ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

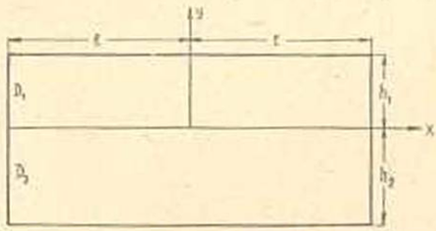
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVI, № 4, 1963 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. О. Галфаян

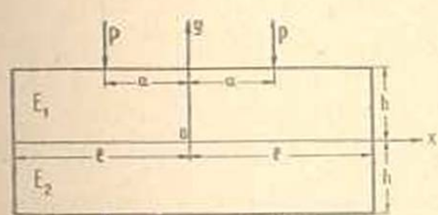
Об одной плоской задаче теории упругости для составного прямоугольника с учетом сил трения

Некоторые задачи теории упругости для составного прямоугольника рассмотрены в работах [1—3]. В настоящей работе рассматривается плоское напряженное состояние прямоугольных слоев конечной длины, соединенных между собой по сторонам $y=0$, $-l<x<l$ (фиг. 1). На сторонах $y=h_1$ и $y=-h_2$ даны симметрично распределенные относительно оси y нормальные и касательные напряжения. На сторонах же $x=\pm l$ даны нормальные напряжения и перемещения по направлению оси y, симметричные относительно этой оси. Материалы слоев имеют различные модули упругости и одинаковые коэффициенты Пуассона. Эта задача без учета сил трения между слоями рассмотрена в статье [8]. Аналогичная задача для однородного прямоугольника рассмотрена в работе [4].

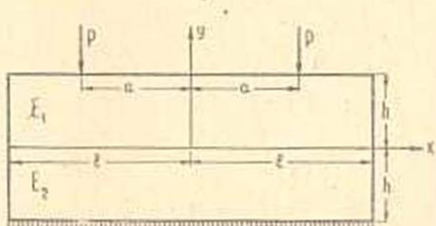


Фиг. 1.

Функции напряжений Эри рассматриваемой задачи представлены в виде рядов Фурье по тригонометрическим функциям. Для определения коэффициентов разложений получены системы линейных уравнений. В качестве примера рассмотрено сжатие составного упругого слоя нормальными силами, приложенными на горизонтальных сторонах (фиг. 2 и 3). Решение задачи доведено до числовых результатов.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Исследовано распределение нормальных и касательных напряжений на контакте при различных отношениях модулей упругости материалов $\frac{E_1}{E_2}$ и $\frac{a}{h}$, где $2a$ — расстояние между двумя сосредоточенными силами P, h — высота одного слоя.

1. Координатная система и размеры слоев, составляющих прямоугольник, показаны на фиг. 1.

Обозначим через Φ_i, σ_x^i, σ_y^i, τ_{xy}^i, u_i, v_i и E_i $(i = 1, 2)$ функцию Эри, напряжения, перемещения и модули упругости в соответствующих областях D_i $(i = 1, 2)$.

Функция напряжений Эри при отсутствии массовых сил удовлетворяет [5] дифференциальному уравнению

$$\Delta^2\Phi_i = \frac{\partial^4\Phi_i}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi_i}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi_i}{\partial y^4} = 0 \tag{1.1}$$

в каждой из областей D_i $(i = 1, 2)$.

Напряжения через функцию Φ выражаются следующим образом:

$$\sigma_x^i = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y^i = \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy}^i = -\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x\partial y}, \tag{1.2}$$

перемещения определяются соотношениями [6]

$$u_i = \frac{1}{E_i}\left\{\int\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial y^2}dx - \nu\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right\} - A_i y + B_i,$$

$$v_i = \frac{1}{E_i}\left\{\int\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}dy - \nu\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right\} + A_i x + C_i. \qquad (i = 1, 2) \tag{1.3}$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, A_i, B_i и C_i — постоянные, которые определяются из условий симметрии относительно оси y, т. е. $u_i(0, y) = \tau_{xy}^i(0, y) = 0$, и из условия $v_i(\pm l, 0) = 0$.

На контакте Φ удовлетворяет [7] условиям

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0), \quad \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right|_{y=0}, \quad -l < x < l, \tag{1.4}$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\right)_{y=0} = \varepsilon_{12}\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}\right)_{y=0}, \quad -l < x < l, \tag{1.5}$$

$$\left[\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial y\partial x^2}\right]_{y=0} = \varepsilon_{12}\left[\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3\Phi_2}{\partial y\partial x^2}\right]_{y=0},$$

где

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{\varepsilon_{21}} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Условия (1.4) и (1.5) выражают непрерывность напряжений σ_y, τ_{xy} и перемещений u, v.

