ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVI, № 4, 1963 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Д. И. Шерман

О приведении к интегральному уравнению Фредгольма некоторых задач теории стационарных колебаний

В наших работах [1, 2] был указан прием, позволяющий свести достаточно широкий класс задач математической физики непосредственно к интегральному уравнению Фредгольма.

В настоящей статье на ряде примеров покажем, каким образом, несколько видоизменив этот прием, можно в большем числе случаев в значительной степени упростить интегральные уравнения для рассматриваемых задач и при том так, что их ядра будут выражены в элементарных или табулированных функциях*.

---

* Предлагаемая вниманию читателей работа была давно завершена и подготовлена к печати. Однако по некотором размышлении мы сочли более целесообразным пока воздержаться от ее опубликования и сперва (для аппробации изложенного в ней приема) заняться углубленным изучением различных практически важных задач статической и динамической теории упругости. Им были посвящены, например, статьи [3—6]. В них, как правило, серьезное внимание уделялось вопросу разрешимости построенных для рассматривавшихся задач регулярных интегральных уравнений. Обычно такое исследование удавалось провести; подчас оно требовало незначительной (и порой очевидной) модификации используемого приема. У нас создалось достаточно ясное и (нужно полагать) обоснованное суждение о действенности этого способа применительно к определенному классу задач. Впоследствии же, по ряду обстоятельств, мы отвлеклись от дальнейшей систематической его разработки и затем обращались к нему лишь спорадически, когда в том появлялась надобность. К сожалению, в каждом отдельном случае нами приводились лишь окончательные формулы представления для искомых функций и конструируемые при их помощи интегральные уравнения [3—11]. Вывод формул представления, составляющих в принципе основу процесса решения, из-за недостатка места опускался.

Между тем, по свидетельству некоторых читателей, пытавшихся применить упомянутый прием к другим задачам механики, оказалось весьма затруднительным его воспроизвести по встречающимся иногда в названных статьях схематическим замечаниям общего характера. Особенно настойчивые претензии и сетования по тому же поводу поступают со стороны молодых научных работников и аспирантов.

Сказанное и, помимо этого, известная уверенность (подкрепляемая выполненными исследованиями), что способ, о котором здесь идет речь, при надлежащем анализе и обобщении, принесет в какой-то мере пользу при рассмотрении иных вопросов, побуждает нас вновь вернуться к данной работе. Мы публикуем ее впервые, оставив почти неизменным первоначальный текст и только снабдив кое-где изложение пояснениями (главным образом, в форме подстрочных примечаний).

Результат, полученный в § 1, приведен без вывода и в несколько видоизмененной форме в статье [7]. Содержание § 2, 3 до сих пор вообще не публиковалось. Формулы представления для искомых (продольного и поперечного) потенциалов в задаче, разобранной в последнем § 4, даны в статье [5] (в значительно модифи-

§ 1. Обозначим через S конечную односвязную область, лежащую в плоскости $z=x+iy$ и ограниченную замкнутой кривой L, координаты точек которой будем считать достаточное число раз дифференцируемыми по дуге s. Кроме того, примем, что обход кривой L совершается против движения часовой стрелки и нормаль „n“ к ней направлена изнутри S во вне.

Сначала рассмотрим задачу об определении функции $u(x, y)$, непрерывной в замкнутой области S вместе со своими частными производными до m-го порядка (включительно), удовлетворяющей в S дифференциальному уравнению

$$\Delta u-\lambda^2 u=0 \tag{1.1}$$

и на L предельному равенству

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j}=f(s), \tag{1.2}$$

где Δ — оператор Лапласа, λ — вещественная постоянная, и $a_{kj}(s)$ и $f(s)$ — некоторые заданные функции. Допустим, что из них $a_{kj}(s)$ удовлетворяют условию Гельдера, а $f(s)$ непрерывна на L. Далее, предположим, что

$$\left|\sum_{j=0}^{m}(i)^j a_{mj}\right|>0. \tag{1.3}$$

Следуя приему, изложенному в цитированных статьях, возьмем искомую функцию в виде*

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi} \int_{L} \nu(s) F(s; x, y)\, ds, \tag{1.4}$$

положив**

$$F=\int \frac{\exp \varphi(\alpha)}{g(\alpha)}\, d\alpha. \tag{1.5}$$

цированном виде и без сколь-либо удовлетворительных наводящих указаний на то, каким образом они были извлечены из соответствующего обобщенного фундаментального решения).

В свое время С. Х. Шаташвили был ознакомлен с §§ 1, 2 работы; это позволило ему, используя (подчас с упрощениями) предложенный способ, рассмотреть важные плоские и пространственные задачи теории установившихся колебаний [12—16]. В частности, им приведена к уравнению Фредгольма задача колебаний с заданными внешними напряжениями для трехмерной среды, ограниченной выпуклой поверхностью.

* К уравнению (1.1) приводит изучение ряда важных вопросов физики; оно описывает установившийся процесс при замене λ на $i\lambda$.

** Проведем в некоторой точке $M(\xi^*, \eta^*)$ кривой L касательную к ней, и в полуплоскости, содержащей отрицательную полунормаль (в той же точке), введем функцию (в ней ξ и η — текущие координаты точек касательной)

$$F^*(s^*; x, y)=\frac{1}{2\pi} \int \int \mu(\xi, \eta, \alpha) \exp \varphi(\alpha)\, d\alpha\, d\sigma,$$

$$\varphi = i\alpha\{b(x-\xi) - a(y-\eta)\} + \{a(x-\xi) + b(y-\eta)\}\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}, \quad (1.6)$$

$$g = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}\left(ib\alpha + a\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\right)^{m-j}\left(-ia\alpha + b\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\right)^{j}, \quad (1.7)$$

где под радикалом $\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}$ нужно понимать его арифметическое значение; ξ и η — координаты точки контура L, дуга которой равна s, и

$$a = \cos(n, \xi), \qquad b = \cos(n, \eta). \quad (1.8)$$

Интеграл (1.5), очевидно, имеет смысл для всех точек $M(x, y)$ в области S, если кривая L выпуклая. Однако нетрудно показать, что функция $F(s; x, y)$ может быть „продолжена" и будет сохранять смысл также в том случае, когда кривая L не выпуклая [2].

Подставив выражение для $u(x, y)$ из равенства (1.4) в (1.2), получим для определения плотности $\nu(s)$ интегральное уравнение Фредгольма. Для краткости, мы не будем его здесь выписывать.

Отметим, что вопрос о существовании решения задачи и возможности представления его в форме (1.4) мы оставляем открытым. Однако следует иметь в виду, что определитель Фредгольма для ядра нашего интегрального уравнения является аналитической функцией параметра λ, и поэтому взятое представление для искомой функции может оказаться невозможным лишь для дискретного ряда значений λ. Очевидно также, что только для этих исключительных значений параметра задача может не иметь решения.

Интегральное уравнение, к которому нами сведена задача, имеет все же довольно сложный вид. Как мы сейчас покажем, оно может быть заменено другим уравнением, значительно более простым.

удовлетворяющую уравнению (1.1), где μ — некоторая функция от переменных ξ, η и α; s^* — дуга L, соответствующая $M(\xi^*, \eta^*)$, и $d\sigma$ — элемент касательной (равный $\pm\frac{d\xi}{b^*}$, если $b^*\neq 0$, или $\pm d\eta$, если $b^*=0$; при этом, очевидно, под a^* и b^* следует понимать направляющие косинусы нормали также в $M(\xi^*, \eta^*)$).

Далее, предполагая, что для F^* на касательной имеет место условие вида (1.2), в котором коэффициенты a_{kj} постоянны и равны их значению в точке $M(\xi^*, \eta^*)$, определим из него функцию μ. Именно, выполнив формально требуемые дифференцирования под знаком интеграла и положив при переходе в пределе на касательную

$$a^*(\xi_0-\xi) + b^*(\eta_0-\eta) = 0, \quad \left(\varphi = \frac{i\alpha}{b^*}(\xi_0-\xi);\ \mp i\alpha(\eta_0-\eta)\right),$$

получим, пользуясь представлением функции f в виде интеграла Фурье,

$$\mu = \frac{f}{g}.$$

Наконец, будем считать $f=0$ на всей касательной, исключая точки $M(\xi^*, \eta^*)$, в которой возьмем $f = \frac{2\pi}{d\sigma}$. Тогда, опустив в обозначениях звездочки, придем к функции F, совпадающей с указанной в тексте.

