

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. М. Седракян

Излучение заряженной нити, движущейся параллельно краю бесконечно проводящего экрана

Известно, что при равномерном движении заряженной нити в однородной среде при скоростях, меньших скорости света в среде, нить не излучает. Но если в среде создать какие-нибудь неоднородности, скажем поместить металлический экран, появится излучение. Это можно рассматривать как дифракцию поля движущейся нити на неоднородностях.

Рассмотрим нить, параллельную оси z и движущуюся в положительном направлении оси x со скоростью v на расстоянии d от края металлической полуплоскости ($x=0, y<0$) с бесконечной проводимостью (фиг. 1). Из симметрии задачи

вытекает, что \vec{H} имеет только z компоненту

H_z и \vec{E} находится в плоскости, перпендикулярной к оси z , кроме того, поля не зависят

от координаты z . Введем вектор Герца $\vec{\Pi}$. Как

известно, поля \vec{E} и \vec{H} выражаются через вектор Герца $\vec{\Pi}$ следующим образом:

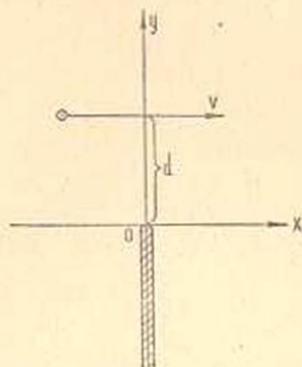
$$\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2},$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\Pi}. \quad (1)$$

Вектор Герца представим в виде

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}', \quad (2)$$

где $\vec{\Pi}_0$ описывает поле равномерно заряженной нити, движущейся с постоянной скоростью v , а $\vec{\Pi}'$ описывает поле излучения. Вектор $\vec{\Pi}'$ является решением однородного уравнения Даламбера и подбирается так, чтобы удовлетворить краевым условиям. Из симметрии задачи вытекает, что вектор Герца имеет только одну компоненту Π_x . Вектор $\vec{\Pi}_0$, описывающий поле нити в пустоте, запишем следующим образом:



Фиг. 1. Ось z направлена перпендикулярно к плоскости чертежа.

$$\Pi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_0(k, \omega) e^{-i \left[\frac{\omega}{v} (x - vt) + k(y - d) \right]} dk d\omega,$$

где

$$\Pi_0(k, \omega) = \frac{ix}{\pi} \frac{1}{\omega \left[k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2) \right]}, \quad (3)$$

x — есть линейная плотность заряда нити.

Вектор Герца для поля излучения запишем в виде

$$\Pi'(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi'(k, \omega, x) e^{-iky + i\omega t} dk d\omega. \quad (4)$$

Подставляя это решение в волновое уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 \Pi'(k, \omega, x)}{\partial x^2} - \gamma^2 \Pi'(k, \omega, x) = 0, \quad (5)$$

где $\gamma^2 = k^2 - \alpha^2$, а $\alpha = \frac{\omega}{c} + i\alpha_2$, α_2 — малая положительная величина.

При этом выбирается ветвь функции $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$, которая при действительных $k \rightarrow \pm \infty$ имеет положительные значения. Эта ветвь функции $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ выбирается на плоскости комплексного переменного „ k “ с двумя разрезами. Один из разрезов проведен вдоль действительной оси от $+k$ до $+\infty$, а другой от $-k$ до $-\infty$. Действительная ось проходит по нижнему берегу первого разреза и верхнему берегу второго.

Решение уравнения (5), учитывая непрерывность функции и ее ограниченность на бесконечности, имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi'(k, \omega, x) &= A(k) e^{-\gamma x} \quad \text{при } x \geq 0 \\ \Pi'(k, \omega, x) &= -A(k) e^{\gamma x} \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому выражение (4) примет такой вид

$$\Pi'(x, y, t) = \pm \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-iky + \gamma x + i\omega t} dk d\omega, \quad (4')$$

где верхний знак берется для $x > 0$, а нижний для $x < 0$. В дальнейшем мы для простоты будем считать $x > 0$.