Принимая, что внешнюю нагрузку и перемещение $v(\pm l, y)$ можно представить сходящимися тригонометрическими рядами, рассмотрим плоское напряженное состояние составного прямоугольника при следующих краевых условиях [2]:

$$\sigma_y^{(1)}(x,\ h_1) = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\Big|_{y=h_1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cos \alpha_k x,$$
$$\sigma_y^{(2)}(x,\ -h_2) = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}\Big|_{y=-h_2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cos \alpha_k x, \tag{1.6}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,\ h_1) = -\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x \partial y}\Big|_{y=h_1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sin \alpha_k x,$$
$$\tau_{xy}^{(2)}(x,\ -h_2) = -\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x \partial y}\Big|_{y=-h_2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \sin \alpha_k x, \tag{1.7}$$

$$\sigma_x^{(1)}(\pm l,\ y) = \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\Big|_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \cos \beta_k y,$$
$$\sigma_x^{(2)}(\pm l,\ y) = \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y^2}\Big|_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} \cos \gamma_k y, \tag{1.8}$$

$$v_1(\pm l,\ y) = \frac{1}{E_1}\left\{\int \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\,dy - \nu\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right\}_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)} \sin \beta_k y,$$
$$v_2(\pm l,\ y) = \frac{1}{E_2}\left\{\int \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}\,dy - \nu\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right\}_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(2)} \sin \gamma_k y, \tag{1.9}$$

где

$$\alpha_k = (2k-1)\frac{\pi}{2l}, \qquad \beta_k = (2k-1)\frac{\pi}{2h_1}, \qquad \gamma_k = (2k-1)\frac{\pi}{2h_2}. \tag{1.10}$$

На основании симметрии относительно оси y функцию $\Phi(x,\ y)$ можно определить только в одной половине прямоугольника ($x>0$).

Функции Φ_1 и Φ_2 ищем в следующей форме:

$$\Phi_1(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y (C_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k y)] \times$$
$$\times \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k x + F_k^{(1)} \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x] \cos \beta_k y, \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant l \\ 0 \leqslant y \leqslant h_1 \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\Phi_2(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y (C_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k y)] \times$$
$$\times \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(2)} \operatorname{ch} \gamma_k x + F_k^{(2)} \gamma_k x \operatorname{sh} \gamma_k x] \cos \gamma_k y, \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant l \\ -h_2 \leqslant y \leqslant 0 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в условия (1.8) и (1.9) и решая полученные уравнения относительно $E_k^{(i)}$ и $F_k^{(i)}$, получаем

$$E_k^{(1)} = -\frac{1}{\beta_k^2 \operatorname{ch} \beta_k l}\left[\left(1+\frac{1+\nu}{2}\beta_k l \operatorname{th}\beta_k l\right)c_k^{(1)}+\frac{E_1}{2}\beta_k^2 l \operatorname{th}\beta_k l\, d_k^{(1)}\right],$$

$$E_k^{(2)} = -\frac{1}{\gamma_k^2 \operatorname{ch} \gamma_k l}\left[\left(1+\frac{1+\nu}{2}\gamma_k l \operatorname{th}\gamma_k l\right)c_k^{(2)}+\frac{E_2}{2}\gamma_k^2 l \operatorname{th}\gamma_k l\, d_k^{(2)}\right], \quad (1.13)$$

$$F_k^{(1)} = \frac{(1+\nu)\,c_k^{(1)}+E_1\beta_k d_k^{(1)}}{2\beta_k^2 \operatorname{ch}\beta_k l}, \qquad F_k^{(2)} = \frac{(1+\nu)\,c_k^2+E_2\gamma_k d_k^{(2)}}{2\gamma_k^2 \operatorname{ch}\gamma_k l}.$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в условия (1.4) и (1.5), на основании (1.13) находим

$$A_k^{(1)} - A_k^{(2)} = r_k^{(1)},$$

$$A_k^{(1)} - \varepsilon_{12} A_k^{(2)} + \frac{2}{1+\nu}\left(D_k^{(1)} - \varepsilon_{12} D_k^{(2)}\right) = r_k^{(2)},$$

$$B_k^{(1)} + C_k^{(1)} = B_k^{(2)} + C_k^{(2)}, \quad (1.14)$$

$$B_k^{(1)} - \frac{1-\nu}{1+\nu}C_k^{(1)} = \varepsilon_{12}\left(B_k^{(2)} - \frac{1-\nu}{1+\nu}C_k^{(2)}\right),$$