Как ясно из сказанного, функция F является аналогом, так называемого, фундаментального решения (или обобщенным фундаментальным решением) задачи.

Отметим, что таким же образом, путем непосредственного применения интегралов Фурье, могут быть построены аналоги фундаментальных решений для других задач, рассмотренных ниже (сравн. с [3]).

Формулу (1.5) запишем в виде

$$F = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_0^A \frac{\exp\varphi(\alpha)}{g(\alpha)}\,d\alpha + 2\,\mathrm{Re}\int\limits_A^\infty \frac{\exp\varphi(\alpha)}{g(\alpha)}\,d\alpha, \tag{1.9}$$

где символ Re указывает, что берется вещественная часть рядом стоящего выражения, и A — некоторое фиксированное достаточно большое положительное число.

Первое слагаемое в правой части последнего равенства остается непрерывным вместе со своими частными производными любого порядка по переменным x и y при переходе точки $M(x, y)$ через границу L. Во втором же слагаемом разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням $\frac{1}{\alpha}\cdot$ Тогда, положив

$$\varphi^*(\alpha) = \alpha(a+ib)\overline{(z-t)}, \tag{1.10}$$

где $t = \xi + i\eta$ (черта сверху, как обычно, указывает, что берется функция, сопряженная с той, над которой она проведена), будем иметь

$$F = 2\,\mathrm{Re}\frac{1}{(a+ib)^m \sum\limits_{j=0}^{m} (-t)^j a_{mj}} \int\limits_A^\infty \frac{\exp\varphi^*(\alpha)}{\alpha^m}\,d\alpha + \cdots, \tag{1.11}$$

причем через многоточие обозначены первое слагаемое из (1.9) и члены ряда, в которых знаменатели подынтегральных функций содержат α в более высоких степенях.

С помощью интегрирования по частям получим

$$\int\limits_A^\infty \frac{\exp\varphi^*(\alpha)}{\alpha^m}\,d\alpha = \frac{(a+ib)^{m-1}\overline{(z-t)}^{m-1}}{(m-1)!}\int\limits_A^\infty \frac{\exp\varphi^*(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(a+ib)^k\,\overline{(z-t)}^k}{(m-1)\cdots(m-1-k)A^{m-k-1}}, \tag{1.12}$$

и затем, учитывая равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{\exp\varphi^*(\alpha) - \exp(-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = -\ln(a+ib)\,\overline{(z-t)},$$

найдем

$$\int\limits_A^\infty \frac{\exp\varphi^*(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = -\ln\overline{(z-t)} - \ln(a+ib) -$$

$$- \int\limits_0^A \frac{\exp\varphi^*(\alpha) - \exp(-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha + \int\limits_A^\infty \frac{\exp(-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha. \tag{1.13}$$

В связи с этим, формула (1.11) может быть записана в виде

$$F = -2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{\overline{(z-t)^{m-1}}\;\overline{\ln(z-t)}}{(a+ib)\sum\limits_{j=0}^{m}(-i)^j a_{mj}} + \cdots \tag{1.14}$$

В число невыписанных слагаемых, отмеченных многоточием, здесь включены также новые функции (полученные при использовании (1.12) и (1.13)), остающиеся непрерывными вместе со своими частными производными любого порядка по координатам x и y при стремлении точки $M(x, y)$ к кривой L.

Из тех же формул (1.12) и (1.13) следует, что частные производные m-ого порядка от слагаемого из числа указанных выше и невыписанных в равенстве (1.11), содержащего в знаменателе подинтегральной функции α^{m+1}, имеют, вообще говоря, логарифмическую особенность, когда $M(x, y)$ лежит на L. Производные того же порядка от остальных аналогичных слагаемых в том же равенстве, содержащих в знаменателе подинтегральной функции α в более высоких степенях, очевидно, остаются при этом непрерывными.

Легко проверить, что выражение $I_0(\lambda r)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y-\eta}{x-\xi}$, где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ и $I_0(\lambda r)$ — функция Бесселя первого рода и нулевого порядка от мнимого аргумента $i\lambda r$, удовлетворяет уравнению (1.1). Следовательно, этому же уравнению будет удовлетворять также функция (в ней $K_0(\lambda r)$ — функция Макдональда)

$$Q_m = \left(\frac{2}{\lambda^2}\right)^{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m-1}\left\{K_0(\lambda r) + iI_0(\lambda r)\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y-\eta}{x-\xi}\right\}, \tag{1.15}$$

главная часть которой при разложении $I_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$ в ряды, как нетрудно убедиться, равна

$$-\frac{1}{(m-1)!}\,\overline{(z-t)^{m-1}}\,\overline{\ln(z-t)}. \tag{1.16}$$

Отсюда, положив

$$G(s;\, x,\, y) = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{Q_m}{(a+ib)\sum\limits_{j=0}^{m}(-i)^j a_{mj}} \tag{1.17}$$

и заменив в формуле (1.4) функцию $F(s;\, x,\, y)$ на $G(s;\, x,\, y)$, мы после подстановки из нее выражения для $u(x, y)$ в граничное условие (1.2), очевидно, снова получим для определения плотности $\nu(s)$ уравнение Фредгольма, однако значительно более простое по сравнению с тем, о котором говорилось ранее.

По вопросу о том, насколько законно представление искомой функции в новой видоизмененной форме, сохраняет силу замечание, сделанное выше.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $m=1$. При этом

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\nu(s)\frac{1}{a_{10}^2(s)+a_{11}^2(s)}\Big\{(a_{10}(s)\cos(n, \xi)+a_{11}(s)\cos(n, \eta))\times$$

$$\times K_0(\lambda r)-(a_{11}(s)\cos(n, \xi)-a_{10}(s)\cos(n, \eta))\,I_0(\lambda r)\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}\Big\}ds. \tag{1.18}$$

Положив (γ-постоянная Эйлера)

$$I_0(\lambda r)=1+I_0^*(\lambda r),\quad K_0(\lambda r)=-\ln r+K_0^*(\lambda r)=$$

$$=K_0^{(0)}(\lambda r)-\left(\ln\frac{\lambda}{2}+\gamma\right)I_0(\lambda r) \tag{1.19}$$

и замечая, что функции $I_0^*(\lambda r)\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}$ и $K_0^*(\lambda r)$ имеют частные производные первого порядка непрерывные, когда точка $M(x, y)$ лежит на L, получим после элементарных преобразований следующее уравнение Фредгольма

$$\nu(s_0)+\int\limits_{L}\nu(s)K(s, s_0)\,ds=f(s_0), \tag{1.20}$$

где s_0 — дуга точки $M(\xi_0, \eta_0)$, к которой стремится $M(x, y)$, и ядро ($r_0=\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}$)

$$K(s, s_0)=\frac{1}{\pi\{a_{10}^2(s)+a_{11}^2(s)\}}\Big[\{a_{10}(s)a_{10}(s_0)+a_{11}(s)a_{11}(s_0)\}\frac{d\ln r_0}{dn}+$$

$$+\{a_{10}(s)a_{11}(s_0)-a_{11}(s)a_{10}(s_0)\}\frac{d\ln r_0}{ds}+\{a_{10}(s)\cos(n, \xi)+$$

$$+a_{11}(s)\cos(n, \eta)\}\Big\{a_{00}(s_0)K_0(\lambda r_0)+\Big(a_{10}(s_0)\frac{\partial}{\partial\xi_0}+$$

$$+a_{11}(s_0)\frac{\partial}{\partial\eta_0}\Big)K_0^*(\lambda r_0)\Big\}-\{a_{11}(s)\cos(n, \xi)-a_{10}(s)\cos(n, \eta)\}\times$$

$$\times\Big\{a_{00}(s_0)I_0(\lambda r_0)\operatorname{arctg}\frac{\eta_0-\eta}{\xi_0-\xi}+$$

$$+\Big(a_{10}(s_0)\frac{\partial}{\partial\xi_0}+a_{11}(s_0)\frac{\partial}{\partial\eta_0}\Big)I_0^*(\lambda r_0)\operatorname{arctg}\frac{\eta_0-\eta}{\xi_0-\xi}\Big\}\Big]. \tag{1.21}$$

Примечание 1. Полагая в (1.2) $m=0$ и $a_{00}=1$, будем иметь так называемую задачу Дирихле. При этом, возвращаясь вновь к равенствам (1.4) и (1.5), получим на основании второй из нижеприведенных формул (2.9)

$$u(x, y)=\frac{i}{2}\int\limits_{L}\nu(s)\frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r)}{dn}ds.$$

