ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթեմ. գիտություններ XVI, № 4, 1963 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О спектре несамосопряженных возмущений бигармонического оператора в трехмерном пространстве

Введение

В работе изучается спектр несамосопряженного оператора

$$Tu = \Delta\Delta u + qu$$

в трехмерном евклидовом пространстве E в предположении, что комплекснозначная функция $q(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности. Основной результат состоит в том, что собственные значения этого оператора (включая и положительные) составляют конечное множество, причем остальная часть спектра состоит из всех точек положительной полуоси, не являющихся собственными значениями, и образует чисто непрерывную часть спектра оператора T. Приводимый ниже метод доказательства этого утверждения допускает применение к ряду других дифференциальных операторов.

Как показано в заметке автора [1], оператор $\Delta\Delta u$, рассматриваемый на многообразии финитных неограниченно дифференцируемых функций $u(x)$, определенных во всем трехмерном евклидовом пространстве E, допускает единственное самосопряженное расширение. Таким образом, это расширение должно совпадать с квадратом самосопряженного оператора Лапласа—Δu, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E)$ функций, определенных и суммируемых с квадратом во всем трехмерном евклидовом пространстве E.

Ниже, ради краткости, мы будем обозначать через A оператор Лапласа $Au = -\Delta u$, так что бигармонический оператор будет совпадать с A^2. Далее, следуя Денфорду, условимся говорить, что точка λ_0 является точкой непрерывного спектра некоторого несамосопряженного оператора T, если λ_0 не является собственным значением этого оператора и область значений $\Delta_{T-\lambda_0 E}$ оператора $T-\lambda_0 E$ всюду плотна и незамкнута.

Заметим, наконец, что спектр бигармонического оператора чисто непрерывен и совпадает с положительной полуосью.

В самом деле, этим свойством обладает спектр оператора Лапласа A. Если бы некоторое $\lambda_0 > 0$ оказалось собственным значением, а u — соответствующей собственной функцией оператора A^2, т. е. $(A+\sqrt{\lambda_0}E)(A-\sqrt{\lambda_0}E)\,u=0$, $\|u\|>0$, то, поскольку оператор $A+\sqrt{\lambda_0}E$ обратим, было бы $(A-\sqrt{\lambda_0}E)\,u=0$, что невозможно. Если бы $\lambda_0>0$ оказалось регулярной точкой оператора A^2, то многообразие функций вида $(A-\sqrt{\lambda_0}E)(A+\sqrt{\lambda_0}E)\,u$, $u\in D_{A^2}$ совпадало бы со всем пространством, что также невозможно, поскольку многообразие функций вида $(A-\sqrt{\lambda_0}E)\varphi$, $\varphi\in D_A$ незамкнуто. Наконец, кроме точек положительной полуоси, положительный оператор A^2 иных точек спектра иметь не может.

§ 1. Замечания о резольвенте бигармонического оператора и применимости аппарата Фредгольма

Ниже, ради краткости, мы будем обозначать через B_λ резольвенту оператора Лапласа A, а через R_λ — резольвенту бигармонического оператора A^2. Найдем прежде всего интегральное представление резольвенты R_λ при неположительных λ. Для этого заметим, что при неположительных λ

$$(A^2-\lambda E)^{-1}=(A-\sqrt{\lambda}E)^{-1}(A+\sqrt{\lambda}E)^{-1},$$

т. е.

$$R_\lambda=B_{\sqrt{\lambda}}B_{-\sqrt{\lambda}}.$$

Но, согласно тождеству Гильберта,

$$B_{\sqrt{\lambda}}B_{-\sqrt{\lambda}}=\frac{B_{\sqrt{\lambda}}-B_{-\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Итак, резольвента R_λ бигармонического оператора A^2 выражается через резольвенту B_λ оператора Лапласа формулой

$$R_\lambda=\frac{B_{\sqrt{\lambda}}-B_{-\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}}. \tag{1.1}$$

С другой стороны, в работе автора [2] показано, что для всех $f(x)\in L_2(\mathrm{E})$

$$B_\lambda f(x)=\int\limits_E \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|x-y|}}{4\pi|x-y|}f(y)\,dy \qquad (\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}>0), \tag{1.2}$$