где

$$r_k^{(1)} = (-1)^k \frac{2\alpha_k}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_p^2+\alpha_k^2)^2}\left[\left(2+\nu+\frac{\alpha_k^2}{\gamma_p^2}\right)c_p^{(2)}+E_2\gamma_p d_p^{(2)}\right] -$$

$$-(-1)^k \frac{2\alpha_k}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)^2}\left[\left(2+\nu+\frac{\alpha_k^2}{\beta_p^2}\right)c_p^{(1)}+E_1\beta_p d_p^{(1)}\right],$$

$$r_k^2 = (-1)^k \frac{2\alpha_k}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)^2}\left[\left(1-\nu+2\frac{\beta_p^2}{\alpha_k^2}\right)c_p^{(1)}-\left(\nu-\frac{\beta_p^2}{\alpha_k^2}\right)\frac{E_1\beta_p}{1+\nu}d_p^{(1)}\right] -$$

$$-(-1)^k \frac{2\alpha_k}{l}\varepsilon_{12}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_p^2+\alpha_k^2)^2}\left[\left(1-\nu+2\frac{\gamma_p^2}{\alpha_k^2}\right)c_p^{(2)}-\left(\nu-\frac{\gamma_p^2}{\alpha_k^2}\right)\frac{E_2\gamma_p}{1+\nu}d_p^{(2)}\right]. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в условия (1.6) и (1.7), на основании (1.13) получаем

$$A_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k h_1 + B_k^{(1)} \operatorname{sh}\alpha_k h_1 + \alpha_k h_1 \left(C_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k h_1 + D_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h_1\right) = -\frac{a_k^{(1)}}{\alpha_k^2},$$

$$A_k^{(2)} \operatorname{ch}\alpha_k h_2 - B_k^{(2)} \operatorname{sh}\alpha_k h_2 - \alpha_k h_2 \left(C_k^{(2)}\operatorname{ch}\alpha_k h_2 - D_k^{(2)}\operatorname{sh}\alpha_k h_2\right) = -\frac{a_k^{(2)}}{\alpha_k^2}, \quad (1.16)$$

$$\left(A_k^{(1)} + D_k^{(1)}\right)\operatorname{sh}\alpha_k h_1 +$$

$$+\left(B_k^{(1)} + C_k^{(1)}\right)\operatorname{ch}\alpha_k h_1 + \alpha_k h_1\left(C_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k h_1 + D_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k h_1\right) = \frac{b_k^{(1)} - s_k^{(1)}}{\alpha_k^2},$$

$$(A_k^{(2)} + D_k^{(2)}) \operatorname{sh} \alpha_k h_2 -$$

$$-(B_k^{(2)} + C_k^{(2)}) \operatorname{ch} \alpha_k h_2 - \alpha_k h_2 (C_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k h_2 - D_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k h_2) = -\frac{b_k^{(2)} + s_k^{(2)}}{\alpha_k^2},$$

где

$$\begin{aligned} s_k^{(1)} &= (-1)^k \frac{2\alpha_k^2}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_p}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2)^2} \left[\left(\nu - \frac{\beta_p^2}{\alpha_k^2} \right) c_p^{(1)} + E_1 \beta_p d_p^{(1)} \right], \\ s_k^{(2)} &= (-1)^k \frac{2\alpha_k^2}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \gamma_p}{(\gamma_p^2 + \alpha_k^2)^2} \left[\left(\nu - \frac{\gamma_p^2}{\alpha_k^2} \right) c_p^{(2)} + E_2 \gamma_p d_p^{(2)} \right]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

При этом использованы разложения

$$\operatorname{sh} \beta_p x = \frac{2\beta_p \operatorname{ch} \beta_p l}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{\alpha_k^2 + \beta_p^2},$$

$$x \operatorname{ch} \beta_p x = \frac{2}{l} (\beta_p l \operatorname{sh} \beta_p l - \operatorname{ch} \beta_p l) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} +$$

$$+ \frac{4}{l} \operatorname{ch} \beta_p l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_k^2 \sin \alpha_k x}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2},$$

$$\operatorname{ch} \beta_p x = \frac{2}{l} \operatorname{ch} \beta_p l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_k \cos \alpha_k x}{\alpha_k^2 + \beta_p^2}, \qquad (0 < x < l) \tag{1.18}$$

$$x \operatorname{sh} \beta_p x = 2 \operatorname{sh} \beta_p l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_k \cos \alpha_k x}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} -$$

$$- \frac{4\beta_p \operatorname{ch} \beta_p l}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_k \cos \alpha_k x}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2},$$

а также аналогичные разложения для функций $\operatorname{sh} \gamma_p x$, $\operatorname{ch} \gamma_p x$, $x \operatorname{sh} \gamma_p x$ и $x \operatorname{ch} \gamma_p x$ на интервале $(0, l)$.

