

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

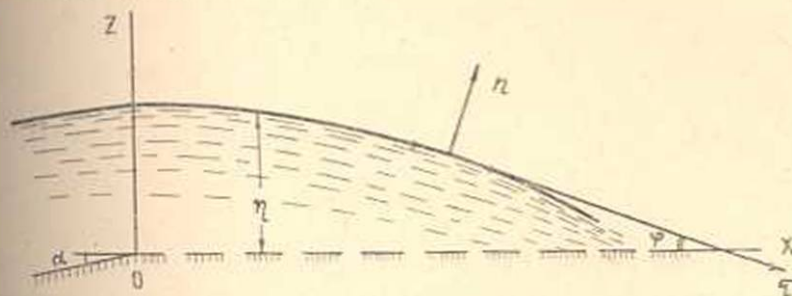
Г. А. Бабаджанян, Л. Е. Даниелян

Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле

§ 1. Уравнения движения и граничные условия

Рассматривается установившееся плоское движение вязкой несжимаемой жидкости по открытому, весьма широкому, прямоугольному пористому каналу (фиг. 1).

Дно канала наклонено под углом α к горизонту. Жидкость движется под действием силы тяжести.



Фиг. 1.

За исходные уравнения принимаются дифференциальные уравнения движения Навье-Стокса для плоского случая (изменением величины по ширине потока пренебрегаем).

Уравнения движения вместе с уравнением неразрывности будут

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u , w — компоненты скорости по осям Ox и Oz , α — угол наклона дна.

Для данной задачи граничные условия на дне канала ставятся в следующем виде:

$$u = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.2)$$

$$w = -kp \quad \text{при } z = 0,$$

где k — коэффициент пропорциональности, показывающий пропускную способность дна канала [1].

Условия на свободной поверхности для вектора скорости и для вектора напряжения будут [2]

$$w = u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} \left[1 - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] &= 0 \quad \text{при } z = \eta, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] &= 4 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $z = \eta(x)$ есть уравнение свободной поверхности. Принимается также, что в начальном сечении канала глубина потока известна, т. е.

$$\eta = \eta_0 \quad \text{при } x = 0. \quad (1.4)$$

Таким образом, нахождение законов распределения скорости, давления и вида свободной поверхности для данного движения, при вышеуказанных условиях, приводит к решению уравнения (1.1).

§ 2. Решение задачи

Задачу решаем методом малого параметра. Чтобы ввести малый параметр в систему уравнений и в граничные условия, приведем их к безразмерному виду при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned} u &= C\bar{u}, \quad p = \rho C^2 \bar{p}, \quad \eta = H\bar{\eta}, \\ w &= C \frac{H}{L} \bar{w}, \quad \nu = CH^2 \bar{\nu}, \quad C = \sqrt{gH}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$x = L\bar{x}, \quad z = H\bar{z}, \quad k = \frac{\sigma}{\rho C} \bar{k}, \quad \frac{H}{L} = \varepsilon \ll 1.$$

Здесь C — характерная скорость,

H — характерная глубина,

L — характерная длина,

ε — малый параметр.

Уравнения (1.1), граничные условия (1.2) и (1.3) с учетом (2.1) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \varepsilon^2 \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^3 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{при } z = 0,$$

$$w = -kp \quad \text{при } z = 0,$$

$$w = u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$p \left[1 - \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] - 2\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \left[1 + \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{при } z = \eta, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \sigma \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[1 + \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 4\sigma^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta$$

$$\eta = \eta_0 \quad \text{при } x = 0.$$

Для удобства черточку опускаем.

Неизвестные функции ищем в виде степенного ряда (по степеням малого параметра σ), т. е.

$$u = u_0 + \sigma u_1 + \sigma^2 u_2 + \dots$$

$$w = w_0 + \sigma w_1 + \sigma^2 w_2 + \dots$$

$$(2.4)$$

$$p = p_0 + \sigma p_1 + \sigma^2 p_2 + \dots$$

$$\eta = \eta_0 + \sigma \eta_1 + \sigma^2 \eta_2 + \dots$$

Подставляя значения u , w , p и η из (2.4) в систему уравнений (2.2) и в граничные условия (2.3) и приравнивая коэффициенты с одинаковыми степенями σ , получим систему уравнений, которую легко можно решить.

