

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. С. Чобанян, В. В. Микаелян

Об определении центра изгиба составного стержня
 при помощи решения задачи кручения

Вопросу определения центра изгиба однородного призматического стержня при помощи решения только задачи кручения посвящены работы [1—8].

В настоящей статье получены формулы для определения координат центра изгиба составного призматического стержня при помощи функций, аналогичных функциям Сен-Венана и Прандтля в задаче кручения однородных стержней. Эти функции исследованы в работах [9] и [10].

1. Рассмотрим призматический стержень, составленный из различных призматических тел, соединенных между собой по касающимся частям боковых поверхностей. Коэффициенты Пуассона составляющих тел будем считать равными, а модули сдвига — различными.

Области поперечного сечения составного стержня, соответствующие различным материалам, обозначим через D_1, D_2, \dots, D_N , а область всего поперечного сечения — через D_0 . Контуры этих областей обозначим соответственно через $L_1, L_2, \dots, L_N, L_0$. Линию раздела областей D_i и D_j обозначим через L_{ij} . Будем рассматривать случай, когда линии раздела L_{ij} либо целиком находятся внутри области D_0 , либо пересекаются с ее контуром L_0 под определенным углом, не равным нулю. Области D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) могут быть как односвязными, так и многосвязными. Внешний контур многосвязной области D_i обозначим через L_i^0 , а внутренние — через $L_i^1, L_i^2, \dots, L_i^{m_i}$. Область D_0 пока будем считать односвязной.

Ось z направим параллельно образующим составного призматического стержня, поперечное сечение которого отнесем к осям x и y .

Пусть стержень закреплен своим концом $z = 0$, а на торце $z = l$ несет поперечную нагрузку, статически эквивалентную силе P , которая в общем случае имеет составляющие P_x и P_y . Будем считать, что начало координат расположено в произвольной точке поперечного сечения $z = 0$.

Касательные напряжения τ_{xz}^i, τ_{yz}^i в области D_i при поперечном изгибе составного стержня, когда $P_x \neq 0, P_y = 0$, определяются формулами [11]

$$\tau'_{xz} = P_x \left[\frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{1}{2} E_i (A_0 x^2 + D_0 x) + G_i \varphi_i(y) \right], \quad (1.1)$$

$$\tau'_{yz} = P_x \left[-\frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{1}{2} E_i (B_0 y^2 + D_0 y) + G_i \psi_i(x) \right], \quad (1.2)$$

где $F_i(x, y)$ — функция напряжений изгиба в области D_i , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\Delta F_i = 2G_i(B_0 x - A_0 y) - G_i[\varphi_i'(y) - \psi_i'(x)] - 2G_i C_0 \quad (1.3)$$

и условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial s} &= \left[\frac{1}{2} E_i (B_0 y^2 + D_0 y) + G_i \psi_i(x) \right] \frac{dx}{ds} - \\ &- \left[\frac{1}{2} E_i (A_0 x^2 + D_0 x) + G_i \varphi_i(y) \right] \frac{dy}{ds} \quad \text{на } L_0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_j}{\partial s} &= \frac{1}{2} (E_i - E_j) \left[(B_0 y^2 + D_0 y) \frac{dx}{ds} - (A_0 x^2 + D_0 x) \frac{dy}{ds} \right] + \\ &+ [G_i \psi_i(x) - G_j \psi_j(x)] \frac{dx}{ds} - [G_i \varphi_i(y) - G_j \varphi_j(y)] \frac{dy}{ds} \quad \text{на } L_{ij}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} - \frac{1}{G_j} \frac{\partial F_j}{\partial n} = [\varphi_i(y) - \varphi_j(y)] \frac{dx}{ds} + [\psi_i(x) - \psi_j(x)] \frac{dy}{ds} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.6)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, φ_i и ψ_i — произвольные функции, E_i , G_i и ν — модули упругости материала соответствующей области D_i , s и n — направления касательной и нормали к контуру области D_i .