Таким образом, коэффициенты $E_k^{(i)}$, $F_k^{(i)}$ $(i = 1, 2,\ k = 1, 2, \cdots)$ определяются при помощи контурных условий соотношениями (1.13) непосредственно. Для остальных коэффициентов имеем систему уравнений (1.14) и (1.16).

Выражения коэффициентов $A_k^{(i)}$, $B_k^{(i)}$, $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ получаются громоздкими.

Сходимость рядов, представляющих функции Φ_1 и Φ_2 и их производные до второго порядка внутри и на контурах областей D_1 и D_2, легко можно доказать способом, примененным в работе [8].

2. В качестве примера рассмотрим напряженное состояние двухслойного прямоугольника, находящегося под действием симметрично распределенной относительно оси y нормальной внешней нагрузки, приложенной только на сторонах $y = \pm h$, при условии $v(\pm l, y) = 0$, т. е.

$$b_k^{(i)} = c_k^{(i)} = d_k^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{2.1}$$

Для размеров прямоугольников и коэффициента Пуассона принимаем

$$h_1 = h_2 = h, \quad l = 10h, \quad \nu = 0.3. \tag{2.2}$$

Принимая во внимание (2.1) и (2.2), из (1.13)–(1.17) находим

$$A_k^{(1)} = A_k^{(2)} = -\frac{1}{\lambda_1}\left(D_k^{(1)} - \varepsilon_{12} D_k^{(2)}\right),$$

$$B_k^{(1)} = (1-\lambda_1) B_k^{(2)} + (1-\lambda_2) C_k^{(2)},$$

$$C_k^{(1)} = \lambda_1 B_k^{(2)} + \lambda_2 C_k^{(2)},$$

$$D_k^{(1)} = \left(\varepsilon_{12} - \lambda_1 \frac{\alpha_k^2 h^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}\right) D_k^{(2)} - \lambda_1 \left(\operatorname{th}\alpha_k h - \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}\right) B_k^{(2)} +$$

$$+ \lambda_1 \frac{a_k^{(2)}}{\alpha_k^2} \frac{1 + \alpha_k h \operatorname{th} \alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h},$$

$$C_k^{(2)} = \left(\operatorname{th}\alpha_k h + \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}\right) D_k^{(2)} - \frac{B_k^{(2)}}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h} - \frac{a_k^{(2)}}{\alpha_k^2} \frac{\operatorname{th}\alpha_k h}{\operatorname{ch}\alpha_k h}, \tag{2.3}$$

$$D_k^{(2)} = -\frac{1}{\alpha_k^2 \operatorname{ch}\alpha_k h} \frac{m_k^{(1)} a_k^{(1)} - \left(m_k^{(1)} g_k^{(2)} - m_k^{(2)} g_k^{(1)}\right) a_k^{(2)}}{m_k^{(1)} n_k^{(2)} - m_k^{(2)} n_k^{(1)}},$$

$$B_k^{(2)} = \frac{1}{\alpha_k^2 \operatorname{ch}\alpha_k h} \frac{n_k^{(1)} a_k^{(1)} - \left(n_k^{(1)} g_k^{(2)} - n_k^{(2)} g_k^{(1)}\right) a_k^{(2)}}{m_k^{(1)} n_k^{(2)} - m_k^{(2)} n_k^{(1)}},$$

$$E_k^{(1)} = E_k^{(2)} = F_k^{(1)} = F_k^{(2)} = 0,$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\nu)(1-\varepsilon_{12}), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[1 + \nu + (1-\nu)\varepsilon_{12}\right].$$

$$g_k^{(1)} = (1 + \lambda_2 \alpha_k h \operatorname{th}\alpha_k h) \operatorname{th}\alpha_k h + (1 + \alpha_k h \operatorname{th}\alpha_k h)\left[(1-\lambda_1)\operatorname{th}\alpha_k h - \lambda_1 \alpha_k h\right],$$