Отсюда, устремляя точку $M(x, y)$ на контур L, придем к уравнению*

$$\nu(s_0) + \frac{i}{2}\int\limits_L \nu(s)\frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r_0)}{dn}ds = f(s_0). \tag{1.22}$$

---

* Мы не останавливаемся на исследовании разрешимости интегральных уравнений, выведенных в данном и других параграфах работы. В ряде случаев удается провести (правда, не вполне законченное) рассмотрение этого вопроса, придерживаясь следующей (ставшей довольно распространенной) схемы. Сначала изучается интегральное уравнение при значении параметра $\lambda=0$. Иногда (в зависимости от тех или иных свойств задачи и избранной формы представления) оно является разрешимым и оказывается возможным это легко обнаружить. Если же имеет место противное, можно пытаться (и подчас небезуспешно), незначительно видоизменив представление (за счет привнесения в него специального элементарного оператора), прийти в итоге к разрешимому упомянутому уравнению. Удачное завершение такой попытки (отнюдь не всегда возможное и легко достигаемое) позволяет на основании теоремы Я. Тамаркина [17] в обоих случаях сделать заключение о разрешимости полученного интегрального уравнения почти для всех λ. Поясним сказанное. Приведенное в статье [6] для задачи Неймана интегральное уравнение Фредгольма неразрешимо при $\lambda=0$ (для любой правой части). Взяв вместо (содержащегося в [6]) представления (2.2) слегка видоизмененное

$$u(x, y; \lambda) = \int\limits_L \nu(s)N(\lambda r)\,ds + A\frac{J_0(\lambda\rho)}{\lambda^2}; \qquad A = \int\limits_L \nu(s)\,ds,$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad (\lambda \neq 0), \tag{1}$$

придем к интегральному уравнению

$$-\nu(s_0) + \int\limits_L \nu(s)\frac{dN(\lambda r_0)}{dn_0}ds + \frac{A}{\lambda^2}\,\frac{dJ_0(\lambda\rho)}{dn_0} = f(s_0). \tag{2}$$

Очевидно, однородное уравнение при $\lambda=0$ записывается в виде

$$\frac{du_0^*(x, y)}{dn} - \frac{A_0}{4}\frac{d\rho^2}{dn} = 0, \qquad A_0 = \int\limits_L \nu_0(s)\,ds, \tag{3}$$

где гармоническая в области S функция

$$u_0^*(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu_0(s)\ln r\,ds, \qquad \int\limits_L \frac{d\rho^2}{dn}ds = 4S. \tag{4}$$

Проинтегрировав обе части уравнения (3) по дуге s и учитывая вторую формулу (4), найдем, что $A_0=0$ и, следовательно, $\frac{du_0^*}{dn}=0$. Рассуждая далее, подобно тому, как на стр. 262 названной статьи, придем к выводу, что $\nu_0(s)=0$ (тот же результат легко установить, переходя к уравнению, союзному с (3)). Отсюда, в силу сказанного, сразу вытекает, что интегральное уравнение (2) разрешимо почти для всех λ.

(Ясно, что то же неоднородное уравнение (2) дает при $\lambda=0$ решение задачи Неймана для гармонической функции, если свободный член удовлетворяет известному условию).

Уравнение (2) без дополнительного оператора (содержащего A_0) исследовано иным путем в статье [6]. В ней не был оговорен особый случай, когда коэффициент c_1, фигурирующий в разложении, предшествующем формуле (2.7), по модулю равен единице; при этом правая часть в упомянутой формуле исчезает и нельзя вывести

Примечание II. Пусть в граничном условии (1.2) коэффициенты a_{kj} — постоянные числа. Небезинтересно отметить, что в этом случае, исходя из тех же формул (1.4) и (1.5), мы для определения $\nu(s)$ также получим уравнение (1.22).

Примечание III. Предположим теперь, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет вместо (1.2) граничному равенству

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{l} b_{\mu l} a_{kj}(s) \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^{k+l-\mu-j}\partial y^{\mu+j}} = f(s), \tag{1.23}$$

где $b_{\mu l}$ — некоторые постоянные, причем $a_{kj}(s)$ и $f(s)$ имеют те же значения, что в (1.2). Тогда, взяв для $u(x, y)$ представление, построенное указанным выше приемом, аналогично (1.4) и (1.5), мы, как легко видеть, получим для $\nu(s)$ уравнение Фредгольма, совпадающее с тем, о котором было сказано первоначально, (т. е. при условии (1.2) и соотношениях (1.4) и (1.5)).

Примечание IV. Представление (1.18) непригодно для конечной неодносвязной или бесконечной области из-за наличия под знаком интеграла слагаемого с множителем $\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}$; оно при этом не будет однозначной функцией в области. Можно пытаться устранить из (1.18) упомянутое слагаемое, компенсируя его роль (при построении уравнения Фредгольма) введением других членов, зависящих от функций же Макдональда; однако, по крайней мере, в данном случае вряд ли подобные попытки окажутся успешными. Для

требуемого по ходу доказательства (и приводящего к противоречию) заключения о равенстве нулю функционала α. Оказывается, что при соблюдении условия $|c_1|=1$ (и для α отличного от нуля) постоянная c^* все же обращается в нуль при специальных конфигурациях контура L_0 (например, когда L_0 является окружностью единичного радиуса или эллипсом при некотором значении отношения полуосей). Это обстоятельство (любезно указанное М. О. Башелейшвили), на первый взгляд, выглядит крайне странно и отнюдь физически не интерпретируемо. Подлежащие дополнительному обсуждению исключительные случаи (для них резольвента соответствующего ядра и разложение по параметру λ теряют смысл) еще потому неожиданны (и психологически трудно воспринимаемы), что в названной статье в основу решения положено представление, обладающее значительной общностью. Однако, последнее соображение интуитивно подсказывает, что осложнения, сопутствующие изучению специальных случаев, не являются сколь-либо серьезными и могут быть устранены при помощи элементарных операций и рассуждений. В самом деле, использование преобразования подобия $z^*=az$, где a — положительное число, отличное от единицы, приводит в [6] к уравнению вида (1.1) с параметром λ^2/a^2 для модифицированной области (с заданным же значением нормальной производной искомой функции) и с соответствующим коэффициентом разложения c_1, уже отличным по модулю от единицы.

Затруднительно воспроизвести в памяти перипетии столь давно выполненной работы. Не исключено, что от нас не ускользнуло подробно здесь описанное (и несколько осложняющее исследование) обстоятельство; возможно, что именно уверенность в явно несерьезном характере якобы возникающих при этом трудностей побудило нас обойти их молчанием и не акцентировать на них внимание читателей (разумеется, так не следовало поступать).

указанных случаев рационально свести задачу к сингулярному интегральному уравнению и, затем, регуляризируя его (если в том встретится надобность), преобразовать в эквивалентное уравнение Фредгольма (процесс регуляризации сопровождается усложнением ядер, отягчающих счет; поэтому к нему следует прибегать лишь при особой необходимости).

Очевидно, любая заданная функция $u(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (1.1), почти для всех $\lambda \neq 0$ представима в виде ($\nu(s)$ — некоторая вещественная плотность)

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s) K_0^{(0)}(\lambda r)\, ds + \frac{I_0(\lambda\rho)}{\lambda^2}\int\limits_L \nu(s)\, ds \ (\lambda \neq 0). \tag{1.24}$$

Дополнительный оператор справа опускается, если рассматриваемая область бесконечная. В самом деле, взяв нормальную производную от обеих частей равенства (1.24), придем к уравнению Фредгольма для плотности $\nu(s)$, разрешимому при $\lambda = 0$. Для простоты, в последующем будем считать, что область S конечная и односвязная.