Постоянные коэффициенты A_0 , B_0 и D_0 определяются из следующей системы уравнений, выражающих условия равновесия элемента изгибаемого стержня, заключенного между произвольным сечением и концом $z = l$:

$$A_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{iy} + B_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{ix} + D_0 \sum_{i=1}^N E_i \Omega_i = 0, \quad (1.7)$$

$$A_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{ixy} + B_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{ixx} + D_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{ix} = 0, \quad (1.8)$$

$$A_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{iyy} + B_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{ixy} + D_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{iy} = -1, \quad (1.9)$$

где Ω_i — площадь D_i , S_{ix} , S_{iy} , I_{ixx} , I_{iyy} , I_{ixy} — статические моменты и моменты инерции D_i относительно осей координат.

Для определения постоянной C_0 , входящей в правую часть (1.3), воспользуемся соотношением [11]*

* В работе [11] C_0 ошибочно отождествлялось со степенью кручения θ , что правильно только в случае, когда начало координат совпадает с геометрическим центром тяжести области D_0 .

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -\nu (B_0 x - A_0 y) + C_0. \quad (1.10)$$

где ω_z — поворот элемента поперечного сечения около оси z .

Среднее значение этих поворотов на единицу длины стержня для всех элементов поперечного сечения есть степень кручения θ . Интегрируя (1.10) по области D_0 , находим

$$\theta = \frac{1}{\Omega_0} \iint_{D_0} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} dx dy = C_0 - \nu (B_0 x_c^* - A_0 y_c^*). \quad (1.11)$$

Здесь Ω_0 , x_c^* и y_c^* — площадь и координаты геометрического центра тяжести области D_0 .

Таким образом, условие

$$C_0 = \nu (B_0 x_c^* - A_0 y_c^*) \quad (1.12)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы поперечный изгиб составного стержня не сопровождался кручением, т. е. линия действия P_x , статически эквивалентной системе поперечных сил, приложенных к концу стержня $z = l$, проходила через его центр изгиба. Существование центра изгиба составного стержня доказано в работе [11].

Для определения координат центра изгиба составного стержня при помощи решения только задачи его кручения можно использовать произвольные функции $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(y)$. Но нижепримененный способ решения этой задачи приводит к цели и без этого. Поэтому во избежание громоздкости дальнейших выкладок целесообразно принимать

$$\varphi_i = \psi_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (1.13)$$

Для момента касательных напряжений изгиба τ_{xz}^i , τ_{yz}^i ($i = 1, 2, \dots, N$), обусловленных составляющей P_x , относительно начала координат (оси z), согласно (1.1), (1.2) и (1.13), будем иметь

$$\begin{aligned} M_0(P_x) = \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} (x \tau_{zy}^i - y \tau_{xz}^i) dx dy = -P_x \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \left(x \frac{\partial F_i}{\partial x} + y \frac{\partial F_i}{\partial y} \right) dx dy + \\ + \frac{1}{2} P_x \sum_{i=1}^N E_i \iint_{D_i} xy (B_0 y - A_0 x) dx dy. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Расстояние \bar{y} линии действия главного вектора касательных напряжений изгиба от начала координат определяется формулой

$$\bar{y} = -\frac{1}{P_x} M_0(P_x). \quad (1.15)$$

Если при определении F_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в (1.3) соблюдено условие (1.12), изгиб составного стержня будет без кручения и \bar{y} будет ординатой центра изгиба.

Для абсциссы \bar{x} центра изгиба будем иметь аналогичную формулу

$$\bar{x} = \frac{1}{P_y} M_0(P_y). \quad (1.16)$$

При определении $M_0(P_y)$ постоянные A_0 , B_0 и D_0 , входящие в (1.3)–(1.6), должны быть заменены новыми постоянными A_0 , B_0 и D_0 соответственно, которые определяются из системы уравнений

$$A_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{iy} + B_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{ix} + D_0 \sum_{i=1}^N E_i Q_i = 0, \quad (1.17)$$

$$A_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{ixy} + B_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{ixx} + D_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{ix} = -1, \quad (1.18)$$

$$A_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{iyy} + B_0 \sum_{i=1}^N E_i I_{ixy} + D_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{iy} = 0. \quad (1.19)$$

2. Для определения координат центра изгиба составного стержня при помощи решения только задачи его кручения необходимо функцию напряжений при изгибе $F_i(x, y)$ представить в следующем виде

$$F_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + C_0 \Phi_i(x, y), \quad (2.1)$$

где Φ_i — функция кручения составного стержня в области D_i , а Ψ_i — вспомогательная функция, которую будем называть функцией изгиба.

