

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Н. А. Петросян

К вопросу о трансформации профиля ветра под
влиянием подстилающей поверхности

1. Постановка вопроса

Вопросу о трансформации профиля ветра при переходе воздушного потока с одной подстилающей поверхности на другую посвящено немалое количество теоретических работ [1, 2]. Некоторые стороны вопроса рассмотрены в работе [3].

В настоящей статье рассматривается задача в следующей постановке.

Для плоской стационарной задачи уравнение движения и уравнение неразрывности имеют вид [1]

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + w \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.1)$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где U и w — соответственно горизонтальная (по x) и вертикальная (по z) составляющие скорости, $k(z)$ — коэффициент турбулентного обмена.

Прежде чем поставить граничные условия, заметим следующее. Для некоторых практических задач немаловажное значение имеет вопрос о том, как будет трансформироваться заданный профиль скорости ветра $U_0(z)$ на стыке двух подстилающих поверхностей под влиянием второй поверхности. Поэтому в качестве первого граничного условия возьмем

$$U(x, z)|_{x=0} = U_0(z). \quad (1.2)$$

Второе граничное условие имеет вид

$$k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \tau_0^2,$$

где τ_0 — скорость трения, z_0 — уровень шероховатости подстилающей поверхности, т. е. напряжение трения определяется подстилающей поверхностью. Так как величина $k(z) \frac{\partial U}{\partial z}$ медленно меняется с высотой, последнее условие можно удовлетворять при $z=0$, т. е.

$$k(z) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = v_*^2. \quad (1.3)$$

Примем еще условие, что на достаточно большой высоте скорости при $x=0$ и $x=\infty$ практически совпадают, т. е.

$$U_*(z)|_{z \rightarrow \infty} = U_0(z)|_{z \rightarrow \infty}. \quad (1.4)$$

2. Решение задачи

Поставленная задача нелинейна. В тех случаях, когда „начальный“ профиль $U_0(z)$ мало отличается от предельного установившегося профиля $U_*(z)$, можно линеаризовать задачу, вводя внешний поток. Пусть

$$U(x, z) = U_*(z) + u(x, z),$$

где $u(x, z)$ — некоторая добавочная скорость, которая возникает под влиянием новой подстилающей поверхности.

Подставляя последнее выражение $U(x, z)$ в систему уравнений (1.1) и пренебрегая членами второго порядка малости, получим для добавочной скорости систему уравнений

$$U_* \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial U_*}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

При этом граничные условия для добавочной скорости примут вид

$$u(x, z)|_{x=0} = U_0(z) - U_*(z), \quad (2.2)$$

$$k(z) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2.3)$$

в силу того, что $U_*(z)$ тоже удовлетворяет условию (1.3). Третье граничное условие имеет вид

$$u(x, z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

В дальнейшем будут рассматриваться решения, которые при $x=0$ удовлетворяют следующему уравнению

$$U_0(z) = cz^m + \Phi(z),$$

где $\Phi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Тогда предельный профиль $U_*(z)$ будет иметь вид $U_*(z) = cz^m$, причем константа из граничного условия (1.3)

$$c = \frac{v_*^2}{k_1 m}.$$

Задача решается методом последовательных приближений.

Основанием для выбора именно такого метода последовательных приближений является следующее рассуждение: запишем систему уравнений (2.1) в виде одного уравнения, подставляя из второго уравнения этой системы значение w в первое. И если при этом использовать вид функции

$$U_{\infty}(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m,$$

получим уравнение

$$\frac{u_1}{z_1^m} z^m \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u_1 m}{z_1^m} z^{m-1} \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u}{\partial z}; \quad m \ll 1.$$

Пользуясь формулой Лагранжа, второй член левой части этого уравнения запишем в виде

$$\frac{u_1}{z_1^m} m z^{m-1} \cdot z \frac{\partial u}{\partial x} (z_1).$$

Отсюда видно, что если $\partial u / \partial x$ в основном слое мало меняется по высоте, то второй член, содержащий малый множитель m ($m \approx \frac{1}{10}$), является малым по сравнению с первым членом.