Вычислив частные производные первого порядка от функции $u(x, y)$ и перейдя к пределу $z \to t_0$, где t_0 — точка контура границы, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{i}{2}(\dot{\bar{t}}_0 - \dot{t}_0)\,\nu(s_0) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \nu(s)(\dot{t} + \dot{\bar{t}})\frac{dt}{t - t_0} + \cdots \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{2}(\dot{t}_0 + \dot{\bar{t}}_0)\,\nu(s_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \nu(s)(\dot{t} - \dot{\bar{t}})\frac{dt}{t - t_0} + \cdots \end{aligned} \tag{1.25}$$

Здесь через многоточие обозначены операторы с непрерывными ядрами. Обращаясь теперь к краевому условию (1.2) при $m = 1$, получим

$$a(s_0)\,\nu(s_0) - \frac{b(s_0)}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\frac{dt}{t - t_0} + \cdots = f(s_0), \tag{1.26}$$

при этом входящие сюда коэффициенты

$$a(s) = a_{10}(s)\cos\vartheta + a_{11}\sin\vartheta, \quad b(s) = a_{10}(s)\sin\vartheta - a_{11}(s)\cos\vartheta;\ \dot{t} = ie^{i\vartheta}.$$

При помощи кусочно-голоморфной функции

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \nu(s)\frac{dt}{t - z};\quad \varphi^+(t_0) - \varphi^-(t_0) = \nu(s_0) \tag{1.27}$$

запишем предшествующее уравнение в виде

$$c(s_0)\,\varphi^+(t_0) - \overline{c(s_0)}\,\varphi^-(t_0) + \cdots = f(s_0);\quad c(s) = |a_{10}(s) + ia_{11}(s)|\, e^{-i\vartheta}. \tag{1.28}$$

Рассуждения, сходные с изложенными, например, в статье [4], позволяют установить, что функцию $\varphi(z)$ допустимо разыскивать в виде выражений

$$
\begin{aligned}
\varphi^{+}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{c(s)}\frac{dt}{t-z} + \sum_{k=0}^{2n-1} c_k z^k, \\
\varphi^{-}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{c(s)\,(t-z)},
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

где $\omega(t)$ — некая новая плотность и c_k, вообще говоря, — комплексные постоянные; приращение, приобретаемое аргументом коэффициента $c(s)$ при обходе кривой L принимается равным $-2\pi n$. Очевидно, для неположительных n полином в первой из формул выпадает. Подставив отсюда значения $\varphi(z)$ в равенство (1.28), получим для $\omega(t)$ интегральное уравнение Фредгольма, равносильное сингулярному уравнению (1.26).

§ 2. Перейдем к следующей задаче, важной в теории колебания пластинок. Пусть требуется определить функцию $u(x, y)$, непрерывную в замкнутой области S вместе со своими частными производными первого порядка, удовлетворяющую в S дифференциальному уравнению

$$
\Delta^2 u - \lambda^4 u = 0 \tag{2.1}
$$

и на L предельным равенствам*

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = f_1(s), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = f_2(s), \tag{2.2}
$$

где Δ^2 — бигармонический оператор, λ — некоторая вещественная постоянная и $f_j(s)$ $(j = 1, 2)$ — заданные непрерывные функции.

Эта задача (наряду с другими) служит внушительным средством пробного испытания надежности развиваемого приема.

Будем искать функцию $u(x, y)$ в виде

$$
u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \{\nu_1(s)\,F_1(s; x, y) + \nu_2(s)\,F_2(s; x, y)\}\,ds, \tag{2.3}
$$

полагая**

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(b\sqrt{\alpha^2-\lambda^2} - ia\alpha)\exp\varphi(\alpha) - (b\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} - ia\alpha)\exp\psi(\alpha)}{i\alpha(\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} - \sqrt{\alpha^2-\lambda^2})}\,d\alpha, \\
F_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a\sqrt{\alpha^2-\lambda^2} + ib\alpha)\exp\varphi(\alpha) - (a\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} + ib\alpha)\exp\psi(\alpha)}{i\alpha(\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} - \sqrt{\alpha^2-\lambda^2})}\,d\alpha,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

где $\varphi(\alpha)$, по-прежнему, определяется формулой (1.6), и

---

* Ниже мы увидим, что к условиям (2.2) может быть сведен случай, когда края пластинки защемлены, либо же заданы прогиб и угол поворота вдоль края пластинки.

** Прием построения функций $F_j(s; x, y)$ $(j = 1, 2)$ и смысл их аналогичны указанному для предшествующего случая в подстрочном примечании на стр. 42.

$$\psi(\alpha) = i\alpha\{b(x-\xi) - a(y-\eta)\} + \{a(x-\xi) + b(y-\eta)\}\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}, \tag{2.5}$$

причем радикал $\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}$ считаем положительным при $|\alpha|>\lambda$ и положительно-мнимым при $|\alpha|<\lambda$.

Интегралы, содержащиеся в правых частях равенств (2.4), расходящиеся, так как точка $\alpha=0$ является полюсом первого порядка для подинтегральных функций. Поэтому, чтобы придать им смысл, условимся их понимать как главное значение по Коши.

Допуская, что решение задачи существует и может быть взято в форме (2.3), подставим последнее в (2.2). Тогда получим для определения плотностей $\nu_j(s)$ $(j=1, 2)$ систему уравнений Фредгольма. Так же, как в предыдущем параграфе, мы не будем ее выписывать и, исходя из тех же формул (2.3) и (2.4), перейдем к выводу другой, более простой, системы уравнений.

Обозначая подинтегральную функцию в первом из равенств (2.4) через G_1, будем иметь

$$F_1 = \int_{-A}^{A} G_1 d\alpha + 2\,\mathrm{Re}\int_{A}^{\infty} G_1\, d\alpha, \tag{2.6}$$

где A, как прежде, достаточно большое фиксированное положительное число.

Первое слагаемое в правой части последней формулы остается непрерывным вместе со своими частными производными, когда точка $M(x, y)$ стремится к L. Далее, считая α достаточно большим и имея в виду разложения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}-\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}} = \frac{\sqrt{\alpha^2\mp\lambda^2}}{\lambda^2} \pm \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2\mp\lambda^2}} + \cdots,\\ \frac{\sqrt{\alpha^2\mp\lambda^2}}{\alpha\left[\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}-\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}\right]} = \frac{\alpha}{\lambda^2} \mp \frac{1}{2\alpha} + \cdots,\end{gathered} \tag{2.7}$$

где верхние или нижние знаки берутся одновременно в обеих частях равенств и через многоточие обозначены члены порядка α^{-3} и выше, найдем

$$\begin{aligned}G_1 = &\left\{\frac{1}{\lambda^2}\left(a\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}+ib\alpha\right) - \frac{ib}{2\alpha} - \frac{a}{2\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}}\right\}\exp\varphi(\alpha) -\\ &-\left\{\frac{1}{\lambda^2}\left(a\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}+ib\alpha\right) + \frac{ib}{2\alpha} + \frac{a}{2\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}}\right\}\exp\psi(\alpha) + \cdots\end{aligned} \tag{2.8}$$

Отметим формулы, которые нам здесь понадобятся. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\varphi(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}}\,d\alpha = -\pi i H_0^{(2)}(-i\lambda r), \quad \int_{-\infty}^{\infty}\exp\varphi(\alpha)\,d\alpha = \pi i\,\frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r)}{dn}, \tag{2.9}$$

где $H_0^{(2)}(-i\lambda r)$ — вторая функция Ханкеля. Дифференцируя второе из равенств (2.9) по координатам x и y, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(a\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} + ib\alpha\right) \exp\varphi(\alpha)\, d\alpha = \pi i \frac{\partial}{\partial x} \frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r)}{dn},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(b\sqrt{\alpha^2+\lambda^2} - ia\alpha\right) \exp\varphi(\alpha)\, d\alpha = \pi i \frac{\partial}{\partial y} \frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r)}{dn}. \qquad (2.10)$$

К (2.9) и (2.10) можно еще присоединить формулы, вытекающие из них при замене параметра λ на $i\lambda$.

Принимая во внимание, наряду с равенством

$$\int_{A}^{\infty} \frac{\exp\varphi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_{A}^{\infty} \frac{\exp\varphi^*(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha + \cdots,$$

в котором $\varphi^*(\alpha)$ определяется формулой (1.10) (и через многоточие обозначены слагаемые, содержащие в знаменателе подинтегральной функции α в более высоких степенях), также соотношение (1.13) и, кроме того, замечая, что первый член разложения функции $I_0(\lambda r)\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}$ (удовлетворяющей уравнению (2.1)) совпадает с $\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}$, будем иметь

$$\operatorname{Re} i \int_{A}^{\infty} \frac{\exp\varphi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = -I_0(\lambda r)\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi} + \cdots \qquad (2.11)$$

Таким же образом придем к формуле

$$\operatorname{Re} i \int_{A}^{\infty} \frac{\exp\psi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = -J_0(\lambda r)\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi} + \cdots \qquad (2.12)$$

Возвращаясь теперь к равенству (2.6) и подставив во второе слагаемое вместо функции G_1 ее выражение из (2.8), получим, учитывая формулы* (2.9) $\cdots$ и (2.12),

$$F_1 = -\frac{\pi i}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dn} \left[H_0^{(2)}(\lambda r) - H_0^{(2)}(-i\lambda r)\right] +$$

$$+ \frac{\pi i a}{2} \left[H_0^{(2)}(\lambda r) + H_0^{(2)}(-i\lambda r)\right] + b\left[J_0(\lambda r) + I_0(\lambda r)\right]\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi} + \cdots \qquad (2.13)$$

---

* Очевидно, каждый из интегралов в левых частях равенств (2.9) и (2.10) следует при этом разбить на три соответственно в пределах $(-A, A)$, $(-\infty, -A)$ (A, ∞) и заменить сумму второго и третьего интегралов удвоенной … днего.