$$g_k^{(2)} = \left[(1-\lambda_2)\operatorname{th}\alpha_k h + \lambda_2 \alpha_k h\right] \operatorname{th}\alpha_k h + (1 + \alpha_k h \operatorname{th}\alpha_k h)(1 - \lambda_1 \alpha_k h \operatorname{th}\alpha_k h),$$

$$m_k^{(1)} = 1 + (1-\lambda_1)\operatorname{th}^2 \alpha_k h - \frac{1 + \lambda_2 \alpha_k h \operatorname{th}\alpha_k h + \alpha_k h\left[(1-\lambda_1)\operatorname{th}\alpha_k h - \lambda_1 \alpha_k h\right]}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h},$$

$$m_k^{(2)} = (2-\lambda_1)\operatorname{th}\alpha_k h - \frac{(1 - \lambda_1 + \lambda_2)\,\alpha_k h + (1 - \lambda_2 - \lambda_1 \alpha_k^2 h^2)\operatorname{th}\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h},$$

$$n_k^{(1)} = \varepsilon_{12}(\alpha_k h + \operatorname{th}\alpha_k h) + (1 + \lambda_2 \alpha_k h \operatorname{th}\alpha_k h)\left(\operatorname{th}\alpha_k h + \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}\right) +$$

$$+ \left[(1-\lambda_1)\operatorname{th}\alpha_k h - \lambda_1 \alpha_k h\right] \frac{\alpha_k^2 h^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}, \tag{2.4}$$

$$n_k^{(2)} = \varepsilon_{12} \alpha_k h \operatorname{th}\alpha_k h + \left[(1-\lambda_2)\operatorname{th}\alpha_k h + \lambda_2 \alpha_k h\right]\left(\operatorname{th}\alpha_k h + \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}\right) +$$

$$+ (1 - \lambda_1 \alpha_k h \operatorname{th} \alpha_k h) \frac{\alpha_k^2 h^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h}.$$

При помощи (1.2), (1.3), (1.11), (1.12) и (2.3) можно определить напряженное и деформированное состояние составного прямоугольника при любом отношении ε_{12} модулей упругости и при произвольном распределении внешней нормальной нагрузки, приложенной на сторонах $y = \pm h$.

Отметим, что при $\varepsilon_{12} = 1$, т. е. $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$, из (2.3) получаем

$$A_k^{(1)} = A_k^{(2)}, \quad B_k^{(1)} = B_k^{(2)}, \quad C_k^{(1)} = C_k^{(2)}, \quad D_k^{(1)} = D_k^{(2)}$$

и вообще, как и следовало ожидать, $\Phi_1(x, y) \equiv \Phi_2(x, y)$.

Вычисления проведены с десятью членами рядов (1.11) и (1.12) для двух случаев распределения внешней нагрузки: *а*) на сторонах $y = \pm h$ симметрично относительно осей x и y приложены четыре сосредоточенные нормальные силы (фиг. 2) и *б*) на одной стороне $(y = h)$ приложены две сосредоточенные силы, а на другой стороне $(y = -h)$ приложена равномерно распределенная нагрузка (фиг. 3).

В таблицах 1 и 2 приведены значения нормального напряжения σ_y в начале координат в зависимости от отношения расстояния a между точками приложения сосредоточенных сил к ширине полос h и от отношения ε_{12} модулей упругости материалов этих полос. Таблица 1 относится к случаю *а*, а таблица 2 — к случаю *б*. На фигурах 4—9 графически изображены распределения нормальных и касательных напряжений на контакте $y = 0$ для двух отношений модулей упругости материалов и двух отношений $\frac{a}{h}$.

Таблица 1

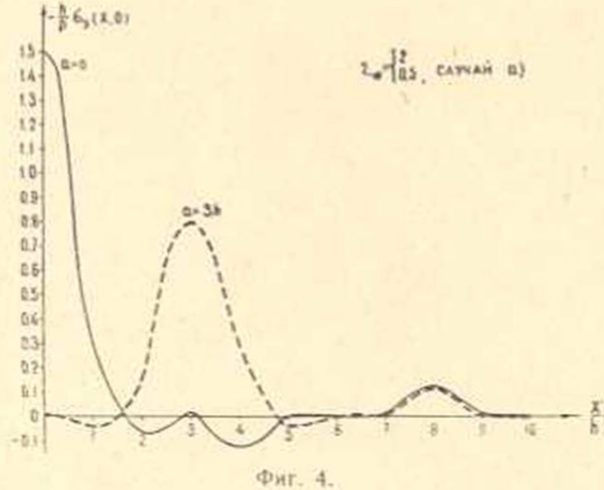
Случай *а* Значения $-\frac{h}{P}\sigma_y(0, 0)$