При решении задачи мы ограничились первым приближением. Как первое приближение $u^{(1)}$ взято решение следующего линейного уравнения

$$U_{\infty} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \quad (2.5)$$

при граничных условиях (2.2)–(2.4). Примем для $U_{\infty}(z)$ и $k(z)$ степенные законы

$$U_{\infty}(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m,$$

$$k(z) = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-m},$$

где u_1 и k_1 — соответственно значения скорости ветра и коэффициента турбулентного обмена на высоте z_1 . Подставляя $U_{\infty}(z)$ и $k(z)$ в уравнение (2.5) и введя новые переменные „ τ “ и „ ζ “ в виде

$$\frac{k_1}{z_1^2 u_1} x = \tau, \quad \left(\frac{z}{z_1} \right)^m = \zeta,$$

получим уравнение

$$m^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \tau^2} = \zeta^{\frac{1}{m}} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau}$$

или, обозначая $m^2 \tau = t$,

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = \zeta^{\frac{1}{m}} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}; \quad \zeta = \frac{1}{m}. \quad (2.6)$$

Граничные условия (2.2)–(2.4) для новых переменных примут вид

$$\begin{aligned} u^{(1)}|_{t=0} &= U_0(\zeta^0) - U_\infty(\zeta^0), \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} &= 0, \\ u^{(1)}|_{\zeta \rightarrow \infty} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.6) при граничных условиях (2.7) ищется в виде интеграла Фурье. (Близкая задача при других граничных условиях для влажности и температуры была решена в работе [4]).

Решение нашей задачи получается в виде

$$u^{(1)} = \sqrt{\zeta} \int_0^\infty \xi p(\xi) d\xi \frac{1}{2\delta^2 t} e^{-\frac{\zeta^2 + \xi^2}{4\delta^2 t}} I_{-\nu} \left(\frac{\eta \xi}{2\delta^2 t} \right), \quad (2.8)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2\delta}, \quad \eta = \zeta^0, \quad \delta = \frac{1+2m}{2m}, \quad t = \frac{m^2 k_1}{z_1^2 u_1} x, \\ p(\eta) &= \frac{U_0(\eta^{\frac{1}{\delta}}) - U_\infty(\eta^{\frac{1}{\delta}})}{\eta^{\frac{1}{2\delta}}}, \quad \alpha = \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полученное решение показывает, что

1) на достаточно больших расстояниях от берега и для достаточно небольших высот, когда можно принять $e^{-\frac{\zeta^2 + \xi^2}{4\delta^2 t}} \approx 1$, а для функции $I_{-\nu}$ брать только первый член разложения, $u^{(0)}$ не зависит от высоты, т. е. на достаточно больших расстояниях от стыка двух подстилающих поверхностей подход профиля скорости ветра к предельному осуществляется параллельно и $u^{(0)}$ может быть вычислено по формуле

$$u^{(1)} = \frac{\int_0^\infty \xi^{1-\nu} p(\xi) d\xi}{2^{1-2\nu} \Gamma(1-\nu) (\delta^2 t)^{1-\nu}}; \quad (2.10)$$

2) мерой трансформации служит интеграл типа

$$\int_0^\infty z^m [U_0(z) - U_\infty(z)] dz = Q \quad (2.11)$$

(назовем его рассогласованностью начального и предельного профилей). Длина трансформации — то расстояние, на котором устанавливается

предельный профиль с определенной точностью—сильно зависит от вида „начального“ профиля.

Так, например, если „начальный“ профиль такой, что $Q=0$, то преобразование заданного профиля в новый происходит значительно быстрее по x ;

3) вблизи подстилающей поверхности скорость вычисляется по простой формуле

$$u^{(1)} = \frac{\int_0^z \xi^{1-\nu} p(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha z}} d\xi}{2^{1-2\nu} \Gamma(1-\nu) (\alpha^2 z)^{1-\nu}} \quad (2.12)$$

Знание этой скорости важно для расчетов испарения и для решения других прикладных задач.