Повторяя эти же рассуждения в применении к фукции F_2, найдем

$$F_2 = -\frac{\pi i}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{d}{dn}\{H_0^{(2)}(\lambda r) - H_0^{(2)}(-i\lambda r)\} + \frac{\pi i b}{2}\{H_0^{(2)}(\lambda r) + H_0^{(2)}(-i\lambda r)\} -$$

$$- a\{J_0(\lambda r) + I_0(\lambda r)\}\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi} + \cdots \qquad (2.14)$$

Далее, имеем

$$H_0^{(2)}(\lambda r) \mp H_0^{(2)}(-i\lambda r) = J_0(\lambda r) - \frac{2i}{\pi}\{N_0(\lambda r) \pm K_0(\lambda r)\}, \qquad (2.15)$$

где, для удобства, введена функция $N_0(\lambda r)$, отличающаяся от соответственной функции Неймана наличием дополнительного множителя* $\frac{\pi}{2}$.

Учитывая (2.15), отнесем в равенствах (2.13) и (2.14) члены, зависящие от $J_0(\lambda r)$, в число обозначенных многоточием и введем новые функции, равные явно значущим слагаемым соответственно в каждом из тех же равенств (2.13) и (2.14), в предположении, что они только что указанным образом переписаны. Именно, положим

$$F_1^* = -\frac{2}{\lambda^2}\frac{d}{dn}\{N_0(\lambda r) + K_0(\lambda r)\} + a\{N_0(\lambda r) - K_0(\lambda r)\} +$$

$$+ b\{J_0(\lambda r) + I_0(\lambda r)\}\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}, \qquad (2.16)$$

$$F_2^* = -\frac{2}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{d}{dn}\{N_0(\lambda r) + K_0(\lambda r)\} + b\{N_0(\lambda r) - K_0(\lambda r)\} -$$

$$- a\{J_0(\lambda r) + I_0(\lambda r)\}\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}.$$

Возвращаясь теперь к формуле (2.3) и заменив в ней F_1 и F_2 соответственно на F_1^* и F_2^*, подставим новое выражение для искомой функции в предельные условия (2.2); после этого, принимая во внимание соотношения**

$$\lim_{M(x,\,y)\to M(\xi_0,\,\eta_0)} \int_L \nu(s)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\ln r}{dn}ds = \frac{1}{2}\nu(s_0) + \int_L \nu(s)\left(\frac{\partial r_0}{\partial \xi_0}\right)^2\frac{d\ln r_0}{dn}ds,$$

$$\lim_{M(x,\,y)\to M(\xi_0,\,\eta_0)} \int_L \nu(s)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\ln r}{dn}ds = \int_L \nu(s)\frac{\partial r_0}{\partial \xi_0}\frac{\partial r_0}{\partial \eta_0}\frac{d\ln r_0}{dn}ds, \qquad (2.17)$$

* См. [6].

** См., например, [5].

(и аналогичное первому из них, когда под знаком интеграла вместо множителя $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$ содержится $\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2$), получим для определения плотностей $\nu_j(s)$ $(j=1,\ 2)$ сравнительно простую систему уравнений Фредгольма. Как легко проверить, она имеет вид

$$\nu_j(s_0)+\int_L \{\nu_j(s)\,K_j^{(j)}(s,\ s_0)+\nu_{j+1}(s)\,K_{j+1}^{(j)}(s,\ s_0)\}\,ds=f_j(s_0),\quad (j=1,\ 2), \tag{2.18}$$

где индекс 3 следует заменить на 1 и ядра

$$K_1^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\left[4\left\{1-\left(\frac{\partial r_0}{\partial \xi_0}\right)^2\right\}\frac{d\ln r_0}{dn}+\frac{\partial R_1}{\partial \xi_0}\right],$$

$$K_2^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\left[-4\,\frac{\partial r_0}{\partial \xi_0}\,\frac{\partial r_0}{\partial \eta_0}\,\frac{d\ln r_0}{dn}+\frac{\partial R_2}{\partial \xi_0}\right],$$

$$K_1^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\left[-4\,\frac{\partial r_0}{\partial \xi_0}\,\frac{\partial r_0}{\partial \eta_0}\,\frac{d\ln r_0}{dn}+\frac{\partial R_1}{\partial \eta_0}\right],$$

$$K_2^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\left[4\left\{1-\left(\frac{\partial r_0}{\partial \eta_0}\right)^2\right\}\frac{d\ln r_0}{dn}+\frac{\partial R_2}{\partial \eta_0}\right], \tag{2.19}$$

при этом введены обозначения*

$$R_1=-\frac{2}{\lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial \xi_0}\,\frac{dQ_1}{dn}+\cos(n,\ \xi)\,Q_2+\cos(n,\ \eta)\,Q_3\,\mathrm{arctg}\,\frac{\eta_0-\eta}{\xi_0-\xi},$$

$$R_2=-\frac{2}{\lambda^2}\,\frac{\partial}{\partial \eta_0}\,\frac{dQ_1}{dn}+\cos(n,\ \eta)\,Q_2-\cos(n,\ \xi)\,Q_3\,\mathrm{arctg}\,\frac{\eta_0-\eta}{\xi_0-\xi},$$

$$Q_1=N_0(\lambda r)+K_0(\lambda r)+\frac{\lambda^2 r^2\ln r}{2}=-\frac{\lambda^6 r^6\ln r}{2^5\,3!^2}+\cdots,$$

$$Q_2=N_0(\lambda r)-K_0(\lambda r)-2\ln r=\frac{\lambda^4 r^4\ln r}{32}+\cdots,$$

$$Q_3=J_0(\lambda r)+I_0(\lambda r)-2=\frac{\lambda^4 r^4}{32}+\cdots. \tag{2.20}$$

Примечание I. Допустим, что для функции $u(x,\ y)$, удовлетворяющей уравнению (2.1), имеют место граничные условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} b_{kj}\,\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}=f_1(s),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} b_{kj}\,\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}=f_2(s).$$

---

* Очевидно, в каждом из двух предпоследних равенств (2.20) через многоточие обозначены функции, имеющие непрерывные производные более высокого порядка, когда $M(x,\ y)$ лежит на L, нежели предшествующие им первые слагаемые.

где b_{kl} — некоторые постоянные. В этом случае, определив $u(x, y)$ формулой, образованной (подобно (2.3) и (2.4)) непосредственно при помощи соответствующего фундаментального решения, мы придем к той же системе интегральных уравнений, что при первоначально заданном условии (2.2) и соотношениях (2.3) и (2.4).

§ 3. Рассмотрим теперь случай, когда для функции $u(x, y)$, также удовлетворяющей уравнению (2.1), должны выполняться вместо (2.2) граничные условия*

$$u = f_1(s), \quad \frac{du}{dn} = f_2(s). \tag{3.1}$$

Следуя приему, использованному в предыдущих параграфах, можно свести задачу к системе уравнений Фредгольма, взяв

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L [\nu_1(s) F_1(s; x, y) + \nu_2(s) F_2(s; x, y)]\, ds,$$

$$F_1 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}\exp\varphi(\alpha) - \sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\exp\psi(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}-\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}}\, d\alpha, \tag{3.2}$$

$$F_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\varphi(\alpha) - \exp\psi(\alpha)}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}-\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}}\, d\alpha. \tag{3.3}$$

Не выписывая ее и опираясь на те же формулы (3.2) и (3.3), мы, так же, как выше, приведем нашу задачу к новой более удобной системе уравнений Фредгольма.