Так, например, приравнивая в уравнениях (2.2) коэффициенты при нулевой степени σ , получим следующую систему уравнений:

$$1. \quad \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$$

$$2. \quad -\cos \alpha - \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0$$

$$3. \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Из граничных условий (2.3) имеем

$$1. \quad u_0 = 0 \quad \text{при } z = 0$$

$$2. \quad w_0 = -kp_0 \quad \text{при } z = 0$$

$$3. \quad w_0 = u_0 \frac{d\eta_0}{dx} \quad \text{при } z = \eta_0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} 4. \quad p_0 &= 0 && \text{при } z = r_0 \\ 5. \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} &= 0 && \text{при } z = r_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегрируя первое уравнение системы (2.5), получим

$$u_0 = -\frac{\sin \alpha}{2\nu} z^2 + f_1(x)z + f_2(x).$$

Произвольные функции интегрирования $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяются из граничных условий (1) и (5) системы (2.6).

Подставляя значения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в выражение u_0 , получим

$$u_0 = \frac{\sin \alpha}{2\nu} (2r_0 z - z^2). \quad (2.7)$$

Из уравнения неразрывности системы (2.5) с учетом граничного условия (2) системы (2.6), получим значение поперечной составляющей скорости w_0 в виде

$$w_0 = -\frac{\sin \alpha}{2\nu} \cdot \frac{dr_0}{dx} z^2 - kr_0 \cos \alpha. \quad (2.8)$$

Давление определяется из второго уравнения системы (2.5) с учетом граничного условия (4) системы (2.6):

$$p_0 = (r_0 - z) \cos \alpha. \quad (2.9)$$

Для определения глубины потока пользуемся третьим уравнением системы (2.6)

$$r_0 \frac{dr_0}{dx} = -\frac{k\nu}{\lg \alpha}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая условие (1.4), получим

$$r_0^2 = r_n^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x. \quad (2.10)$$

Так как граничные условия (1.3) должны удовлетворяться на свободной поверхности, которая вдоль потока изменяется, то ради упрощения решения задачи, мы применим метод, предложенный в работе [2]. Имея ввиду это обстоятельство и приравнявая коэффициенты при первой степени σ в уравнениях (2.2), а также и в граничных условиях (2.3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= -kp_1 && \text{при } z=0, \\
u_1 &= 0 && \text{при } z=0, \\
w_1 + \tau_1 \frac{\partial w_0}{\partial z} &= \left(u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \tau_1 \right) \frac{d\tau_0}{dx} + u_0 \frac{d\tau_1}{dx} && \text{при } z=\tau_0, \\
p_1 + \tau_1 \frac{\partial p_0}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} &= 0 && \text{при } z=\tau_0, \\
\frac{\partial u_1}{\partial z} + \tau_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} &= 0 && \text{при } z=\tau_0, \\
\tau_1 &= 0 && \text{при } x=0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Решая эту систему с соответствующими граничными условиями, для искомых величин получим следующие значения:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\sin^2 \alpha}{\nu^3} \frac{d\tau_0}{dx} \left(\frac{\tau_0}{24} z^4 - \frac{\tau_0^2}{6} z^3 + \frac{\tau_0^3}{2} z^2 \right) + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_0}{dx} z^2 + \\
&+ \frac{\sin \alpha}{\nu} \tau_1 z - \frac{2 \sin^2 \alpha}{3\nu^3} \frac{d\tau_0}{dx} \tau_0^4 z - \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_0}{dx} \tau_0 z, \tag{2.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1 &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\nu^3} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} \left(\frac{\tau_0}{120} z^5 - \frac{\tau_0^2}{24} z^4 + \frac{\tau_0^3}{6} z^3 \right) - \\
&- \frac{\sin^2 \alpha}{\nu^3} \left(\frac{z^5}{120} - \frac{\tau_0}{12} z^4 + \frac{\tau_0^2}{2} z^3 \right) \left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)^2 - \frac{\cos \alpha}{6\nu} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} z^3 - \\
&- \frac{\sin \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_1}{dx} z^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{3\nu^3} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} z^2 \tau_0^4 + \frac{4 \sin^2 \alpha}{3\nu^3} \left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)^2 \tau_0^3 z^2 + \\
&+ \frac{\cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} \tau_0 z^2 + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)^2 z^2 + k \sin \alpha \frac{d\tau_0}{dx} \tau_0 - k \tau_1 \cos \alpha, \tag{2.13} \\
p_1 &= -\sin \alpha \frac{d\tau_0}{dx} (\tau_0 - z) + \tau_1 \cos \alpha
\end{aligned}$$