где $|x-y|$ означает расстояние между точками x и y пространства Е, а $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости. Условимся в дальнейшем для неположительных λ обозначать через $\lambda^{\frac{1}{2}}$ то значение квадратного корня, которое лежит в верхней полуплоскости, а через $\lambda^{\frac{1}{4}}$ — ту ветвь этой функции, которая лежит в первом квадранте $\operatorname{Re}\lambda^{\frac{1}{4}}>0$, $\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{4}}>0$. Тогда $i\lambda^{\frac{1}{4}}$ лежит в верхней полуплоскости и является квадратным корнем из $-\lambda^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, в этих обозначениях из (1.1) и (1.2) следует

$$R_\lambda f(x) = \int\limits_E \frac{e^{i\lambda^{\frac{1}{4}}|x-y|} - e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}|x-y|}}{8\pi\lambda^{\frac{1}{2}}|x-y|} f(y)\,dy, \tag{1.3}$$

где

$$\operatorname{Re}\lambda^{\frac{1}{4}} > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{4}} > 0.$$

В заключение сформулируем и наметим доказательство двух простых лемм, которые дадут нам возможность в следующем параграфе воспользоваться аппаратом Фредгольма. Доказательства этих лемм почти не отличаются от общеизвестных доказательств и поэтому на деталях мы останавливаться не будем.

Лемма 1.1. *Пусть в пространстве* $L_2(E)$ *рассматривается уравнение вида*

$$u(x) = \lambda \int\limits_E \varphi(x,y)\, q(y)\, u(y)\, dy, \tag{1.4}$$

где $\qquad |\Phi(x, y)| \leq M = \text{const.}, \quad q(x) \in L_2(E).$

Пусть, далее, существует такая функция $R(x, t; \lambda)$, *что почти для всех* $x \in E$

$$\int\limits_E |R(x, t; \lambda)|^2\, dt < \infty, \qquad \int\limits_E |R(x, t; \lambda)|\, dt < \infty, \tag{1.5}$$

причем

$$R(x, t; \lambda) = \Phi(x, t)\, q(t) + \lambda \int\limits_E R(x, t_1; \lambda)\, \Phi(t_1, t)\, q(t)\, dt_1. \tag{1.6}$$

Тогда уравнение (1.4) в пространстве $L_2(E)$ *имеет только тривиальное решение* $u = 0$.

Доказательство. Достаточно обе части (1.4) умножить на $R(x, t; \lambda)$ и проинтегрировать по t, поменяв в правой части порядок интегрирований, и воспользоваться тождеством (1.6). Все эти операции, как легко видеть, законны в силу (1.5).

Обозначим далее

$$K(x, y) = \Phi(x, y)\, q(y). \tag{1.7}$$

где $\qquad |\Phi(x, y)| \leq M = \text{const.}, \quad q(x) \in L(E), \quad q(x) \in L_2(E), \qquad (1.8)$

и положим

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1), \cdots, K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1), \cdots, K(x_2\, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ K(x_n, y_1), \cdots, K(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

Введем в рассмотрение ряд

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n, \tag{1.10}$$

где числа d_n определены формулами

$$d_n = \underbrace{\int_E \cdots \int_E}_{n \text{ раз}} K\begin{pmatrix} t_1, t_2, \cdots, t_n \\ t_1, t_2, \cdots, t_n \end{pmatrix} dt_1, dt_2 \cdots dt_n. \tag{1.11}$$

Лемма 1. 2. *Пусть в пространстве $L_2(E)$ рассматривается уравнение*

$$u(x) = \lambda \int_E K(x, y)\, u(y)\, dy, \tag{1.12}$$

где измеримая функция $K(x, y)$ определяется формулой (1.7) и условиями (1.8). Тогда правая часть (1.10) сходится на всей плоскости и если $D(\lambda) \neq 0$, то уравнение (1.12) имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2(E)$.

