи формулы (7) (пунктирная линия) для момента первоначального нагружения $t_1 = 9,6$ дня, отличаются незначительно. Верхняя кривая отражает процесс простой релаксации в „старом“ бетоне. Вспомогательная функция $F(t)$ пропорциональна $\frac{A}{t_1}$. Поэтому точность формулы (7) повышается с ростом t_1 .



Фиг. 1.

В качестве примера рассмотрим задачу о влиянии ползучести материала на величину прогиба прямоугольной ортотропной пластинки, заделанной по краю и изгибаемой равномерно распределенной нагрузкой $q(t)$. Главные направления параллельны направлению сторон. Приближенное решение соответствующей идеально упругой задачи без учета сил инерции имеется в работе [3]:

$$W_0(x, y, t) = \frac{\psi(x, y, t)}{D_1 + \delta D_2 + \epsilon^4 D_3}, \quad (9)$$

где

$$\delta = \frac{2}{3} \epsilon^2, \quad \epsilon_2 = \frac{b}{a}, \quad \psi(x, y, t) = \frac{q(t) a^4}{12\pi} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{a}\right),$$

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_3 = D_1 \nu_1 + \frac{G h^3}{3}.$$

E_1, E_2, ν_1, ν_2 —мгновенные модули Юнга и коэффициенты Пуассона для главных направлений, G —модуль сдвига.

Согласно принципу Вольтерра, заменим E_1 , E_2 и G операторами:

$$\bar{E}_1 = E_1(1 - H_1^*), \quad \bar{E}_2 = E_2(1 - H_2^*), \quad \bar{G} = G(1 - H_3^*), \quad (10)$$

где

$$H_i(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left(\frac{A_i}{\tau} + C_i \right) \left[1 - e^{-\beta_i(t-\tau)} \right] \right\}, \quad (i=1, 2, 3). \quad (11)$$

Коэффициенты Пуассона считаем постоянными. Для подтверждения того, что ядро релаксации можно брать с достаточной степенью точности в том же виде, что и ядро ползучести, нужно обработать серию кривых релаксации, полученных при точном решении уравнения (2) с ядром Н. Х. Арутюняна. При значениях параметров ядра релаксации (11) $C' = 0,6$, $A' = 2, 3$ дня, $\beta = 0,08 \frac{1}{\text{день}}$ кривые простой релаксации незначительно отличаются от аналогичных кривых, полученных при точном решении уравнения (2) с ядром (1).

Подставив (10) в (9), получим:

$$W(x, y, t) = \frac{W_0(x, y, t)}{1 - \sum_{i=1}^3 H_i^* N_i},$$

где

$$N_1 = \frac{E_1}{M} (1 - \delta \nu_2), \quad N_2 = \frac{E_2}{M} c^4, \quad N_3 = \frac{2G}{M} \delta (1 + \nu_1 \nu_2),$$

$$M = E_1 (1 + \delta \nu_2) + E_2 c^4 + 2G \delta (1 + \nu_1 \nu_2).$$

Используя неравенство (8), получим приближенное решение задачи:

$$W(x, y, t) \approx \frac{1}{2} \left[W_1(x, y, t) \frac{2 - F_1(t)}{1 - F_1(t)} + W(x, y, t_1) F_1(t) \right]. \quad (12)$$

Здесь

$$F_1(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i N_i}{t_i} \left[1 - \frac{b_i}{r_i} - \frac{b_i}{\beta_i - r_i} e^{-\beta_i(t-t_i)} + \frac{b_i}{r_i} e^{r_i(t-t_i)} + \frac{b_i}{\beta_i - r_i} e^{(r_i - \beta_i)(t-t_i)} \right], \quad (13)$$

$W_1(x, y, t)$ — решение задачи без учета старения:

$$W_1(x, y, t) = W_0(x, y, t) + \sum_{i=1}^3 b_i \int_{t_i}^t W_0(x, y, \tau) e^{r_i(t-\tau)} d\tau. \quad (14)$$

Для определения параметров r_i и b_i целесообразно воспользоваться системой уравнений, полученных М. И. Розовским в работе [2]:

$$1 - \sum_{i=1}^3 \frac{z_i}{\beta_i + r_k} = 0, \quad (15)$$

$$1 - \sum_{k=1}^3 \frac{b_k}{\beta_i + r_k} = 0, \quad (i=1, 2, 3).$$

Здесь $[z_i = N_i \beta_i C_i]$. Параметры r_i , являющиеся корнями кубического уравнения (15), должны быть действительными отрицательными или комплексными с отрицательной действительной частью. Это необходимо и достаточно, чтобы решение (14) было устойчивым во времени при $t \rightarrow \infty$. Для исследования устойчивости решения (14) при $t \rightarrow \infty$ удобно использовать метод Гурвица, согласно которому все корни уравнения (15) будут действительными отрицательными или комплексными с отрицательной действительной частью, если выполняется система неравенств:

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i - z_i > 0, \quad (16)$$

$$\beta_1 \beta_2 \beta_3 - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k \neq i}}^3 z_i \beta_j \beta_k > 0, \quad (17)$$

$$\sum_{i,j=1}^3 \beta_i^2 (\beta_j - z_j) + 2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \sum_{i,j=1}^3 z_i^2 \beta_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 z_i z_j \beta_k > 0. \quad (18)$$

Покажем, что условие (18) является следствием условий (16) и (17). Отбросив в неравенстве (18) две последние суммы и используя (17), получим:

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k \neq i}}^3 \beta_i (\beta_j^2 + \beta_k^2) + z_i (\beta_j^2 - \beta_k^2) > 0. \quad (19)$$

В неравенстве (19) любой коэффициент при β_i больше любого коэффициента при z_i . Поэтому, если выполняется неравенство (16), то выполняется и неравенство (19). Это означает, что выполнение условий (16) и (17) является достаточным для устойчивости решения (14) при $t \rightarrow \infty$.

Из неравенства (8) видно, что прогиб пластинки может быть определен достаточно точно, если выполняется условие $1 - F_1(t) \gg 0$, так как $F_1(t) > 0$. Если это условие не выполняется, или $F_1(t) \geq 1$, остается оценка:

$$W_1(x, y, t) + W(x, y, t_1) F_1(t) \leq W(x, y, t).$$

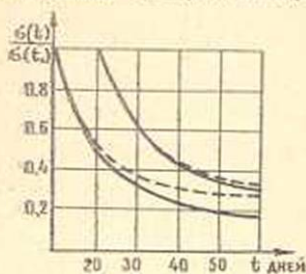
Так как функция $F_1(t)$ достигает наибольшего значения при $t \rightarrow \infty$, переходя к пределу в (13) при $t \rightarrow \infty$, получим условие, при котором формула (12) дает достаточно точное решение задачи при любом t :

$$t_1 \gg \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{b_i}{r_i} - \frac{b_i}{\beta_i - r_i} \right) A_i N_i.$$

Устойчивость решения (11) во времени при $t \rightarrow \infty$ не зависит от возраста материала и его характеристик старения. Поэтому для приближенного решения некоторых задач с учетом наследственности и старения материала целесообразно использовать ядро вида:

$$\gamma \left(\frac{A}{t_1} + C \right) e^{-\gamma(t-t_1)}, \quad (20)$$

с помощью которого можно обработать серию кривых простой ползучести или релаксации так же хорошо, как и с помощью ядра Н. Х. Арутюняна, так как интегралы от этих ядер совпадают. Используя в качестве аппроксимирующего ядро (20), нельзя определить макси-



Фиг. 2.

мальную ошибку, получающуюся при такой аппроксимации, по формулам (6) или (8), так как при этом не выполняются условия, использованные при выводе этих формул. Чтобы приблизительно оценить точность решения, полученного при решении задачи с помощью ядра (20), можно сравнить серию кривых простой релаксации, полученных при решении интегрального уравнения (2) с таким ядром, с соответствующей серией кривых релаксации, полученных с помощью ядра Н. Х. Арутюняна. Как видно из графика (фиг. 2), при $t_1 > 20$ дней кривые простой релаксации, полученные для бетона, замешанного на нормальном портланд-цементе, отличаются незначительно.

Используя в приведенном выше примере в качестве ядер интегральных операторов функции вида (20), найдем математически точное решение, совпадающее по форме с решением для старого материала (14), но параметры r_i и b_i будут зависеть от $\frac{A_i}{t_1}$. Подставляя в неравенства (16) и (17) соответствующие параметры ядра (20), получим условие устойчивости этого решения при $t \rightarrow \infty$:

$$t_1 > \max(\tau_1, \tau_2),$$

где

$$\tau_1 = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i N_i \beta_i}{\sum_{i=1}^3 \beta_i (1 - N_i C_i)}, \quad \tau_2 = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i N_i}{1 - \sum_{i=1}^3 N_i C_i}.$$

Так как при использовании ядра (20) отпадают все математические трудности, связанные с учетом старения, его удобно использовать для получения необходимых условий схватывания для старею-

щего материала. Для этого рассмотрим задачу образования равновесной трещины двумя противоположно направленными сосредоточенными силами T , приложенными в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $2L$. Как показано в работе [4], минимальная сила T_* , при которой образуется равновесная трещина, может быть найдена из условия:

$$T \leq \pi g_0 K,$$

где

$$g_0 = \sqrt{2} R_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{L^2}{R_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(2-\nu) L^2}{(1-\nu) R_0^2} \right]^{-1},$$

K — модуль сцепления, R_0 — минимальный радиус трещины.