---

* Дифференцируя первое из условий (3.1) по дуге s, приведем после элементарных выкладок оба условия (3.1) к виду (2.2). Однако последние условия не будут равносильны исходным (3.1). Мы придем к предельным равенствам, содержащим (в качестве основных слагаемых) производные от искомой функции и, в то же время, эквивалентным (3.1), прибавив к продифференцированному по дуге s упомянутому условию некоторый функционал, точнее говоря, заменив его следующим

$$\frac{d}{ds}[u(s) - f_1(s)] + \int\limits_L [u(s_1) - f_1(s_1)]\, ds_1 = 0.$$

В самом деле, интегрируя это равенство по дуге s, получим соотношение

$$[u(s) - f_1(s)] + s\int\limits_L [u(s_1) - f_1(s_1)]\, ds_1 = C,$$

где C — некоторая постоянная. В силу однозначности $u(s)$ и $f_1(s)$ оно распадается на два следующих

$$u(s) - f_1(s) = C, \quad \int\limits_L [u(s_1) - f_1(s_1)]\, ds_1 = 0.$$

Вторая из этих формул дает $C = 0$; отсюда вытекает требуемое. Любопытно все же выявить структуру интегральных уравнений, к которым мы придем, исходя непосредственно из краевых условий вида (3.1).

Представив, например, F_1 в форме, аналогичной (2.6), и имея в виду (при достаточно больших значениях α), наряду с первыми из разложений (2.7), также следующие

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}-\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}}=\frac{\alpha^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}+\cdots, \tag{3.4}$$

в которых под многоточием подразумеваются слагаемые порядка α^{-2} и выше, получим

$$F_1=2\operatorname{Re}\int\limits_A^\infty\Bigl[-\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\{\exp\varphi(\alpha)-\exp\psi(\alpha)\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\exp\varphi(\alpha)+\exp\psi(\alpha)\}\Bigr]d\alpha+\cdots \tag{3.5}$$

Далее, исходя из (2.10), с помощью дифференцирования по параметрам x и y и простых преобразований последовательно найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha\exp\varphi(\alpha)\,d\alpha=\pi\left(b\frac{\partial}{\partial x}-a\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r)}{dn},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}\exp\varphi(\alpha)\,d\alpha=\pi i\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r)}{dn},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha^2\exp\varphi(\alpha)\,d\alpha=-\pi i\left(b\frac{\partial}{\partial x}-a\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\frac{dH_0^{(2)}(-i\lambda r)}{dn}, \tag{3.6}$$

присоединив сюда еще мысленно группу равенств, полученную заменой в указанных параметра λ на $i\lambda$.

Используя теперь соответственные из равенств (2.9) и (3.6) и поступая так же, как при выводе соотношения (2.13), преобразуем формулу (3.5) к виду

$$F_1=-\frac{\pi i}{\lambda^2}\left(b\frac{\partial}{\partial x}-a\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\frac{d}{dn}\{H_0^{(2)}(\lambda r)-H_0^{(2)}(-i\lambda r)\}+$$

$$+\frac{\pi i}{2}\frac{d}{dn}\{H_0^{(2)}(\lambda r)+H_0^{(2)}(-i\lambda r)\}+\cdots \tag{3.7}$$

Проделав аналогичное указанному для функции F_2, будем иметь

$$F_2=-\frac{\pi i}{\lambda^2}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{d}{dn}\{H_0^{(2)}(\lambda r)-H_0^{(2)}(-i\lambda r)\}+$$

$$+\frac{\pi i}{2}\{H_0^{(2)}(\lambda r)+H_0^{(2)}(-i\lambda r)\}+\cdots, \tag{3.8}$$

причем в обоих последних равенствах многоточия имеют тот же смысл, что в (2.13) и (2.14).

Наконец, имея в виду соотношения (2.15) и рассуждая, как выше, положим

$$F_1^* = -\frac{2}{\lambda^2}\left(b\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \frac{d}{dn}\{N_0(\lambda r) + K_0(\lambda r)\} + \\ + \frac{d}{dn}\{N_0(\lambda r) - K_0(\lambda r)\},$$

$$F_2^* = -\frac{2}{\lambda^2}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{d}{dn}\{N_0(\lambda r) + K_0(\lambda r)\} + \{N_0(\lambda r) - K_0(\lambda r)\} \quad (3.9)$$

и затем, заменив в формуле (3.2) $F_j(s; x, y)$ на $F_j^*(s; x, y)$ $(j = 1, 2)$, вернемся к условиям (3.1). Тогда после легких преобразований получим для плотностей $\nu_j(s)$ $(j = 1, 2)$ следующую систему уравнений

$$\nu_1(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \Bigg[\nu_1(s)\left\{2\left[1 - \left\{a(s)\frac{\partial r_0}{\partial \eta} + b(s)\frac{\partial r_0}{\partial \xi}\right\}^2\right]\frac{d\ln r_0}{dn} + \right. \\ \left. + T_1(s; \xi_0, \eta_0)\right\} + \nu_2(s)\left\{-\left[a(s)\frac{\partial r_0}{\partial \xi} + b(s)\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\right]^2 + T_2(s; \xi_0, \eta_0)\right\}\Bigg] ds = \\ = f_1(s_0), \quad (3.10)$$

$$\nu_2(s_0) + \frac{d}{dn_0}\frac{2}{\pi}\int_L \nu_1(s)\left[1 - \left\{a(s)\frac{\partial r_0}{\partial \eta} + b(s)\frac{\partial r_0}{\partial \xi}\right\}^2\right]\frac{d\ln r_0}{dn} ds + \\ + \frac{1}{\pi}\int_L \Bigg[\nu_1(s)\frac{dT_1}{dn_0} + \nu_2(s)\Bigg\{2\left[1 - \left\{a(s)\frac{\partial r_0}{\partial \xi} + b(s)\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\right\}^2\right]\frac{d\ln r_0}{dn} + \\ + 2(a(s_0) - a(s))\left[a(s)\frac{d\ln r_0}{dn} - \left\{a(s)\frac{\partial r_0}{\partial \xi} + b(s)\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\right\}^2\frac{\partial \ln r_0}{\partial \xi}\right] + \\ + 2(b(s_0) - b(s))\left[b(s)\frac{d\ln r_0}{dn} - \left\{a(s)\frac{\partial r_0}{\partial \xi} + b(s)\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\right\}^2\frac{\partial \ln r_0}{\partial \eta}\right] + \\ + \frac{dT_2}{dn_0}\Bigg\}\Bigg] ds = f_2(s_0), \quad (3.11)$$

где

$$2T_1 = -\frac{2}{\lambda^2}\left(b\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\frac{dQ_1}{dn} + \frac{dQ_2}{dn},$$
$$2T_2 = -\frac{2}{\lambda^2}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{dQ_1}{dn} + Q_2 - 1, \quad (3.12)$$

причем Q_1 и Q_2 определяются двумя предпоследними из равенств (2.20).

Во втором слагаемом, заключающемся в левой части формулы (3.11), к которому относится дифференцирование по нормали n_0, подставим под знаком интеграла вместо неизвестной $\nu_1(s)$ ее выражение из уравнения (3.10), иначе говоря, совершим в применении к нему обычную итерацию. В каждом из получаемых при этом двойных интегралов, содержащих $\nu_j(s)$ ($j=1, 2$), изменим порядок интегрирования и, затем, внесем (что, как нетрудно сообразить, возможно) операцию дифференцирования по n_0 под знаки вторых из этих интегралов*. Присоединив вновь полученное таким образом уравнение, которое обозначим, не выписывая, через (3.13), к уравнению (3.10), будем иметь требуемую систему Фредгольма для неизвестных $\nu_j(s)$ ($j=1, 2$).

Как видно, интегральные уравнения (3.10) и (3.13) сложнее и менее удобны для приложений, нежели выведенные в предыдущем параграфе**.

---

* При выполнении указанных преобразований полезно иметь в виду следующие соотношения, справедливость которых легко установить

$$\frac{d}{dn_0}\int\limits_L \mu(s)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d\ln r}{dn}\,ds = \pi a(s_0)\, b(s_0)\, \mu'(s_0) +$$

$$+\frac{1}{4}\,\mathrm{Jm}\, VP\int\limits_L \Big|\,(b(s)+ia(s))\Big\{-\mu'(s)\left[(a(s_0)+3ib(s_0))+\right.$$

$$\left.+(b(s)+ia(s))^2(a(s_0)+ib(s_0))\right]\frac{dt}{t-t_0}+$$

$$+(a(s_0)+ib(s_0))\frac{d}{ds}\left[(b(s)+ia(s))\,\mu'(s)\right]\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}\,dt\Big\}\Big|,$$

$$\frac{d}{dn_0}\int\limits_L \mu(s)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{d\ln r}{dn}\,ds = -\pi a(s_0)\, b(s_0)\, \mu'(s_0) -$$

$$-\frac{1}{4}\,\mathrm{Jm}\, VP\int\limits_L \Big|\,(b(s)+ia(s))\Big\{\mu'(s)\left[(3a(s_0)+ib(s_0))-\right.$$

$$\left.-(a(s_0)+ib(s_0))(b(s)+ia(s))^2\right]\frac{dt}{t-t_0}+$$

$$+(a(s_0)+ib(s_0))\frac{d}{ds}\left[(b(s)+ia(s))\,\mu'(s)\right]\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}\,dt\Big\}\Big|.$$

** Сопоставление результатов этих двух параграфов позволяет высказать известные соображения и рекомендации (не претендуя на их безусловную достоверность, мы все же считаем, что во многих случаях ими не следует пренебрегать).