Функции Φ_i удовлетворяют [10] дифференциальным уравнениям

$$\Delta \Phi_i = -2G_i \quad (2.2)$$

в соответствующих областях D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и условиям

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = 0 \quad \text{или} \quad \Phi_i = 0 \quad \text{на} \quad L_0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial s} \quad \text{или} \quad \Phi_i = \Phi_j \quad \text{на} \quad L_{ij}, \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{1}{G_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \quad \text{на} \quad L_{ij}. \quad (2.5)$$

На основании (1.3)–(1.6) и (2.1)–(2.5), принимая во внимание (1.13), получаем, что функция изгиба Ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \Psi_i = 2G_i (B_0 x - A_0 y) \quad (2.6)$$

в соответствующих областях D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и условиям

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} = \frac{1}{2} E_i \left[(B_0 y^2 + D_0 y) \frac{dx}{ds} - (A_0 x^2 + D_0 x) \frac{dy}{ds} \right] \quad \text{на} \quad L_0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial s} = \frac{1}{2} (E_i - E_j) \left[(B_0 y^2 + D_0 y) \frac{dx}{ds} - (A_0 x^2 + D_0 x) \frac{dy}{ds} \right] \quad \text{на} \quad L_{ij}, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = \frac{1}{G_j} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (2.9)$$

Покажем, что функцию изгиба Ψ на контурах L_i можно определить при помощи условий (2.7) и (2.8) так, чтобы Ψ_i на L_i была однозначной и непрерывной, если область D_i односвязна и сумма разрывов Ψ_i на контурах $L_i^0, L_i^1, L_i^2, \dots, L_i^m$ была равна нулю, если D_i многосвязна.

Для краткости введем обозначение

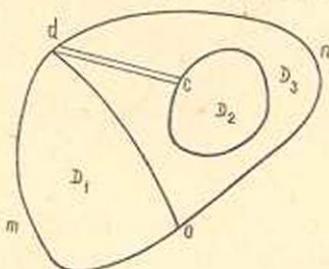
$$f_i = \frac{1}{2} E_i \left[(B_0 y^2 + D_0 y) \frac{dx}{ds} - (A_0 x^2 + D_0 x) \frac{dy}{ds} \right] \quad (2.10)$$

и сначала рассмотрим случай, когда D_0 состоит из двух односвязных и одной многосвязной областей (фиг. 1).

Интегрируя (2.7) по части контура ond и (2.8) по L_{12} от o до d , получаем

$$\Psi_1^-(d) = \int_{ond} f_1 ds, \quad (2.11)$$

$$\Psi_1^+(d) = \int_{od} f_1 ds - \int_{od} f_2 ds + \Psi_3^+(d). \quad (2.12)$$



Фиг. 1.

Значение функции Ψ в точке o принимаем равным нулю. Через $\Psi_1^+(d)$ и $\Psi_1^-(d)$ обозначаем значения функции Ψ_1 в точке d , лежащей на контуре L_1 , когда к этой точке приближаемся, двигаясь по контуру L_1 и оставляя область D_1 соответственно слева и справа.

Требую непрерывность и однозначность Ψ_1 на L_1 , из (2.11) и (2.12) получаем

$$\Psi_3^-(d) = \int_{ond} f_1 ds - \int_{od} f_1 ds + \int_{od} f_2 ds = \int_{od} f_2 ds - \int_{L_1} f_1 ds. \quad (2.13)$$

Интегрирования по контурам L_i производятся в положительном направлении, т. е. так, чтобы соответствующая область оставалась все время слева.

Интегрируя (2.7) по ond , имеем

$$\Psi_3^+(d) = \int_{ond} f_3 ds. \quad (2.14)$$

Согласно (2.13) и (2.14), функция Ψ_3 на L_3^0 в точке d имеет разрыв

$$\Psi_3^+(d) - \Psi_3^-(d) = \int_{ond} f_3 ds - \int_{od} f_2 ds + \oint_{L_1} f_1 ds = \oint_{L_3^0} f_3 ds + \oint_{L_1} f_1 ds. \quad (2.15)$$

Интегрируя условие (2.8) по L_{23} (L_2 или L_3) от произвольной точки c по положительному направлению относительно области D_3 , находим

$$\Psi_2^+(c) - \Psi_2^-(c) - \Psi_3^-(c) + \Psi_3^+(c) = \oint_{L_2} f_2 ds + \oint_{L_3} f_3 ds. \quad (2.16)$$