Доказательство. Положим

$$d_n(x, t) = \underbrace{\int_E \cdots \int_E}_{n \text{ раз}} K\begin{pmatrix} x, t_1, \cdots, t_n \\ t, t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix} dt_1 \cdots dt_n. \tag{1.13}$$

Заметив, что

$$K\begin{pmatrix} x, t_1, \cdots, t_n \\ t, t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix} = q(t)\, q(t_1) \cdots q(t_n)\, \Phi\begin{pmatrix} x, t_1, \cdots, t_n \\ t, t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix}$$

и $|\Phi(x, t)| \leqslant M$, получаем

$$\left| K\begin{pmatrix} x, t_1, \cdots, t_n \\ t, t_1, \cdots, t_n \end{pmatrix} \right| \leqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}} M^{n+1} |q(t)|\, |q(t_1)| \cdots |q(t_n)|. \tag{1.14}$$

Далее, разлагая определитель (1.9) по элементам первого столбца и интегрируя, находим

$$d_n(x, t) = K(x, t)\, d_n - n \underbrace{\int_E \cdots \int_E}_{n \text{ раз}} K(t_1, t)\, d_{n-1}(x, t_1)\, dt_1. \tag{1.15}$$

Заметим, что, как это следует из (1.14),

$$|d_n| \leqslant n^{\frac{n}{2}} M^n \left(\int_E |q(t)|\, dt \right)^n, \tag{1.16}$$

$$|d_n(x, t)| \leqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}} M^{n+1} \left(\int_E |q(t)|\, dt \right)^n \cdot |q(t)|. \tag{1.17}$$

Первая из этих оценок показывает, что ряд (1.10) действительно сходится на всей плоскости. Легко также видеть, что функция

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(x, t) \tag{1.18}$$

удовлетворяет тождеству

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) D(\lambda) + \lambda \int_E D(x, t_1; \lambda) K(t_1, t)\, dt_1. \tag{1.19}$$

Для проверки достаточно воспользоваться формулой (1.15) и заметить, что почленное интегрирование в правой части (1.19) законно в силу оценки (1.17). Совершенно очевидно также, что

$$\int_E |D(x, t; \lambda)|^2 dt < \infty, \qquad \int_E |D(x, t; \lambda)|\, dt < \infty.$$

Таким образом, если $D(\lambda) \neq 0$, то функция

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

удовлетворяет условию (1.6) и лемма 1.2 является следствием леммы 1.1.

§ 2. О спектре возмущенного бигармонического оператора

Предполагая, что комплекснозначная функция $q(x)$, заданная на всем пространстве E, измерима и ограничена, введем в рассмотрение несамосопряженный оператор

$$Tu = \Delta\Delta u + qu, \tag{2.1}$$

область определения которого совпадает с областью определения бигармонического оператора.

Лемма 2.1. *Если $q(x) \in L_2(E)$, то отличные от нуля собственные значения (включая и положительные) оператора T, определенного формулой (2.1), совпадают с теми значениями параметра λ, при которых уравнение*

$$u(x) = -\int_E \frac{e^{i\lambda^{\frac{1}{4}}|x-y|} - e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}|x-y|}}{8\pi\lambda^{\frac{1}{2}}|x-y|} q(y) u(y)\, dy, \tag{2.2}$$

где

$$\operatorname{Re}\lambda^{\frac{1}{4}} > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{4}} > 0,$$

имеет нетривиальные решения $u \in L_2(E)$.

Доказательство. Для доказательства заметим, что если λ_0 является точкой непрерывного спектра самосопряженного оператора A^2 и если уравнение

$$A^2u - \lambda_0 u = f$$

разрешимо, то

$$u = \lim_{\tau\to 0} R_{\lambda_0+i\tau} f \qquad (\operatorname{Im}\tau = 0), \tag{2.3}$$

где сходимость в правой части понимается в сильном смысле.