a/h \ ε_{12}	2	1	0,5	0,2	0,1	0
0	1,5469	0,94841	1,5469	1,5046	1,4644	1,3962
0,5	1,1185	0,73471	1,1185	1,0954	1,0749	1,0299
1	0,29761	0,30523	0,29758	0,30886	0,31633	0,32311
1,25	−0,00024	0,13097	−0,00023	0,02121	0,03747	0,06191
1,5	−0,14560	0,02392	−0,14560	−0,12205	−0,10323	−0,07171
1,75	−0,15127	−0,01643	−0,15128	−0,13249	−0,11655	−0,08750
2	−0,07437	−0,01129	−0,07437	−0,06383	−0,05372	−0,03276
3	0,00957	0,00424	0,00958	0,00883	0,00962	0,01511
5	0,00583	0,00285	0,00583	0,00532	0,00509	0,00527
7	0,00240	0,00121	0,00239	0,00222	0,00219	0,00210
9	0,00053	0,00022	0,00052	0,00046	0,00045	0,00043

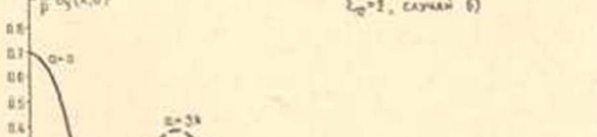
Таблица 2

Случай *б* Значения $-\frac{h}{P}\sigma_y(0,\ 0)$

a/h \ ε_{12}	2	1	0,5	0,2	0,1	0
0	0,70333	0,51267	0,94253	1,0827	1,1792	1,3958
0,5	0,53327	0,40555	0,68413	0,78023	0,85237	1,0295
1	0,20408	0,19101	0,19242	0,20477	0,22834	0,32269
1,25	0,08148	0,10391	0,01720	−0,00023	0,00410	0,06156
1,5	0,01777	0,05654	−0,06446	−0,0956[illegible]	−0,10266	−0,07203
1,75	0,00877	0,03011	−0,06114	−0,09152	−0,10232	−0,08788
2	0,03302	0,03254	−0,00847	−0,02956	−0,03912	−0,03313
3	0,05812	0,04039	0,05644	0,04117	0,03230	0,01480
5	0,05612	0,03969	0,04863	0,04134	0,03344	0,00519
7	0,05461	0,03865	0,04670	0,03931	0,03319	0,00224
9	0,05361	0,03791	0,04582	0,03850	0,03102	0,00089

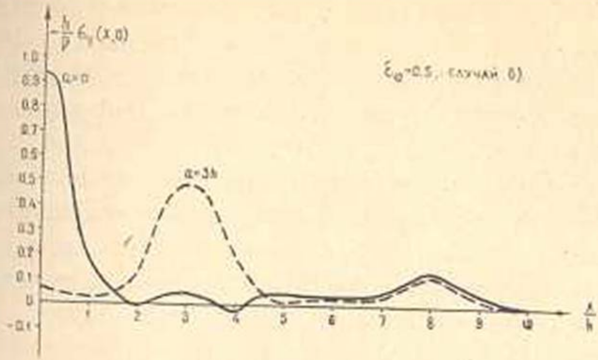


Фиг. 4.

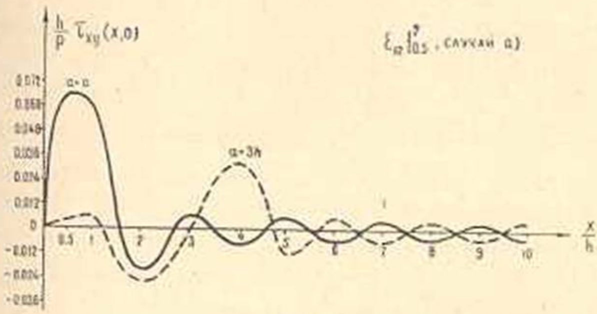


Фиг. 5.