3. Оценка влияния вертикальных токов

Попробуем грубо оценить влияние отброшенного члена $w \partial u / \partial z$ на длину трансформации. Определим для этого $w^{(2)}$ по уже найденному решению $u^{(1)}$. Подставляя решение $u^{(1)}$ во второе уравнение системы (2.1), получим

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = 0,$$

откуда

$$w^{(2)} = - \int_0^z \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} dz.$$

Влияние w проще всего оценить при больших x , так как мы уже отметили, что для больших расстояний $u^{(1)}$ не зависит от z . Следовательно, для $w^{(2)}$ получим

$$w^{(2)} = - \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \cdot z.$$

Подставляя полученное выражение $w^{(2)}$ в первое уравнение системы (2.1), получим

$$U_- \cdot \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial U_-}{\partial z} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} z = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}.$$

Принимая во внимание вид функции $U_-(z)$, будем иметь

$$U_- \left[\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - m \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}.$$

Но

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \sim \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + O(m).$$

Следовательно, заменив в последнем уравнении $\partial u^{(1)} / \partial x$ на $\partial u^{(2)} / \partial x$, с точностью до $O(m^2)$ будем иметь

$$U_{\infty} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} (1-m) = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z}$$

или, обозначая $x'(1-m) = x'$,

$$U_{\infty} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \quad (3.1)$$

Итак, уравнение (2.5) дает решение задачи при отсутствии ω , а уравнение (3.1) с учетом ω . При этом, если в первом случае заданное значение добавочной скорости получается на расстоянии x , то во втором случае то же значение получается на расстоянии x' , а так как $x = x'(1-m)$, где $m < 1$, то во втором случае длина трансформации уменьшается примерно в $(1-m)$ раз, т. е. на больших расстояниях от берега наличие ω убыстряет трансформацию.

Институт водных проблем
АН Армянской ССР

Поступила 3 II 1963

Ն. Հ. Պետրոսյան

ՇԱԿՈՒՅՔԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ՔԱՍՈՒ ԴԱՇՏԻ ԶԵՎԱՓՈՒՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՅԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերվում է քամու դաշտի ձևափոխության գծաչափաբան խնդրի լուծումը ծածկույթի մակերևույթի ազդեցության տակ, երբ տրված է քամու արագության բաշխումը երկու մակերևույթների բաժանման սահմանում:

Դրված խնդիրը լուծվում է հաջորդական մոտավորությունների եղանակով, ընդ որում առաջին մոտավորությունը վերցված է Ֆուրյեի ինտեգրալի տեսքով: (2.5) հավասարման լուծումն ստացվում է (2.8) տեսքով:

Ստացվում են որոշ ֆիզիկական օրինաչափություններ.

1. Երկու մակերևույթների բաժանման սահմանից բավական մեծ հեռավորությունների վրա քամու արագության ուղղաձիգ բաշխումը իր սահմանին է մոտենում դուգաճեռաբար և այդ մասում քամու արագությունը կարելի է հաշվել (2.10) բանաձևով:

2. Որպես ձևափոխության չափ ծառայում է (2.11) արտահայտությունը, որն անվանվել է «սկզբնական» — $U_0(z)$ և սահմանային — $U_{\infty}(z)$ պրոֆիլների տարհամաձայնություն:

Մացված է ձևափոխության երկարություն հասկացությունը:

Դա այն հեռավորությունն է, որի վրա որոշակի ճշտությամբ հաստատվում է սահմանային պրոֆիլը:

Պարզվում է, որ այն մեծ չափով կախված է արագության «սկզբնական» բաշխումից: Այսպես, օրինակ՝ եթե «սկզբնական» բաշխումը այնպիսին է, որ

$Q = 0$, ապա այդ բաշխման ձևափոխությունը սահմանային պրոֆիլի կատարվում է նկատելիորեն արագ:

3. Քամու արագության ուղղածիզ բաղադրիչի առկայությունը ավից մեծ հեռավորությունների վրա բերում է ձևափոխության երկարության կրճատմանը՝ $(1-m)$ մեծությամբ:

Օդի ջրամերձ շերտի համար ստացվում է պարզ (2.12) բանաձևը, որը կարևոր կիրառություն է գտնում գոլորշիացման մեծությունը հաշվելու համար և այլ դործնական խնդիրներ լուծելիս:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гандин Л. С. К вопросу о трансформации профиля ветра. Труды ГГО, вып. 33 (95), 1952.
2. Дмитриев А. А. и Соколова И. Н. Схема оценки изменений скорости профиля ветра при переходе с суши на море. Тр. Морск. гидрофиз. ин-та, 4, 1954.
3. Тимофеев М. П. Основные вопросы физики нижнего слоя воздуха над водоемами. Автореферат докторской диссертации, Л., 1962.
4. Лайхтман Д. Л. Трансформация воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности. Метеорология и гидрология, № 1, 1947.