В самом деле, очевидно, что u удовлетворяет уравнению

$$u = R_{\lambda_0+i\tau} f - i\tau R_{\lambda_0+i\tau} u \tag{2.4}$$

при любом вещественном $\tau \neq 0$. Представим $R_{\lambda_0+i\tau}$ в виде

$$R_{\lambda_0+i\tau} = R_{\lambda_0+i\tau}(E_{\lambda_0+\sqrt{|\tau|}} - E_{\lambda_0-\sqrt{|\tau|}}) + R_{\lambda_0+i\tau}[(E - E_{\lambda_0+\sqrt{|\tau|}}) + E_{\lambda_0-\sqrt{|\tau|}}],$$

где E_λ — разложение единицы оператора A^2 и заметим, что

$$\| R_{\lambda_0+i\tau} E_{\lambda_0-\sqrt{|\tau|}} \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}, \qquad \| R_{\lambda_0+i\tau}(E - E_{\lambda_0+\sqrt{|\tau|}}) \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}.$$

Поэтому

$$\| - i\tau R_{\lambda_0+i\tau} u \| \leqslant \| (E_{\lambda_0+\sqrt{|\tau|}} - E_{\lambda_0-\sqrt{|\tau|}}) u \| + 2\sqrt{|\tau|}\, \| u \|$$

и (2.3) следует из (2.4).

Предположив, что λ_0 является собственным значением оператора T и записав это условие в виде $A^2u - \lambda_0 u = -qu$, получаем в силу (2.3)

$$u = -\lim_{\tau\to 0} R_{\lambda_0+i\tau} qu,$$

если $\lambda_0 > 0$ и

$$u = -R_{\lambda_0} qu$$

в противном случае. Положив далее в правой части (2.2) $\lambda = \lambda_0 + i\tau$ (в случае $\lambda_0 > 0$) и заметив, что предельный переход по τ в смысле обычной сходимости можно совершить под знаком интеграла в силу суммируемости функции qu и равномерной ограниченности ядра резольвенты R_λ, приходим к утверждению леммы.

Теорема 2.1 *Пусть измеримая и определенная на всем трехмерном евклидовом пространстве* E *функция* $q(x)$ *при некотором* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет условию*

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad C = \text{const}. \tag{2.5}$$

Тогда множество собственных значений (включая и положительные) оператора T, *определенного формулой (2.1), конечно.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1 достаточно установить, что при $\operatorname{Re}\lambda^{\frac{1}{4}} > 0$, $\operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{4}} \geqslant 0$ интегральное уравнение (2.2) имеет лишь тривиальные решения в $L_2(\text{E})$, за исключением конечного множества значений λ. Если положить

$$\lambda^{\frac{1}{4}} = z, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Im} z \geq 0 \tag{2.6}$$

$$K_z(x, y) = -\frac{e^{iz|x-y|} - e^{-z|x-y|}}{8\pi z^2 |x-y|}, \tag{2.7}$$

то надо установить конечность множества значений z, при которых уравнение

$$u(x) = \int_E K_z(x, y)\, q(y)\, u(y)\, dy \tag{2.8}$$

имеет нетривиальные решения в $L_2(E)$. Согласно лемме 1.2, это сводится к доказательству конечности множества нулей функции

$$D(1; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{d_n(z)}{n!}, \tag{2.9}$$

лежащих в области (2.6). Здесь функции $d_n(z)$ определены формулами

$$d_n(z) = \underbrace{\int_E \cdots \int_E}_{n \text{ раз}} \det \| K_z(x_i, x_j)\, q(x_j) \| \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \tag{2.10}$$

Положим

$$A(z, |x_i - x_j|) = \begin{cases} \dfrac{e^{iz|x_i - x_j|} - e^{-z|x_i - x_j|}}{8\pi |x_i - x_j|}, & (i \neq j) \\[2ex] \dfrac{i+1}{8\pi} z, & (i = j). \end{cases} \tag{2.11}$$

Легко видеть, что

$$\det \| K_z(x_i, x_j)\, q(x_j) \| = (-1)^n \frac{q(x_1) \cdots q(x_n)}{z^{2n}} \det \| A(z, |x_i - x_j|) \|. \tag{2.12}$$

Будем рассматривать функции $A(z, |x_i - x_j|)$ для z, лежащих в области

$$\operatorname{Re} z > -\delta, \quad \operatorname{Im} z > -\delta, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.13}$$