Допустим, что одним из краевых условий задается значение искомой функции, а в другое условие входит, например, вторая производная от нее. Подобная форма краевых условий (с неоднородными главными членами) является в определенном смысле неблагоприятной и сулит, вообще говоря, специфические осложнения при рассмотрении вопроса; как правило, она приводит (независимо от используемого приема) к громоздким интегральным уравнениям. Поэтому целесообразно заменить упомянутое первое краевое условие иным, ему равносильным, содержащим вторую производную от искомой функции по дуге s. Будем считать (не нарушая общности), что на границе области искомая функция $u(s)=0$. Нетрудно усмотреть, что вместо этого условия можно взять, например, такое (функция $u(s)$ и ее две первые производные предполагаются однозначными)

§ 4. В настоящем параграфе мы займемся одной из основных задач теории дифракции упругих волн в случае установившихся колебаний, когда на границе упругой среды заданы компоненты вектора смещения. Как известно*, эта задача заключается в интегрировании диференциальных уравнений

$$\Delta\varphi + \lambda_1^2\varphi = 0, \qquad \Delta\psi + \lambda_2^2\psi = 0 \tag{4.1}$$

в области S, при следующих условиях на L:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = f_1(s), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = f_2(s), \tag{4.2}$$

где неизвестные $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — так называемые соответственно продольный и поперечный потенциалы; λ_j $(j = 1, 2)$ — постоянные, зависящие от частоты колебаний и упругих свойств среды, заполняющей S, и, наконец, $f_j(s)$ $(j = 1, 2)$ — заданные непрерывные функции**.

$$\frac{d^2u}{ds^2} + Av(s) + B = 0; \qquad A = [u(s)]_{s=0}, \quad B = \left[\frac{du}{ds}\right]_{s=0},$$

причем $v(s)$ — известная величина, равная

$$v(s) = \xi(0)\frac{d\xi}{ds} + \eta(0)\frac{d\eta}{ds}; \qquad \xi(0) = [\xi(s)]_{s=0}, \qquad \eta(0) = [\eta(s)]_{s=0},$$

и отсчет дуги ведется от точки, фиксируемой произвольно и отличной от начала координат. Действительно, интегрируя новое условие последовательно дважды по дуге s, будем иметь (за начало координат примем центр инерции кривой, ограничивающей область)

$$\frac{du}{ds} + A[\xi(0)\xi(s) + \eta(0)\eta(s) - r^2(0)] + Bs = C, \quad r^2(0) = \xi^2(0) + \eta^2(0).$$

$$u(s) + A\left\{\int_0^s [\xi(0)\xi(s_1) + \eta(0)\eta(s_1)]\,ds_1 - r^2(0)\,s\right\} + \frac{Bs^2}{2} = Cs + D.$$

Из первого соотношения сразу находим $B = 0$, и значит, постоянная $C = 0$ (к последнему приходим, полагая в соотношении $s = 0$); другое соотношение дает $A = 0$ и, в силу этого, также постоянная $D = 0$. Таким образом, выписанное взамен исходного предельное равенство на самом деле ему адэкватно.

Иногда заменяющее (задаваемое) предельное условие выгоднее выбрать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + A\frac{\partial u}{\partial s} + Bu + N[u] = 0,$$

где A и B — некоторые постоянные и $N[u]$ — элементарный оператор, вкупе обеспечивающие требуемую эквивалентность.

* См., например, [3].

** Эта задача уже рассматривалась нами в статье [6]. Однако, полученная в ней система уравнений Фредгольма значительно отличается от той, которую мы приводим ниже.

Придерживаясь последовательности, принятой в предыдущих случаях, положим сначала

$$
\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\int_L \{\nu_1(s) F_1^{(1)}(s;\, x,\ y) + \nu_2(s) F_2^{(1)}(s;\, x,\, y)\}\, ds,\\
\psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\int_L \{\nu_1(s) F_1^{(2)}(s;\, x,\, y) + \nu_2(s) F_2^{(2)}(s;\, x,\, y)\}\, ds,
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где введены обозначения:

$$
F_1^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ib\alpha + a\sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2}\,)}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}\,\sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2} - \alpha^2} \exp\psi_1(\alpha)\, d\alpha;
$$

$$
F_2^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-ia\alpha + b\sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2}\,)}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}\,\sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2} - \alpha^2} \exp\psi_1(\alpha)\, d\alpha;
$$

$$
F_1^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-ia\alpha + b\sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}\,)}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}\,\sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2} - \alpha^2} \exp\psi_2(\alpha)\, d\alpha,
$$

$$
F_2^{(2)} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(+ib\alpha + a\sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}\,)}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}\,\sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2} - \alpha^2} \exp\psi_2(\alpha)\, d\alpha, \tag{4.4}
$$

причем функции $\psi_j(\alpha)$ определяются формулой (2.5), в которой взято $\lambda = \lambda_j$ $(j = 1, 2)$.

Предполагая, что искомое решение при рассматриваемых значениях λ_j $(j = 1, 2)$ представимо в указанной форме, получим отсюда сразу для $\nu_j(s)$ систему уравнений Фредгольма. Не выписывая, как прежде, последнюю ввиду ее сложности, мы с помощью тех же равенств (4.3) и (4.4) путем приема, использованного в предшествующих параграфах, сведем задачу к более простой системе Фредгольма.

Повторяя почти дословно рассуждения, приведенные выше, обозначим подинтегральные функции в равенствах (4.4) через $G_j^{(k)}(j, k = 1, 2)$ и запишем каждую из функций $F_j^{(k)}$ $(k, j = 1, 2)$ в форме, подобной (2.6). Далее, учитывая при достаточно большой величине α разложения*

$$
\frac{ib\alpha + a\sqrt{\alpha^2 - \lambda_{j+1}^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_1^2}\,\sqrt{\alpha^2 - \lambda_2^2} - \alpha^2} = -\frac{2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}\Big\{(ib\alpha + a\sqrt{\alpha^2 - \lambda_j^2}\,) +
$$

* При выводе их удобно пользоваться соотношениями

$$
\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \lambda_j^2} + \frac{\lambda_j^2}{2\sqrt{\alpha^2 - \lambda_j^2}} + \cdots, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda_j^2}} + \cdots \quad (j=1,\, 2),
$$

где под многоточием подразумеваются слагаемые высшего порядка малости, начиная с α^{-3}.

$$+\frac{a}{4}\frac{(\lambda_j^2-\lambda_{j+1}^2)(\lambda_j^2+3\lambda_{j+1}^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\sqrt{\alpha^2-\lambda_j^2})}-\frac{ib}{4}\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\frac{1}{\alpha}\Bigg\}+\cdots,$$

$$\frac{-ia\alpha+b\sqrt{\alpha^2-\lambda_{j+1}^2}}{\sqrt{\alpha^2-\lambda_1^2}\sqrt{\alpha^2-\lambda_2^2}-\alpha^2}=-\frac{2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\Bigg\{(-ia\alpha+b\sqrt{\alpha^2-\lambda_j^2})+\frac{b}{4}\times$$

$$\times\frac{(\lambda_j^2-\lambda_{j+1}^2)(\lambda_j^2+3\lambda_{j+1}^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\sqrt{\alpha^2-\lambda_j^2}}+\frac{ia}{4}\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\frac{1}{\alpha}\Bigg\}+\cdots,\qquad (j=1,2),\ (4.5)$$