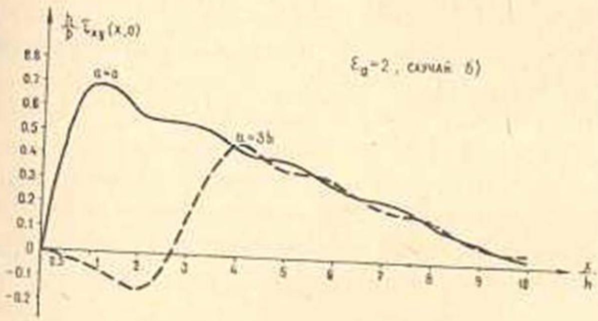
Данные вычисления, приведенные в таблице 1 и на фиг. 4, показывают, что в случае *a* на контакте двух прямоугольников всегда возникает отрицательное давление, если, конечно, *l* значительно больше *h*. Следовательно, как при свободном упирании прямоугольников



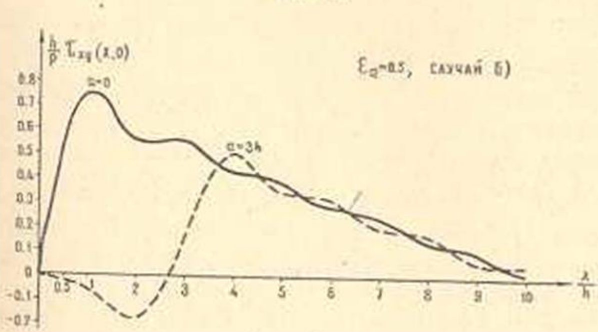
Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

без трения [8], так и при наличии трения между слоями контакт не может быть осуществлен по всей длине отрезка $y=0$, $-l<x<l$, каким бы то ни было отношение ε_{12} модулей упругости полос. После нагружения на некоторых участках линии $y=0$ прямоугольники отходят друг от друга.

В работе [8] получено, что при свободном упирании прямоугольников без трения распределение нормальных напряжений на контакте $y=0$ для случая *а* не зависит от ε_{12}, но здесь, когда учитываются касательные напряжения между слоями, распределение нормальных напряжений на контакте $y=0$ для обоих случаев *а* и *б* существенно зависит от ε_{12}. Вычисления показывают, как и следовало ожидать, что для случая *а*, если отношение $\varepsilon_{12}=\dfrac{E_1}{E_2}$ равно n, на контакте $y=0$ получаются те же самые нормальные и касательные напряжения, что и при $\varepsilon_{12}=\dfrac{1}{n}\cdot$ Кроме того, при $\varepsilon_{12}=1$ на контакте $y=0$ касательные напряжения равны нулю.

На основании результатов вычислений, приведенных в таблицах 1 и 2 и на фигурах 4—6, заключаем, что в обоих случаях распределения внешней нагрузки максимальные нормальные напряжения на контакте $y=0$ возникают под сосредоточенными силами для всех значений ε_{12}. Причем, как видно из первых строк таблиц 1 и 2, наименьшее значение этих напряжений получается для $\varepsilon_{12}=1$.

Вычисления, приведенные в таблице 2 и на фиг. 5, показывают, что в случае *б*, если $\varepsilon_{12}\geqslant 1$, т. е. модуль упругости верхнего слоя больше или равен модулю упругости нижнего слоя, на линии контакта возникают только сжимающие напряжения σ_y. Следовательно, при жестком упирании прямоугольных слоев и при рассматриваемом распределении внешней нагрузки контакт будет обеспечен по всей длине $2l$. Когда увеличиваем модуль упругости нижнего слоя, распределение контактных напряжений приближается к распределению, которое получается для этих напряжений в случае *а* (табл. 1). При больших значениях модуля упругости нижнего слоя, т. е. при $E_2\to\infty$, эти напряжения практически совпадают (см. последние столбцы таблиц 1 и 2). Как и следовало ожидать, чем больше модуль упругости нижнего слоя E_2, тем меньше влияет характер распределения внешней нагрузки, приложенной к стороне $y=-h$, на распределение контактных напряжений. В случае абсолютно жесткого нижнего слоя этого влияния совсем не будет.

Сравнивая полученные результаты с результатами, приведенными в [8], замечаем, что в случае *б* благодаря трению между прямоугольными слоями максимальные нормальные напряжения в рассматриваемых точках контакта $y=0$ убывают, если отношение $\varepsilon_{12}=\dfrac{E_1}{E_2}$

меньше или равно единице, и возрастают, если $\varepsilon_{12} > 1$, при одном и том же распределении внешней нагрузки.