(2.14)

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= e^{\int \frac{k\nu \operatorname{ctg} \alpha}{\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x} dx} \left\{ E_1 + \int \left[k^2 \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha (\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x)^{1/2} + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{2k^2 \nu^2 \operatorname{ctg}^3 \alpha}{3(\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x)} - \frac{k^2 \nu^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x} \right] \cdot e^{-\int \frac{k\nu \operatorname{ctg} \alpha}{\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x} dx} dx \Big\}.
\end{aligned}$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= E_1 (\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x)^{-1/2} + A_1 x (\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x)^{-1/2} - \\
&- B_1 x^2 (\tau_m^2 - 2k\nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x)^{-1/2} - (C_1 + D_1), \tag{2.15}
\end{aligned}$$

где A_1 , B_1 , C_1 и D_1 — постоянные коэффициенты, а

$$E_1 = (C_1 + D_1) \eta_n.$$

Уравнения для следующих приближений (второе, третье и т. д.) решаются аналогичным образом. Переходя к размерным величинам и пропуская промежуточные выкладки, для искомых величин получим

$$\begin{aligned} u(x, z) = & \frac{g \sin \alpha}{2\nu} (2\eta_0 z - z^2) + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{\nu^3} \frac{d\eta_0}{dx} \left(\frac{\eta_0 z^4}{24} - \frac{\eta_0^2 z^3}{6} + \frac{\eta_0^3 z^2}{2} \right) - \\ & - \frac{2g^2 \sin^2 \alpha}{3\nu^2} \frac{d\eta_0}{dx} \eta_0^4 z + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d\eta_0}{dx} z^2 - \frac{g \cos \alpha}{\nu} \eta_0 z + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \eta_1 z, \\ w(x, z) = & \frac{g \sin \alpha}{\nu} \frac{d\eta_0}{dx} \left(\eta_0^2 - \frac{z^2}{2} \right) - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{\nu^3} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \times \\ & \times \left(\frac{\eta_0 z^5}{120} - \frac{\eta_0^2 z^4}{24} + \frac{\eta_0^3 z^3}{6} \right) - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{\nu^3} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 \times \\ & \times \left(\frac{z^5}{120} - \frac{\eta_0 z^4}{12} + \frac{\eta_0^2 z^3}{2} \right) - \frac{g \cos \alpha}{6\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} z^3 - \\ & - \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \frac{d\eta_1}{dx} z^2 + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{3\nu^3} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0^4 z^2 + \frac{4g^2 \sin^2 \alpha}{3\nu^3} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 \cdot \eta_0^3 z^2 + \\ & + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0 z^2 + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 \cdot z^2 + \rho g k \sin \alpha \frac{d\eta_0}{dx} \eta_0 - \rho g k \cos \alpha \cdot \eta_1, \\ p(x, z) = & \rho g \cos \alpha (\eta_0 - z) - \rho g \sin \alpha \frac{d\eta_0}{dx} (\eta_0 - z) + \rho g \eta_1 \cos \alpha, \\ \eta(x) = & \sqrt{\eta_n^2 - 2\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x} + \frac{\rho k \nu \eta_n \left(\frac{2}{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 \right)}{\sqrt{\eta_n^2 - 2\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x}} + \\ & + \frac{\eta_n^2 \rho^2 k^2 g \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha \cdot x}{\sqrt{\eta_n^2 - 2\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x}} - \frac{\rho^3 g k^3 \nu \cos \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot x^2}{\sqrt{\eta_n^2 - 2\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x}} - \rho k \nu \left(\frac{2}{3} \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 \right). \end{aligned}$$

Как видно из полученных результатов, давление $p(x, z)$ отклоняется от гидростатического закона, начиная от первого приближения. Свободная поверхность $\eta(x)$ по нулевому приближению имеет вид параболы. Первое приближение очень мало изменяет параболическое очертание свободной поверхности.