Поскольку в этом случае точки iz и $-z$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \delta$ и для $r > 0$ имеем

$$\frac{e^{izr} - e^{-zr}}{r} = \int_{-z}^{iz} e^{\mu r}\, d\mu,$$

то

$$|e^{izr} - e^{-zr}| < 2|z|\, r e^{\delta r}.$$

Таким образом,

$$|A(z, |x_i - x_j|)| < \frac{|z|}{4\pi} e^{\delta(|x_i| + |x_j|)}. \tag{2.14}$$

С другой стороны,

$$\det \| K_z(x_i, x_j)\, q(x_j) \| =$$

$$= (-1)^n \frac{q(x_1)\cdots q(x_n)}{z^{2n}} e^{\delta(|x_1| + \cdots + |x_n|)} \det \| A(z, |x_i - x_j|)\, e^{-\delta|x_j|} \|. \tag{2.15}$$

В силу (2.14) и неравенства Адамара получаем отсюда

$$|\det \| K_z(x_i, x_j)\, q(x_j) \|| <$$

$$< \left(\frac{\sqrt{n}}{4\pi |z|} \right)^n e^{2\delta(|x_1| + \cdots + |x_n|)} |q(x_1)| \cdots |q(x_n)|. \tag{2.16}$$

Положив

$$\int_E e^{2\delta|x|} |q(x)|\, dx = M, \tag{2.17}$$

приходим к оценке

$$|d_n(z)| < \left(\frac{\sqrt{n}\, M}{4\pi |z|} \right)^n, \tag{2.18}$$

которая показывает, что при $z \neq 0$ ряд в правой части (2.9) равномерно сходится в области (2.13). Итак, при $z \neq 0$ функция $D(1, z)$ голоморфна в этой области. Чтобы доказать, что точка $z = 0$ может являться лишь полюсом функции $D(1, z)$, найдем вычеты функций $d_n(z)$. С этой целью заметим, что независимо от выбора точек x_i и x_j имеем

$$\left. \frac{dA(z, |x_i - x_j|)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{i+1}{8\pi}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим, далее, производную

$$\frac{d^k}{dz^k} \det \| A(z, |x_i - x_j|) \|_{z=0}, \quad 0 < k < 2n - 2.$$

Рассматриваемая производная равна сумме определителей, каждый из которых получается из $\det \| A(z, |x_i - x_j|) \|$, если каждую i-ую строку продифференцировать m_i раз, причем $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$. Легко видеть, что по крайней мере одно $m_i < 1$, ибо в противном случае $k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 2n$. Поэтому либо только одно $m_i < 1$ и тогда $m_i = 0$ и $k = 2n - 2$, либо по крайней мере два значения m_{i_1} и m_{i_2} не превосходят единицы. Итак, в любом случае либо хотя бы одно $m_i = 0$, либо существует не менее двух значений m_{i_1} и m_{i_2}, равных единице. В обоих случаях рассматриваемые определители равны нулю при $z = 0$ в силу (2.11) или (2.19), соответственно. Итак, в окрестности $z = 0$ имеем

$$\det\|A(z,|x_i-x_j|)\| = \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial z^{2n-1}}\det\|A(z,|x_i-x_j|)\|_{z=0} + z^{2n}\Psi,$$

откуда

$$\operatorname{res}\{d_n(z)\}|_{z=0} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\underbrace{\int_E\cdots\int_E}_{n\ \text{раз}} q(x_1)\cdots q(x_n)\frac{\partial^{2n-1}}{\partial z^{2n-1}}\det\|A(z,|x_i-x_j|)\||_{z=0}\,dx_1\cdots dx_n. \tag{2.20}$$

Заметим, далее, что

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial z^{2n-1}}\det\|A(z,|x_i-x_j|)\|_{z=0}$$

есть сумма n определителей, каждый из которых получен следующим образом: одна строка определителя $\det\|A(z,|x_i-x_j|)\|$ продифференцирована один раз, остальные строки по два раза и после этого положено $z=0$. Заметим также, что $\det\|A(z,|x_i-x_j|)\|$ представляется в виде некоторой суммы вида

$$\det\|A(z,|x_i-x_j|)\| = \sum \pm A(z,|x_1-x_{j_1}|)\cdots A(z,|x_n-x_{j_n}|). \tag{2.21}$$

С другой стороны, согласно формуле Лейбница

$$(A(z,|x_1-x_{j_1}|)\cdots A(z,|x_n-x_{j_n}|))^{(2n-1)} =$$

$$= \sum\frac{(2n-1)!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}A^{(k_1)}(z,|x_1-x_{j_1}|)\cdots A^{(k_n)}(z,|x_n-x_{j_n}|). \tag{2.22}$$