Обеспечивая однозначность и непрерывность Ψ_2 на L_2 , для Ψ_2 на внутреннем контуре L_3 области D_3 , согласно (2.16), будем иметь разрыв

$$\Psi_3^+(c) - \Psi_3^-(c) = \oint_{L_2} f_2 ds + \oint_{L_3} f_3 ds. \quad (2.17)$$

В двусвязной области D_3 проведем разрез cd и вычислим скачок $[\Psi_3]_{L_3}$ функции Ψ_3 при обходе разрезанной области по ее контуру L_3

$$\begin{aligned} [\Psi_3]_{L_3} &= \oint_{L_3^0} d\Psi_3 + \oint_{dc} d\Psi_3 + \int_{L_3} d\Psi_3 + \int_{cd} d\Psi_3 = \\ &= \Psi_3^+(d) - \Psi_3^-(d) + \Psi_3^+(c) - \Psi_3^-(c) + \int_{dc} d\Psi_3 + \int_{cd} d\Psi_3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Согласно условиям (2.8) и (2.9), производные Ψ_3 внутри области D_3 являются непрерывными функциями. Поэтому интегралы по берегам dc и cd разреза в (2.18) сокращаются. Остальные два интеграла по замкнутым контурам L_3^0 и L_3 дают искомым скачок

$$\int_{L_3^0} d\Psi_3 = [\Psi_3]_{L_3} = \Psi_3^+(d) - \Psi_3^-(d) + \Psi_3^+(c) - \Psi_3^-(c). \quad (2.19)$$

Согласно (2.15), (2.17) и (2.19), получаем

$$[\Psi_3]_{L_3} = \oint_{L_1} f_1 ds + \oint_{L_2} f_2 ds + \oint_{L_3} f_3 ds. \quad (2.20)$$

Нетрудно установить, что, когда связность области D_3 больше двух, т. е. внутри контура L_3^0 , кроме областей D_2 и D_3 , есть и другие области D_4, D_5, \dots, D_m , рассматриваемый скачок Ψ_3 определяется формулой

$$[\Psi_3]_{L_3} = \oint_{L_1} d\Psi_3 = \sum_{i=1}^m \oint_{L_i} f_i ds. \quad (2.21)$$

В общем случае, когда область D_0 состоит из произвольного числа односвязных и многосвязных областей D_i ($i=1, 2, \dots, N$), обеспечивая последовательно вышеприведенным способом однозначность Ψ на контурах L_i ($i=1, 2, \dots, N$), для скачка Ψ_N на контуре последней области D_N (разрезанной, если D_N многосвязна) находим

$$[\Psi_N]_{L_N^*} = \oint_{L_N^*} d\Psi_N = \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} f_i ds. \quad (2.22)$$

Пользуясь формулой Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx dy = \oint (R dx + Q dy) \quad (2.23)$$

и принимая во внимание обозначение (2.10), после некоторых преобразований из (2.22) получаем

$$[\Psi_N]_{L_N^*} = \oint_{L_N^*} d\Psi_N = - \left(A_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{iy} + B_0 \sum_{i=1}^N E_i S_{ix} + D_0 \sum_{i=1}^N E_i \Omega_i \right). \quad (2.24)$$

Согласно (1.7), правая часть (2.24) равна нулю. Таким образом, скачок Ψ на всех L_i^* равен нулю

$$[\Psi_i]_{L_i} = \int_{L_i} d\Psi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.25)$$

Отметим, что Ψ на контурах односвязных областей является однозначной и непрерывной. На каждом же отдельном контуре многосвязных областей Ψ имеет одну точку разрыва. Сумма скачков Ψ в этих точках для каждой многосвязной области равна нулю.

Отметим также, что на противоположных берегах разрезов многосвязных областей, если эти разрезы проведены через точки разрывов Ψ на контурах, значения Ψ различны, в то время как производные Ψ внутри каждой из областей являются непрерывными функциями.

3. Момент касательных напряжений изгиба $M_0(P_x)$ выразим через функцию напряжений при кручении Φ и функцию изгиба Ψ и постараемся исключить Ψ из выражения $M_0(P_x)$.