Для устойчивости процесса деформации при $t \rightarrow \infty$ должно выполняться условие $\lim_{t \rightarrow \infty} T_*(t) > 0$, ибо в противном случае любые, сколь угодно малые напряжения приведут к образованию трещины. Зависимостью от времени коэффициента g_0 пренебрегаем, так как необходимое условие схватывания не должно зависеть от расстояния между точками приложения внешних сил. Тогда необходимым условием схватывания будет

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) > 0. \quad (21)$$

Чтобы определить зависимость от времени модуля сцепления K , воспользуемся формулой [5]:

$$K^2 = \frac{\pi s E}{1 - \nu^2}, \quad (22)$$

где s — плотность поверхностной энергии, которую можно считать постоянной.

Заменяем упругие константы соответствующими операторами [6]:

$$\bar{E} = E [1 - \alpha H^*(-\beta)], \quad \bar{\nu} = \nu \left[1 + \frac{1-2\nu}{2\nu} \alpha H^*(-\beta) \right], \quad (23)$$

где

$$\alpha = \beta \left(\frac{A'}{t_1} + C' \right), \quad H(-\beta; t, \tau) = e^{-\beta(t-\tau)}.$$

Подставив (23) в (22) и воспользовавшись фундаментальными свойствами интегральных операторов с экспоненциальными ядрами, получим:

$$K^2(t) = K^2(t_1) \left[1 - \frac{3(1-\nu)}{4(1+\nu)} \alpha H^*(-\beta - x_1) - \frac{1+\nu}{4(1-\nu)} \alpha H^*(-\beta + x_2) \right]. \quad (24)$$

Здесь

$$x_1 = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \alpha, \quad x_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \alpha.$$

Решение (24) будет устойчивым при $t \rightarrow \infty$, если $x_2 - \beta \leq 0$. Используя это неравенство и условие (21), получим:

$$t_1 > \max(\theta_1, \theta_2).$$

$$\text{где } \theta_1 = \frac{A'(1-2\nu)}{2(1-\nu) - C'(1-2\nu)}, \quad \theta_2 = \frac{A'}{1-C'}$$

Очевидно, что $\theta_2 \geq \theta_1$ при $\nu < 0,5$. Поэтому необходимым условием схватывания будет:

$$t_1 > \frac{A'}{1-C'}$$

Подставив значения A' и C' для бетона, замешанного на нормальном портланд-цементе, найдем: $t_1 > 5,7$ дня.

Вопрос о нагружении конкретных конструкций связан с необходимостью получения в каждом случае достаточных условий схватывания, которые можно интерпретировать, как условия устойчивости системы при $t \rightarrow \infty$.

Пользуюсь случаем поблагодарить проф. М. И. Розовского за предложенную тему и обсуждение работы.

Днепропетровский горный институт

Поступила 10 XII 1962

Б. Б. КРУШ

ՎՈՆՏԵՐՐԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԾԵՐԱՑՄԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՈՒ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Ժառանգականության և ծերացման հատկություններով օժտված նյութերի սողրի և ամրության հաշվարկի համար առաջարկվում է օգտագործել վոլտերրի տիպի ինտեգրալ հավասարումների մոտավոր լուծման մեթոդ՝ հիմնված կո-րիդի ապրոքսիմացիայի վրա: Գտնված է մոտավոր լուծման երկկողմանի դե-հատկան: Առաջարկվում է երկարատև ամրությունը վոլտերրի սկզբունքի ոգ-նությամբ հետազոտելու դեպքում օգտագործել ծերացման գործոնը մոտավոր կերպով հաշվի առնող կորիդ: Որպես օրինակներ դիտարկվում են օրթոտրոպ թիթեղիկի ճկվածքը և կապակցման պայմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.-Л., 1952.
2. Розовский М. И. Об одном классе функций и их приложениях. Журнал вычис. мат. и мат. физики, 2, № 1, 1962.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М. Л., 1947.
4. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. Прикл. мат. и мех., 23, в. 3, 1959.
5. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями. Прикл. мат. и мех., 23, в. 5, 1959.
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой сферы с последствием. Прикл. мат. и мех., 12, в. 1, 1948.