преобразуем $F_j^{(k)}$ к требуемой форме и затем введем новые функции $F_j^{(k)*}$. Выпишем сразу последние, не останавливаясь на промежуточных совершенно очевидных выкладках. Они будут равны

$$F_j^{(j)*}=\frac{1}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\Bigg\{-4\frac{\partial}{\partial x}\frac{dN_0(\lambda_j r)}{dn}+$$

$$+a\frac{(\lambda_j^2-\lambda_{j+1}^2)(\lambda_j^2+3\lambda_{j+1}^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}N_0(\lambda_j r)-$$

$$-b\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}J_0(\lambda_j r)\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}\Bigg\},\qquad (j=1,\ 2);$$

$$F_{j+1}^{(j)*}=\frac{1}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\Bigg\{-4\frac{\partial}{\partial y}\frac{dN_0(\lambda_j r)}{dn}+$$

$$+b\frac{(\lambda_j^2-\lambda_{j+1}^2)(\lambda_j^2+3\lambda_{j+1}^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}N_0(\lambda_j r)+$$

$$+a\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}J_0(\lambda_j r)\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}\Bigg\}\qquad (j=1,2).\qquad (4.6)$$

Наконец, подставив в формулы (4.3) вместо $F_j^{(k)}$ соответственно функции $F_j^{(k)*}$ $(k,\ j=1,\ 2)$ и внеся новые выражения для искомых функций в предельные условия (4.2), найдем для $\nu_j(s)$ $(j=1,\ 2)$ интересующую нас систему уравнений Фредгольма:

$$\nu_j(s_0)+\int_L[\nu_1(s)K_1^{(j)}(s,\ s_0)+\nu_2(s)K_2^{(j)}(s,\ s_0)]\,ds=f_j(s_0),\quad (j=1,\ 2)\ (4.7)$$

в которой ядра—

$$K_1^{(1)}=\frac{1}{\pi}\Bigg\{\Bigg[1+\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\Bigg\{1-2\Big(\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\Big)^2\Bigg\}\Bigg]\frac{d\ln r_0}{dn}+\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial Q_1^{(1)}}{\partial\xi_0}+\frac{\partial Q_1^{(2)}}{\partial\eta_0}\Bigg]\Bigg\},$$

$$K_2^{(1)}=\frac{1}{\pi}\Bigg\{-2\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\frac{\partial r_0}{\partial\eta}\frac{d\ln r_0}{dn}+\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial\xi_0}-\frac{\partial Q_2^{(2)}}{\partial\eta_0}\Bigg]\Bigg\},\quad (4.8)$$

$$K_1^{(2)}=\frac{1}{\pi}\Bigg\{-2\frac{(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\frac{\partial r_0}{\partial\eta}\frac{d\ln r_0}{dn}+\frac{1}{2}\Bigg[\frac{\partial Q_1^{(1)}}{\partial\eta_0}-\frac{\partial Q_1^{(2)}}{\partial\xi_0}\Bigg]\Bigg\},$$

$$K_2^{(2)} = \frac{1}{\pi}\left\{\left[1 + \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}\left\{1 - 2\left(\frac{\partial r_0}{\partial \eta}\right)^2\right\}\right]\frac{d\ln r_0}{dn} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \eta_0} + \frac{\partial Q_2^{(2)}}{\partial \xi_0}\right]\right\}$$

и $Q_j^{(k)}$ получены из выражений для $F_j^{(k)}$ в результате замены в них в первом и втором слагаемых функции $N_0(\lambda_k r)$ соответственно через $N_0(\lambda_k r) - \left(1 - \frac{\lambda_k r^2}{4}\right)\ln r$ и $N_0(\lambda_k r) - \ln r$ и в третьем слагаемом — функции $J_0(\lambda_k r)$ через $J_0(\lambda_k r) - 1$.

В данном случае, в результате анализа свойств и особенностей выражений (4.6) и надлежащей их модификации, было предложено несколько иное по форме представление для искомых функций; оно, по-прежнему, приводит задачу к уравнению Фредгольма, но уже свободно от слагаемого, содержащего $\operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{x-\xi}$; это существенное обстоятельство в свое время дало возможность провести рассмотрение вопроса для конечной многосвязной области.

Институт механики
АН СССР

Поступила 25 IV 1963

Դ. Ի. Շերման

ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՖՐԵԴՀՈԼՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆԸ ԲԵՐԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[1,2] աշխատություններում նշվել է մի եղանակ, որը թույլ է տալիս մաթեմատիկական ֆիզիկայի խնդիրների որոշ դաս բերել անմիջականորեն Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարմանը: Ներկա հոդվածում մի շարք օրինակների վրա ցույց է տրված, թե ինչպես որոշ չափով ձևափոխելով այդ եղանակը, կարելի է շատ դեպքերում զգալի պարզեցնել դիտարկվող խնդիրների համար ստացվող ինտեգրալ հավասարումները, այնպես որ նրանց կորիզները արտահայտված լինեն տարրական կամ աղյուսակավորված ֆունկցիաներով:

S-ով նշանակենք վերջավոր միակապ տիրույթը, որը գտնվում է $z = x + iy$ հարթությունում և սահմանափակված է L փակ կորով, որի կետերի կոորդինատները ընդունենք ըստ s աղեղի բավարար թվով դիֆերենցելի:

§ 1-ում ուսումնասիրվում է $u(x, y)$ ֆունկցիայի որոշման խնդիրը ֆունկցիա, որը S տիրույթում բավարարում է

$$\Delta u - \lambda^2 u = 0$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը և L կորի վրա՝

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\partial y^j} = f(s)$$

հավասարությանը, որտեղ Δ-ն Լապլասի օպերատորն է, λ-ն իրական հաստատուն է և $a_{kj}(s)$ ու $f(s)$-ը տրված ֆունկցիաներն են:

§ 2, 3-ում հետազոտվում է եզրի երկարությամբ ամրակցված թիթեղների կայունացած տատանումների խնդիրը:

Վերջապես, § 4-ը նվիրված է կայունացած տատանումների ժամանակ առաձգական ալիքների դիֆրակցիայի խնդրին, երբ միջավայրի սահմանի վրա տրված են տեղափոխության վեկտորի կոմպոնենտները:

Վերը նշված բոլոր խնդիրները իսկապես բերված են Ֆրեդհոլմի ձևով բավականաչափ պարզ և այլասերված կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* О приведении к интегральному уравнению плоской задачи теории потенциала. Известия АН СССР, серия математ., **9**, 1945.
2. *Шерман Д. И.* О некоторых задачах теории установившихся колебаний. Известия АН СССР, серия матем., **9**, 1945.
3. *Шерман Д. И.* К вопросу о дифракции упругих волн. ДАН СССР, **48**, № 9, 1945.
4. *Шерман Д. И.* О некоторых задачах теории потенциала. Прикл. математ. и механика, **9**, 1945.
5. *Шерман Д. И.* Об установившихся упругих колебаниях при заданных смещениях на границе среды. Прикл. математ. и механика, **10**, 1946.
6. *Шерман Д. И.* К задаче Дирихле и Неймана в теории установившихся колебаний. Прикл. математ. и механика, 11, 1947.
7. *Шерман Д. И.* О некоторых случаях общей задачи теории установившихся колебаний. ДАН СССР, **56**, № 6, 1947.
8. *Шерман Д. И.* О некоторых пространственных задачах теории потенциала. Прикл. математ. и механика, **12**, в. 3, 1948.
9. *Шерман Д. И.* К теории установившихся колебаний среды при заданных внешних силах на ее границе. Прикл. матем. и мех., **13**, в. 5, 1949.
10. *Шерман Д. И.* Об одной задаче теории упругости со смешанными однородными условиями. ДАН СССР, **114**, № 4, 1957.
11. *Шерман Д. И.* О поперечном изгибе пластинки, опертой вдоль края, составленного из нескольких замкнутых кривых. Прикл. матем. и мех., **23**, в. 1, 1959.
12. *Шаташвили С. Х.* Об установившихся колебаниях при заданных смещениях на поверхности упругого тела. ДАН СССР, **71**, № 2, 1950.
13. *Шаташвили С. Х.* Об установившихся колебаниях при заданных внешних силах на поверхности упругого тела. Приклади. матем. и мех., **15**, в. 5, 1951.
14. *Шаташвили С. Х.* Пространственная задача теории установившихся упругих колебаний при заданных смещениях на границе среды. ДАН СССР, **83**, № 6, 1952.
15. *Шаташвили С. Х.* Приведение одной смешанной задачи теории установившихся упругих колебаний к интегральным уравнениям Фредгольма. Сообщ. АН Груз. ССР, **14**, № 5, 1953.
16. *Шаташвили С. Х.* Об одной смешанной задаче теории установившихся упругих колебаний. Тр. Груз. политехн. инстит., № 4 (52), 1957.
17. *Tamarkin J.* Ann. Mathemat., **28**, № 2 (1927).