Из (2.21) и (2.22) следует, что

$$(\det\|A(z,|x_i-x_j|)\|)^{(2n-1)} =$$

$$= \sum\frac{(2n-1)!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}\begin{vmatrix} A^{(k_1)}(z,|x_1-x_1|), \cdots, A^{(k_1)}(z,|x_1-x_n|) \\ A^{(k_2)}(z,|x_2-x_1|), \cdots, A^{(k_2)}(z,|x_2-x_n|) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A^{(k_n)}(z,|x_n-x_1|), \cdots, A^{(k_n)}(z,|x_n-x_n|) \end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

Если в (2.23) положить $z=0$, то обратятся в нуль все определители, кроме, быть может, тех, в которых одно из $k_i=1$, а остальные k_i равны 2. В самом деле, все k_i должны быть не меньше единицы, ибо если некоторое $k_i=0$, то i-ая строка определителя обращается в нуль при $z=0$ согласно (2.11). Далее, хотя бы одно $k_i=1$, ибо если бы все k_i были не меньше двух, то было бы $2n-1 = k_1+\cdots+k_n \geq 2n$. Но если, например, $k_{i_1}=1$, то очевидно, что $k_{i_2}=\cdots=k_{i_n}=2$. В самом деле, если бы некоторое k_{i_2} оказалось равным единице, то i_1-ая и i_2-ая строки определителя совпали бы при $z=0$ в силу (2.19). Таким образом, $k_{i_2}+\cdots+k_{i_n} \geq 2n-2$, откуда

$k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_n}\geqslant 2n-1$. Поскольку последнее неравенство должно обратиться в равенство, то $k_{i_2}=\cdots=k_{i_n}=2$.

Теперь ясно, что при $z=0$ в правой части (2.23) остается не более чем n определителей, в каждом из которых одно из $k_i=1$, а остальные k_i равны 2. Все эти определители снабжены одним и тем же коэффициентом, равным $\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$.

Рассмотрим теперь определитель вида

$$D=\begin{vmatrix} A'(0,|x_1-x_1|), & A'(0,|x_1-x_2|),\cdots, & A'(0,|x_1-x_n|) \\ A''(0,|x_2-x_1|), & A''(0,|x_2-x_2|),\cdots, & A''(0,|x_2-x_n|) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A''(0,|x_n-x_1|), & A''(0,|x_n-x_2|),\cdots, & A''(0,|x_n-x_n|) \end{vmatrix}.$$

Согласно (2.19) все элементы первой строки равны $\frac{i+1}{8\pi}$. Далее, из (2.11) вытекает, что

$$A''(0,|x_i-x_j|)=-\frac{|x_i-x_j|}{4\pi}.$$

Таким образом, при любом $\delta>0$ имеем

$$|A''(0,|x_i-x_j|)|\leqslant\frac{e^{\delta|x_i|}\,e^{\delta|x_j|}}{4\pi\delta},\quad |A'(0,|x_i-x_j|)|<\frac{1}{4\pi}.$$

Пользуясь неравенством Адамара, получаем

$$|D|\leqslant n^{\frac{n}{2}}\frac{e^{2\delta(|x_1|+\cdots+|x_n|)}}{(4\pi)^n\,\delta^{n-1}}.$$

Аналогично оценивается каждый определитель из правой части (2.23), в котором одно из k_i равно единице, а остальные равны двум.

Поскольку число отличных от нуля определителей такого вида, как мы видели, не превышает n и все они снабжены одним и тем же коэффициентом, равным $\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$, то из (2.23) получаем

$$\left|(\det\|A(z,|x_i-x_j|)\|)^{(2n-1)}_{z=0}\right|\leqslant\frac{(2n-1)!\,n^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{4\pi}\,\frac{e^{\delta(|x_1|+\cdots+|x_n|)}}{(8\pi\delta)^{n-1}}.$$