Граничные условия требуют равенства нулю компоненты E_y полного электрического поля при $y < 0$ и $x = 0$ и компоненты H_z магнитного вектора поля излучения при $y > 0$ и $x = 0$. Совершим обратное преобразование в уравнении (4)

$$\Pi'(k, \omega, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi'(x, y, t) e^{iky - i\omega t} dy dt.$$

Введем обозначения

$$\Pi_{-}(\pm 0) \equiv \Pi'_{-}(k, \omega, \pm 0) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \Pi'(x, y, t) e^{iky - i\omega t} dy dt \quad (7)$$

$$\Pi_{+}(\pm 0) \equiv \Pi'_{+}(k, \omega, \pm 0) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \Pi'(x, y, t) e^{iky - i\omega t} dy dt,$$

где $\Pi'_{+}(\pm 0)$ как функция комплексного переменного k^* регулярна в области $\tau > -z_2$, а $\Pi'_{-}(\pm 0)$ регулярна в области $\tau < z_2$. Поэтому функция $\Pi'(\pm 0)$, равная сумме $\Pi'_{+}(\pm 0)$ и $\Pi'_{-}(\pm 0)$, регулярна в области $-z_2 < \tau < z_2$ (фиг. 2).

Учитывая уравнение (6) и обозначения (7), можно написать

$$\begin{aligned} \Pi'_{+}(+0) + \Pi'_{-}(+0) &= A(k) \\ \Pi'_{+}(-0) + \Pi'_{-}(-0) &= -A(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненту поля излучения E'_y найдем из формулы (1):

$$E'_y = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-ik \frac{\partial \Pi'(k, \omega, x)}{\partial x} \right] e^{-iky + i\omega t} dk d\omega. \quad (9)$$

Делая обратное преобразование найдем

$$\begin{aligned} -ik \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, x)}{\partial x} \right]_{+} &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} E'_y e^{-i\omega t + iky} dy dt \\ -ik \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, x)}{\partial x} \right]_{-} &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 E'_y e^{-i\omega t + iky} dy dt \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Pi'(k, \omega, x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, x)}{\partial x} \right]_{+} + \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, x)}{\partial x} \right]_{-}.$$

С учетом (6), уравнение (10) при $x=0$ примет вид

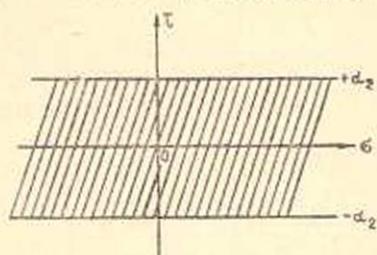
$$\left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_{+} + \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_{-} = -\gamma A(k). \quad (11)$$

Из условий $H'_z = 0$ при $x=0, y > 0$ получим

$$\Pi'_{+}(+0) = \Pi'_{+}(-0) = \Pi'_{+}(0) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Pi'_{-}(+0) + \Pi'_{-}(-0) &= 2S_{-} \\ \Pi'_{-}(+0) - \Pi'_{-}(-0) &= 2D_{-}. \end{aligned} \quad (12)$$



Фиг. 2. Плоскость комплексного переменного $k = \sigma + i\tau$.

Из уравнений (8) и (11) получим систему

$$\Pi_+(0) = -S_- = 0 \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_+ + \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_- = -\gamma D_-$$

Эту систему уравнений будем решать методом Винера-Хопфа.

Из условий $E_y = 0$ при $x = 0$, $y < 0$ и с помощью (1), (3) и (10) можно найти

$$\left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_- = \frac{ix}{(2\pi)^{1/2}v} \cdot \frac{e^{-da}}{k(a+ik)}$$

где $\alpha = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1-\beta^2}$.