Подставляя F_i из (2.1) в (1.14), будем иметь

$$M_0(P_x) = - P_x \sum_{i=1}^N H_i + \frac{1}{2} P_x \sum_{i=1}^N E_i \iint_{D_i} (B_0 xy^2 - A_0 x^2 y) dx dy, \quad (3.1)$$

где введено обозначение

$$H_i = \iint_{D_i} \left[\frac{\partial (x\Psi_i)}{\partial x} + \frac{\partial (y\Psi_i)}{\partial y} \right] dx dy - 2 \iint_{D_i} \Psi_i dx dy + C_0 \iint_{D_i} \left[\frac{\partial (x\Phi_i)}{\partial x} + \frac{\partial (y\Phi_i)}{\partial y} \right] dx dy - 2 \iint_{D_i} \Phi_i dx dy. \quad (3.2)$$

Преобразуя первое и третье слагаемые правой части (3.2), получаем

$$H_i = 2 \int_{L_i^*} \Psi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds - 2 \iint_{D_i} \Psi_i dx dy + 2C_0 \int_{L_i^*} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds - 2C_0 \iint_{D_i} \Phi_i dx dy. \quad (3.3)$$

Здесь введено обозначение

$$\Omega_s = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^s (x dy - y dx). \quad (3.4)$$

Для преобразования двойных интегралов, входящих в (3.3), будем использовать известную формулу

$$\iint_{D_i} (\Phi_i \Delta \Psi_i - \Psi_i \Delta \Phi_i) dx dy = \int_{L_i^*} \left(\Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} - \Psi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right) ds. \quad (3.5)$$

Производная Φ_i по направлению нормали произвольной кривой линии, лежащей внутри D_i , выражается через производную функции кручения Сен-Венана $\varphi_i(x, y)$ вдоль этой кривой [11] следующим образом

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = - \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} - 2 \frac{d\Omega_s}{ds}. \quad (3.6)$$

Используя уравнения (2.2) и (2.6) и соотношение (3.6), из (3.5) получаем

$$\begin{aligned} 2 \oint_{L_i^*} \Psi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds - 2 \iint_{D_i} \Psi_i dx dy &= 2\nu \iint_{D_i} \Phi_i (B_0 x - A_0 y) dx dy - \\ &- \frac{1}{G_i} \oint_{L_i^*} \Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} ds - \oint_{L_i^*} \Psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На основании (3.3) и (3.7) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N H_i &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{G_i} \oint_{L_i^*} \Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} ds + \sum_{i=1}^N \oint_{L_i^*} \Psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds + 2C_0 \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \Phi_i dx dy - \\ &- 2\nu \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \Phi_i (B_0 x - A_0 y) dx dy - 2C_0 \sum_{i=1}^N \oint_{L_i^*} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Суммы контурных интегралов в (3.8) можно представить как суммы интегралов по отдельным частям L_0 и по два раза в противоположных направлениях по линиям раздела и по берегам разрезов.

Последняя сумма в (3.8) равна нулю, так как Φ_i непрерывна в каждой из областей D_i , на L_0 удовлетворяет условию (2.3), а на L_{ij} — условию (2.4). Интегралы по L_0 равны нулю, а по линиям раздела и по берегам разрезов сокращаются.

Первая сумма правой части (3.8) также равна нулю. Действительно, сумма интегралов по берегам разрезов равна нулю в силу непрерывности Φ_i и $\frac{\partial \Psi_i}{\partial n}$ внутри областей D_i , интегралы по отдельным частям L_0 равны нулю в силу (2.3), суммы же интегралов по линиям раздела два раза в противоположных направлениях, согласно (2.4), можно представить в следующем виде

$$\sum_{i=1}^N \oint_{L_{ij}} \Phi_i \left(\frac{1}{G_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} - \frac{1}{G_i} \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} \right) ds,$$

а эта сумма равна нулю согласно условию (2.9).