§ 3. Пример расчета

Рассмотрим конкретный пример по следующим данным:

$$\eta_n = 1 \text{ м} \quad \nu = 0,18 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$$

$$\alpha = 1^\circ \quad k = 10^3 \frac{\text{м}^2}{\text{кгсек}}$$

Численный пример решаем, ограничиваясь нулевым приближением. Для компонентов скорости получим

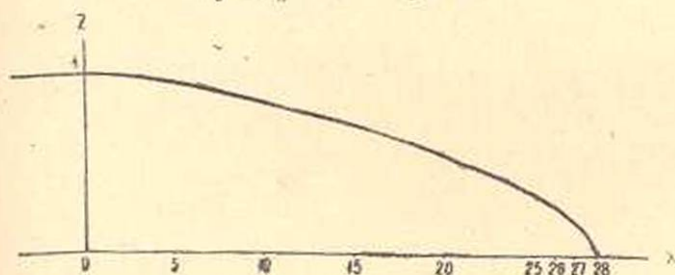
$$\frac{u_0}{U_n} = 1,5 \frac{2\tau_0 z - z^2}{\tau_0}, \quad \frac{w_0}{U_n} = \frac{3 \frac{d\tau_0}{dx} \left(\tau_0^2 - \frac{z^2}{2} \right)}{\tau_0^2},$$

где U_n — средняя скорость потока в начальном сечении. Давление вычислим по формуле

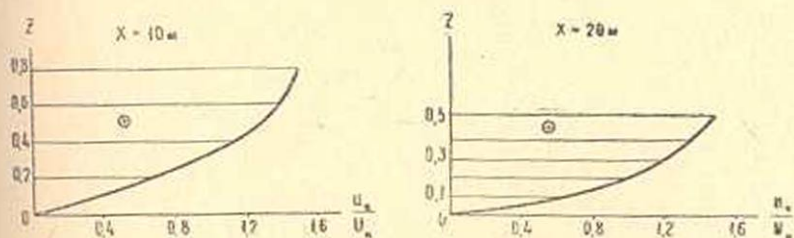
$$p_0 = \rho g \cos \alpha (\tau_0 - z),$$

а вид свободной поверхности по формуле

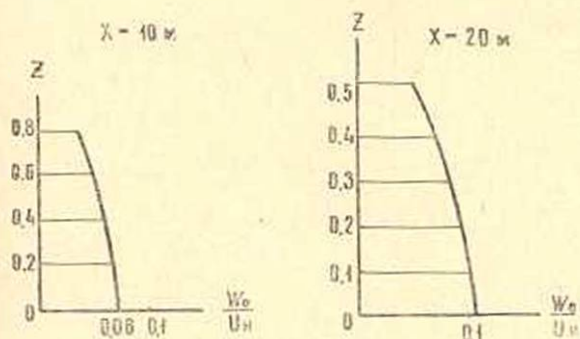
$$\tau_0^2 = \tau_n^2 - 2\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha \cdot x.$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Изменение свободной поверхности вдоль оси Ox показано на фиг. 2. Изменение проекций горизонтальной и вертикальной скоростей по глубине потока в двух сечениях ($x = 10$ м и $x = 20$ м) приведено на фиг. 3 и 4.

Գ. Լ. Բաբաձյան, Լ. Ե. Դանիսյան

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՇԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԲԱՑ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՀՈՒՆՈՎ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Ս

Հոդվածում դիտարկվում է անսեղմելի մածուցիկ հեղուկի հարթ լամինար շարժումը բաց հունով, որի հատակը ծակոտիկն է: Խնդիրը բերվում է Նավյե-Ստորսի հավասարումների լուծմանը համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմաններով:

Լուծումը որոնվում է փոքր պարամետրի մեթոդով:

Գտնվում է արագութիւն, ճնշման, ինչպես նաև ազատ մակերևույթի փոփոխման օրենքը ըստ հունի երկարութիւն և ըստ կտրվածքի:

Հաշվվում է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Слезкин Н. А. О течении вязкой жидкости при наличии свободной границы пористого дна. Вестник Московского университета, № 5, 1957.
2. Бабаджанян Г. А. и Назарян А. Г. Об одном решении задачи плоского ламинарного движения жидкости в открытом канале. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 1, 1959.