Таким образом, из (2.20) следует

$$|\operatorname{res}|d_n(z)|_{z=0}|\leqslant\frac{n^{\frac{n}{2}+1}}{4\pi(8\pi\delta)^{n-1}}\left|\int\limits_{E}e^{2\delta|x|}|q(x)|\,dx\right|^n.$$

или, если воспользоваться обозначением (2.17), считая, что δ удовлетворяет условию (2.13),

$$|\operatorname{res}[d_n(z)]_{z=0}| \leqslant \frac{n^{\frac{n}{2}+1} M^n}{4\pi (8\pi\delta)^{n-1}}.$$

Эта оценка показывает, что ряд из вычетов, соответствующий ряду (2.9), сходится. Таким образом, функция $D(1, z)$, определяемая рядом (2.9), голоморфна в области (2.13) за исключением, быть может, начала координат, в котором она может иметь полюс. С другой стороны, из оценки (2.18) следует, что $D(1, z)$ стремится к единице на бесконечности. Поэтому $D(1, z)$ в области $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ может иметь лишь конечное число нулей, что и доказывает теорему.

Ниже нам понадобятся следующие утверждения, установленные в работах автора [1], [3].

Теорема А. Пусть самосопряженный оператор A определен на многообразии D_A, плотном в гильбертовом пространстве H, а S— некоторый ограниченный линейный оператор (несамосопряженный), $D_S = H$. Пусть, далее, оператор $SR_\lambda S$, где R_λ—резольвента оператора A, вполне непрерывен для всех невещественных λ, $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Тогда все точки непрерывного спектра оператора A принадлежат спектру возмущенного оператора $T = A + S^2$ $(D_T = D_A)$, причем точками спектра оператора T, лежащими вне спектра оператора A, могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора A.

Теорема В. Пусть в неограниченной области E n-мерного евклидова пространства задана ограниченная измеримая комплекснозначная функция $q(x)$, стремящаяся к нулю на бесконечности. Если резольвента R_λ неограниченного оператора A, заданного на плотном многообразии в $L_2(E)$, имеет вид

$$R_\lambda f = \int\limits_E H(x, y; \lambda) f(y)\, dy,$$

где

$$\int\limits_{G_1}\left(\int\limits_{G_2} |H(x, y; \lambda)|^2 dy\right) dx < \infty,$$

для любых ограниченных областей $G_1, G_2 \subset E$, то все точки непрерывного спектра оператора A принадлежат спектру оператора $Tu = Au + qu$ $(D_T = D_A)$, причем точками спектра оператора T, лежащими вне спектра оператора A, могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне спектра оператора A.

Теорема С. Пусть R_λ—резольвента самосопряженного оператора A (неограниченного) в гильбертовом пространстве H и S—ограниченный линейный оператор (несамосопряженный). Точка λ_0 непрерывного спектра оператора A остается точкой непрерывного спектра возмущенного оператора $T=A+S^2$, если для какой-нибудь последовательности вещественных чисел τ_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=0$, имеет место оценка

$$\overline{\lim_n}\|SR_{\lambda_0+i\tau_n}S\|=q<1.$$

В силу ограниченности ядра резольвенты (1.3) бигармонического оператора из теоремы В непосредственно вытекает следующее предложение.

Теорема 2.2. *Пусть ограниченная измеримая комплексно-значная функция $q(x)$ стремится к нулю на бесконечности. Тогда все точки положительной полуоси принадлежат спектру оператора $Tu=\Delta\Delta u+qu$, причем точками спектра оператора T, лежащими вне положительной полуоси, могут быть лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне положительной полуоси.*

Теорема 2.3. *Если ограниченная измеримая функция $q(x)$ суммируема, то все собственные значения оператора $Tu=\Delta\Delta u+qu$ (считая и положительные) лежат в ограниченной области и могут иметь предельные точки лишь на положительной полуоси. Остальная часть спектра оператора T чисто непрерывна и состоит из всех точек положительной полуоси, не являющихся собственными значениями оператора T.*

Доказательство. Для доказательства заметим, что в силу (1.3) оператор $SR_\lambda S$, упоминаемый в теореме C, имеет в рассматриваемом случае вид

$$SR_\lambda Sf(x)=\int\limits_E\sqrt{q(x)}\,\frac{e^{i\lambda^{\frac{1}{4}}|x-y|}-e^{-\lambda^{\frac{1}{4}}|x-y|}}{8\pi\lambda^{\frac{1}{2}}|x-y|}\sqrt{q(y)}\,f(y)\,dy,$$