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{G_i} \int_{L_i} \Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \Phi_i \frac{d\Omega_i}{ds} ds = 0. \quad (3.9)$$

Преобразуем теперь вторую сумму правой части (3.8). Интегрируем под суммой по частям, получаем

$$\sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \Psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds = \sum_{i=1}^N [\Psi_i \varphi_i]_{L_i} - \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \varphi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial s} ds. \quad (3.10)$$

Первая сумма правой части (3.10) равна нулю в силу однозначности функций φ_i и Ψ_i на замкнутых контурах L_i .

$$\sum_{i=1}^N [\Psi_i \varphi_i]_{L_i} = 0. \quad (3.11)$$

Используя условие (2.7) и (2.8) и непрерывность φ в области D_0 , вторую сумму (3.10) преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \varphi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial s} ds &= \int_{L_0} \varphi \frac{\partial \Psi_0}{\partial s} ds + \sum_{ij} \int_{L_{ij}} \varphi \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial s} \right) ds = \\ &= \int_{L_0} \varphi \frac{\partial \Psi_0}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \sum_{ij} (E_i - E_j) \int_{L_{ij}} \varphi_i [(B_0 y^2 + D_0 y) dx - (A_0 x^2 + D_0 x) dy] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N E_i \int_{L_i} \varphi_i [(B_0 y^2 + D_0 y) dx - (A_0 x^2 + D_0 x) dy]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, функция изгиба Ψ из выражения $M_n(P_x)$ исключена.

Преобразуя в (3.12) под суммой контурные интегралы в двойные интегралы по областям D_i и принимая во внимание связь между Φ_i и φ_i [10]

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = G_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - y \right), \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = -G_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + x \right).$$

из (3.10)–(3.12) при помощи (2.23) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \oint_{L_i^*} \Psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i \varphi_i (A_0 x + B_0 y + D_0) dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i xy (B_0 y - A_0 x) dx dy + \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{G_i} \oint_{L_i^*} \Phi_i [(B_0 y^2 + D_0 y) dy + (A_0 x^2 + D_0 x) dx]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Последняя сумма в (3.13) равна нулю, так как Φ_i непрерывна в области D_0 и удовлетворяет условию (2.3), а величина $\frac{E_i}{G_i}$ постоянна для всех областей, поскольку коэффициенты Пуассона для всех материалов составного стержня равны. На этом основании вместо (3.13) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \oint_{L_i^*} \Psi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i \varphi_i (A_0 x + B_0 y + D_0) dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i xy (B_0 y - A_0 x) dx dy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Принимая во внимание (1.12), (1.16), (3.1), (3.8), (3.9) и (3.14), для ординаты центра изгиба \bar{y} составного стержня получаем

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -\frac{1}{P_x} M_0(P_x) = 2\nu \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \Phi_i [B_0 (x - x_i^*) - A_0 (y - y_i^*)] dx dy - \\ &- \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i \varphi_i (A_0 x + B_0 y + D_0) dx dy. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким же путем получается аналогичная формула для абсциссы \bar{x} центра изгиба

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{P_y} M_0(P_y) = -2\nu \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \Phi_i [B_0 (x - x_i^*) - A_0 (y - y_i^*)] dx dy + \\ &+ \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i \varphi_i (A_0 x + B_0 y + D_0) dx dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Теперь рассмотрим составной призматический стержень с продольными полостями, т. е. случай, когда область D_0 многосвязна. Выражения координат центра изгиба такого стержня при помощи функций Φ и φ можно получить вышесказанным путем или предельным переходом в формулах (3.15) и (3.16), предполагая, что полости заполнены материалом, модуль упругости которого стремится к нулю.

Области поперечного сечения составного многосвязного стержня, соответствующие полостям, обозначим через $D_{N+1}, D_{N+2}, \dots, D_{N+m}$. В работе [10] доказано, что при $E_i \rightarrow 0$ ($i = N+1, N+2, \dots, N+m$) функции Φ_i в областях D_i ($i = N+1, N+2, \dots, N+m$) стремятся к постоянным величинам $\Phi_1^0, \Phi_2^0, \dots, \Phi_m^0$, которые определяются при помощи обобщенной формулы Бредта, полученной там же.