Как показывают графики на фигурах 4 и 7, в случае *а* максимальные касательные напряжения значительно меньше соответственных максимальных нормальных напряжений (приблизительно в 24 раза), так что при симметричном распределении относительно оси x внешней нагрузки силами трения на контакте двух слоев можно пренебречь. Это не верно при несимметричном распределении внешних нагрузок. Действительно, сопоставляя результаты вычислений, показанных на фигурах 5, 6, 8, и 9, замечаем, что в случае *б* максимальные касательные напряжения и максимальные нормальные напряжения—величины одного порядка.

Отметим, что ряды, определяющие нормаланые и касательные напряжения, на контакте сходятся медленно [8]. Результаты расчетов показывают, что разность между значениями $\sigma_y(x, 0)$, $\tau_{xy}(x, 0)$, вычисленными при сохранении первых десяти или девяти членов рядов, не превышает 5% вышеприведенных значений контактных напряжений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 31 I 1963

Պ. Հ. Գալֆայան

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՇՓՄԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Բաղադրյալ ուղղանկյան լարվածային վիճակի ուսումնասիրմանը վերաբերվող մի քանի խնդիրներ դիտարկված են [1—3] աշխատություններում։ Ներկա հոդվածում դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ լարվածային վիճակը վերջավոր երկարություն ունեցող ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան շերտերը միմյանց հետ միացված են $y=0$, $-l<x<l$ *կողմերում։ Բաղադրյալ ուղղանկյան* $y=h_1$ *և* $y=-h_2$ *եզրերը կամայական կերպով բեռնավորված են նորմալ և շոշափող լարումներով՝ սիմետրիայի* y *առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ ձևով, իսկ* $x=\pm l$ *եզրերում կամայական կերպով տրված են նորմալ լարումները և շոշափող տեղափոխումները՝ սիմետրիայի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ ձևով։ Շերտերի նյութերն ունեն առաձգականության տարբեր մոդուլներ, բայց Պուասոնի գործակիցը երկուսի համար էլ միևնույնն է։ Այս խնդիրը, երկու շերտերի միջև շփման ուժերի բացակայության դեպքում, դիտարկված է [8] աշխատությունում, նման խնդիր համասեռ ուղղանկյան համար դիտարկված է [4] աշխատության մեջ։*

Դիտարկվող խնդրում Էրիի լարումների ֆունկցիան ներկայացվում է Ֆուրյեի շարքով, որի վերլուծության գործակիցների որոշման համար ստա-

նում ենք գծային հավասարումների սիստեմ: Որպես օրինակ դիտարկված է բաղադրյալ առաձգական շերտերի սեղմման խնդիրը, երբ սեղմող բեռը կիրառված է հորիզոնական եզրերում: Կենտրոնացված բեռով և հավասարաչափ բաշխված բեռով բեռնավորման դեպքերը հաշված են մինչև թվային արդյունքները: Ուսումնասիրված է նորմալ և շոշափող լարումների բաշխման օրենքը կոնտակտի $y=0$ գծի վրա, շերտերի առաձգականության մոդուլների տարբեր հարաբերությունների և $\frac{a}{h}$ հարաբերության տարբեր արժեքների համար: Ստացված թվային արդյունքները համեմատված են [8] աշխատության մեջ բերված թվային արդյունքների հետ: Կազմված են $\sigma_y(x, 0)$ և $\tau_{xy}(x, 0)$ լարումների բաշխման գրաֆիկները՝ շերտերի առաձգականության մոդուլների երկու հարաբերության և $\frac{a}{h}$ հարաբերության երկու արժեքների համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marguerre K.* Ingenieur—Archiv, 2 (1931), s. 108.
2. *Ерохин И. П.* Исследование напряженного состояния в балках, составленных из материалов с разными модулями упругости. Труды ЛИИПС, № 5, 1938.
3. *Раппопорт Р. М.* Расчет балок, составленных из материалов с различными механическими характеристиками. Труды Лен. политех. ин-та им. М. И. Калинина, № 5, 1948, 52—74.
4. *Валов Г. М.* К задаче о равновесии прямоугольника при смешанных граничных условиях. Исследования по теории сооружений, в. VII, 1957, 401—411.
5. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
6. *Абрамян Б. Л.* Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. ДАН АрмССР, **21**, № 5, 1955, 193—198.
7. *Чобанян К. С.* О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. ДАН АрмССР, **32**, № 2, 1961, 69—77.
8. *Чобанян К. С., Галфаян П. О.* Об одной задаче теории упругости для составного прямоугольника. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, № 2, 1963.