Умножая второе из уравнений (13) на функцию $\frac{k}{(k+\alpha)^{1/2}}$, получим

$$\frac{k}{(k+\alpha)^{1/2}} \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_+ + \frac{x}{(2\pi)^{1/2}v} \cdot \frac{e^{-da}}{(k+\alpha)^{1/2}(k-ia)} = -k(k-\alpha)^{1/2} D_- \quad (13')$$

Первое слагаемое слева как функция комплексного переменного регулярно в области $\tau > -\alpha_2$, а функция $k(k-\alpha)^{1/2} D_-$ регулярна в области $\tau < \alpha_2$. Представим теперь второе слагаемое слева в формуле (13') в виде суммы двух функций, соответственно регулярных в области $\tau > -\alpha_2$ и $\tau < \alpha_2$.

$$\frac{x}{(2\pi)^{1/2}v} \cdot \frac{e^{-da}}{(k+\alpha)^{1/2}(k-ia)} = H_+(k) + H_-(k), \quad (14)$$

где $H_+(k)$ регулярна в области $\tau > -\alpha_2$ и $H_-(k)$ регулярна в области $\tau < \alpha_2$. Тогда

$$H_+(k) = \frac{x}{(2\pi)^{1/2}v} \cdot \frac{e^{-da}}{k-ia} \cdot \left[\frac{1}{(k+\alpha)^{1/2}} - \frac{1}{(\alpha+ia)^{1/2}} \right]$$

$$H_-(k) = \frac{x}{(2\pi)^{1/2}v} \cdot \frac{e^{-da}}{k-ia} \cdot \frac{1}{(\alpha+ia)^{1/2}}$$

Подставляя (14) в (13'), получим

$$I(k) = \frac{k}{(k+\alpha)^{1/2}} \left[\frac{\partial \Pi'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_+ + H_+(k) = -k(k-\alpha)^{1/2} D_- - H_-(k). \quad (15)$$

Уравнение (15) определяет функцию $I(k)$, регулярную в полуплоскости $\tau > -\alpha_2$ и одновременно регулярную и в полуплоскости $\tau < \alpha_2$, а следовательно, она будет регулярна на всей плоскости комплексного переменного „ k “. Легко убедиться в том, что при $|k| \rightarrow \infty$ функция $|I(k)| \rightarrow 0$. Тогда из теоремы Лиувилля вытекает, что $I(k) \equiv 0$. Из этого условия получим

$$k \left[\frac{\partial \Gamma'(k, \omega, 0)}{\partial x} \right]_+ = -(k + \alpha)^{1/2} H_+(k) \quad (15')$$

$$k(k - \alpha)^{1/2} D_- = -H_-(k).$$

Подставляя (15') в (11) и учитывая формулу (14'), получим искомую функцию $A(k)$.

$$k \cdot A(k) = - \frac{x}{(2\pi)^{1/2} v} \cdot \frac{e^{-\alpha a}}{(k - i\alpha) \cdot (k - \alpha)^{1/2} \cdot (\alpha + i\alpha)^{1/2}} \quad (16)$$

Выражение $kA(k)$ можно преобразовать, введя следующие обозначения:

$$\frac{1}{\beta} = \cos \theta_0 \quad \text{и} \quad i \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} = \sin \theta_0.$$

Мы получим

$$kA(k) = - \frac{x}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{\sin \theta_0' e^{-\alpha a}}{(k - \alpha)^{1/2} (\alpha + \alpha \cos \theta_0') (k - \alpha \cos \theta_0')} \quad (16')$$

где $\theta_0' = \frac{\pi}{2} - \theta_0$. Это выражение $kA(k)$ совпадает с решением Зомерфельда задачи о диффракции света, падающего на плоскость под углом θ_0 . Однако, совпадение является формальным, так как θ_0 есть мнимая величина. При $\beta > 1$ величина θ_0 становится действительной.