где

$$\operatorname{Re}\lambda^{\frac{1}{4}}>0,\quad \operatorname{Im}\lambda^{\frac{1}{4}}>0.$$

Отсюда немедленно следует, что при достаточно больших по модулю λ выполнено условие теоремы C. С другой стороны, оператор $SR_\lambda S$ является, очевидно, вполне непрерывным. Таким образом, остается применить теоремы A и C и заметить при этом, что если $\lambda_0>0$ является собственным значением оператора $Tu=\Delta\Delta u+qu$, то оно является одновременно собственным значением сопряженного оператора $T^*u=\Delta\Delta u+\bar{q}u$. Поэтому, если $\lambda_0>0$ не является собственным значением оператора T, то многообразие элементов вида $(T-\lambda_0E)u$, $u\in D_T$, плотно в $L_2(E)$. С другой стороны, это многообразие не совпадает со всем пространством $L_2(E)$, ибо в силу теоремы А точка $\lambda_0>0$ не может быть регулярной точкой оператора T и поэтому λ_0 является точкой чисто непрерывного спектра.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 X 1962

Ռ. Մ. Մարտիրոսյան

ԵՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԲԻՀԱՐՄՈՆԻԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՈՉ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԳՐԳՌՈՒՄՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունում ուսումնասիրվում է E եռաչափ էվկլիդյան տարածության մեջ

$$Tu = \Delta\Delta u + qu \qquad (1)$$

ոչ ինքնահամալուծ օպերատորի սպեկտրը, այն ենթադրությամբ, որ կոմպլեքս արժեքներ ընդունող $q(x)$ ֆունկցիան չափելի է և սահմանափակ:

Ապացուցվում է հետևյալը:

Թեորեմ 1. Դիցուք ամբողջ E եռաչափ էվկլիդյան տարածության մեջ սահմանված և չափելի $q(x)$ ֆունկցիան որևէ դրական ε-ի դեպքում բավարարում է

$$|q(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|}, \qquad C = \text{const.}$$

պայմանին:

Այդ դեպքում (1) բանաձևով որոշվող T օպերատորի սեփական արժեքների բազմությունը (ներառյալ և դրականները) վերջավոր է: T օպերատորի սպեկտրի մնացած մասը զուտ անընդհատ է և բաղկացած է սեփական արժեք չհանդիսացող դրական կիսաառանցքի բոլոր կետերից:

Թեորեմ 2. Դիցուք կոմպլեքս արժեքներ ընդունող սահմանափակ և չափելի $q(x)$ ֆունկցիան անվերջությունում ձգտում է զրոյի: Այդ դեպքում դրական կիսաառանցքի բոլոր կետերը պատկանում են $Tu = \Delta\Delta u + qu$ օպերատորի սպեկտրին, ընդ որում դրական կիսաառանցքից դուրս T օպերատորի սպեկտրի կետեր կարող են հանդիսանալ միայն սեփական արժեքները, որոնք դրական կիսաառանցքից դուրս սահմանային կետեր չունեն:

Թեորեմ 3. Եթե $q(x)$ սահմանափակ չափելի ֆունկցիան հանրագումարելի է, ապա $Tu = \Delta\Delta u + qu$ օպերատորի սեփական արժեքները (ներառյալ և դրականները) գտնվում են սահմանափակ տիրույթում և կարող են ունենալ սահմանային կետեր միայն դրական կիսաառանցքի վրա: T օպերատորի սպեկտրի մնացած մասը զուտ անընդհատ է և բաղկացած է դրական կիսաառանցքի սեփական արժեք չհանդիսացող բոլոր կետերից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мартиросян Р. М.* Об индексах дефекта и спектре некоторых операторов. ДАН АрмССР, **34**, № 2, 1962.
2. *Мартиросян Р. М.* О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta u + cu$ в трехмерном пространстве. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **10**, № 1, 1957.
3. *Мартиросян Р. М.* О спектре некоторых несамосопряженных операторов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 5, 1961.