Заменяя в формулах (3.15), (3.16) N на $N+m$, а в соответствующих слагаемых Φ_i и E_i своими предельными значениями, получаем координаты центра изгиба составного стержня многосвязного поперечного сечения

$$\begin{aligned} \bar{x} = & -2\nu \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \Phi_i [B_0(x-x_c) - A_0(y-y_c)] dx dy - \\ & - 2\nu \sum_{i=1}^m \Phi_i^0 [B_0(x_i - x_c) - A_0(y_i - y_c)] \Omega_i + \\ & + \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i \varphi_i (A_0 x + B_0 y + D_0) dx dy, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} = & 2\nu \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} \Phi_i [B_0(x-x_c) - A_0(y-y_c)] dx dy + \\ & + \sum_{i=1}^m \Phi_i^0 [B_0(x_i - x_c) - A_0(y_i - y_c)] \Omega_i - \\ & - \sum_{i=1}^N \iint_{D_i} E_i \varphi_i (A_0 x + B_0 y + D_0) dx dy. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь Ω_i, x_i, y_i — площадь и координаты центра тяжести области D_{N+i} ($i = 1, 2, \dots, m$).

Заметим, что при данном выводе формул (3.17) и (3.18) координаты центра тяжести x_c и y_c области D_0 соответствующим образом должны быть изменены.

В случае однородного стержня $E_i = E$ ($i = 1, 2, \dots, N, N+1, \dots, N+m$) (3.15) и (3.16) при необходимых изменениях обозначений совпадают с формулами, полученными в работе [5], а (3.17) и (3.18) — с формулами, полученными в работах [4] и [6].

Կ. Ս. Չորանյան, Վ. Վ. Միքայելյան

ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՈՎ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ԶՈՂԻ
ԾՌՄԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԸ ԳՏՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողի ածում ստացված են բանաձևեր, որոնք բաղադրվել են ձողի ծածան կենտրոնի կորդինատները արտահայտում են այդ ձողի սյուրման խնդրի մեն-վեկանի և Պրանդոլի բնականապես ֆունկցիաների միջոցով:

Վերահիշյալ բանաձևերն ստանալու համար ելնում ենք մի ծայրով ամրակցված բաղադրվել ձողի մյուս ծայրում կիրառված լախական ուժով ծածան խնդրի շոշափող լարումների սյուրող $M_{\text{էք}}$ մոմենտի արտահայտությունից:

Ծածան խնդրի լարումների $F(x, y)$ բնականապես ֆունկցիայից անջատում ենք բաղադրվել ձողերի սյուրման Պրանդոլի $\Phi(x, y)$ բնականապես ֆունկցիան՝

$$F(x, y) = \Psi(x, y) + C_0 \Phi(x, y):$$

Այստեղ C_0 հաստատունը սյուրման բացակայության դեպքում սրտչվում է բաղադրվել ձողի լախական հատվածքով և նյութի առաձգականության մոդուլից, իսկ սյուրման առկայության դեպքում՝ նաև սյուրման աստիճանով:

Ձողի լախական հատվածքի տիրույթի եզրում և սարքեր նյութի համապատասխանող տիրույթների բաժանման դժերի վրա $\Psi(x, y)$ ֆունկցիայի հատկությունների ուսումնասիրությունը հնարավորություն է տալիս սյուրող $M_{\text{էք}}$ մոմենտի արտահայտությունից արտաքսել $\Psi(x, y)$ ֆունկցիան:

Բաղադրվել ձողի ծածան կենտրոնի կորդինատները սրտչվում են սյուրող $M_{\text{էք}}$ մոմենտի և ծող ուժի համապատասխան բաղադրիչի հարաբերությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Панов Д. Ю. ДАН СССР, 3, № 3, 1934.
2. Берман М. Э. ДАН СССР, 72, № 1, 1950.
3. Голушкевич С. С. Труды Ленинградского политехнического института, раздел Гидротехники и строительного дела, № 2, 1950.
4. Carildeo R. Flexure with shear centres: a general treatment with complex variable. Proc. Cambridge Phil. society, v. 49, part 2, 1953, pp. 308—318.
5. Новожиллов В. В. ПММ, 21, вып. 2, 1957.
6. Прокопов В. К. Научно-технический информационный бюллетень, № 7, раздел физ.-мат. наук. ЛПИ, Л., 1960.
7. Рыбакина О. Г. Исследования по упругости и пластичности. Сборник № 1, Изд. ЛГУ, Л., 1961.
8. Саркисян В. С. Доклады АН АрмССР, 32, № 4, 1961.
9. Мухомелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
10. Чобанян К. С. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. естеств. и техн. наук, 8, № 2, 1955.
11. Чобанян К. С. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, II, № 5, 1958.