Однако при движении нити в пустоте величина $\beta = \frac{v}{c}$ не может превышать единицу. Если же нить движется в преломляющей среде, то β переходит в $\beta' = \beta n$, где n — показатель преломления среды. Тогда угол θ_0 есть угол, под которым испускается излучение Вавилова-Черенкова. В этом случае $|\beta'| > 1$ формула (16') описывает диффракцию черенковского излучения нити на краю экрана.

С помощью формул (16) и (1) можно определить компоненты полей излучения

$$E_x' = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) k^2 e^{-iky - \gamma x + i\omega t} dk d\omega$$

$$E_y' = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) k \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} e^{-iky - \gamma x + i\omega t} dk d\omega \quad (17)$$

$$H_z' = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) k \omega e^{-iky - \gamma x + i\omega t} dk d\omega.$$

Нас будут интересовать поля на больших расстояниях от края полуплоскости. Поэтому мы можем при интегрировании по „ k “ использовать метод перевала. Интегрирование по „ k “ дает

$$E' = H' = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} A \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \right) \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \sqrt{\frac{|\omega|}{c}} \sin \theta \cos \theta \frac{e^{i\omega t - i \frac{\omega}{c} r + i \frac{\pi|\omega|}{4\omega}}}{\sqrt{\rho}} d\omega, \quad (18)$$

где $x = \rho \cos \theta$ и $y = \rho \sin \theta$. Магнитное поле направлено по оси z , а электрическое поле имеет отличные от нуля компоненты E_x и E_y , причем на больших расстояниях от края экрана $x E_x + y E_y = 0$.

Полная интенсивность излучения определяется формулой

$$W = 2c \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |H_{\omega}|^2 \rho d\omega d\theta, \quad (18)$$

Подсчитывая H_{ω} , найдем

$$W = \frac{x^2 e^{-2\delta n}}{\pi \xi} \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\left[\sin^2 \theta + \frac{1-\xi^2}{\xi^2} \right] (1-\sin \theta)}. \quad (19)$$

Подинтегральное выражение дает угловое распределение излучения. Проводя интегрирование по углам мы получим частотный спектр излучения

$$W_{\omega} = \frac{x^2 \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{e^{-2 \frac{\omega}{c} \sqrt{1-\xi^2} a}}{\omega}. \quad (20)$$

Мы видим, что излучение растет с уменьшением частоты, а также при увеличении скорости нити. Излучение экспоненциально падает при увеличении расстояния от траектории нити до экрана.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Б. М. Болотовскому за постановку задачи и ценные советы, а также А. Ц. Аматыни за обсуждение.

Поступила 3 XII 1962

Գ. Մ. Սեդրակյան

ՀԱՂՈՐԴԻՋ ԱՆՎԵՐՋ ԷԿՐԱՆԻ ԵԶՐԻՆ ԶՈՒԳԱՅԵՌ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ԼԱՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅՅՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հետազոտված են հազարգիշ էկրանի եզրին զուգահեռ շարժվող լիցքավորված լարի անցման ժամանակ առաջացած Հառադալթիման դաշտերը: Լարը շարժվում է էկրանին ուղղահայաց, նրանից d հեռավորության վրա:

Ստացված են բանաձևեր, որոնք որոշում են էլեկտրական և մագնիսական դաշտերի տեսքը էկրանի եզրից մեծ հեռավորությունների վրա:

Ստացված են նաև ճառագայթման ինտենսիվության անկյունային բաշխումը և ճառագայթման լրիվ ինտենսիվությունը: Լրիվ ինտենսիվությունը հակադարձ համեմատական է հաճախականությանը և էկսպոնենցիալորեն նվազում է լարի էկրանի եզրից ունեցած հեռավորության և հաճախականության ամձան ժամանակ: Այդ իսկ պատճառով սկսած որոշ $\omega = \omega_{\max}$ հաճախականությունից, ճառագայթման սպեկտրը խզվում է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. И, Л., М., 1962.