ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

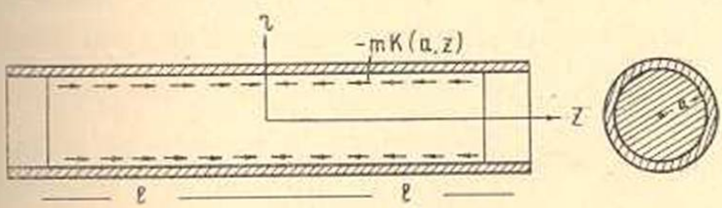
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVI, № 3, 1963 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. А. Задоян

Выдавливание пластически неоднородного материала из сжимающейся цилиндрической втулки

§ 1. Р. Хилл [1], аналогично циклоидальному решению Прандтля [2], исследовал пластическое состояние цилиндрического стержня, находящегося внутри тесно пригнанной цилиндрической втулки, сокращающейся по радиальным направлениям. Течение материала по продольным направлениям на поверхности втулки создает реактивные продольные касательные напряжения. Эти напряжения, по аналогии с решением Прандтля, принимаются известными и равными mK, где m — степень шероховатости внутренней поверхности втулки, а K — постоянная пластичности. Этот, так называемый, „гипотетический" процесс походит на штамповку стержня между двумя полуцилиндрическими матрицами.



Фиг. 1.

Ниже рассматривается задача Хилла для пластически неоднородного материала. На поверхности контакта (фиг. 1) касательные напряжения принимаем равными $-mK(a, z)$. Радиальную скорость „u" на контакте также считаем заданной и равной $-u_0$.

Задача, будучи осесимметричной, обладает также симметрией по отношению к плоскости $z=0$, поэтому достаточно рассматривать правую половину стержня $0 \leqslant z \leqslant l$.

Имеем уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \tag{1.1}$$

критерий текучести Губера-Мизеса

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6K^2(r, z), \tag{1.2}$$

зависимости Леви-Мизеса между компонентами скоростей и компонентами напряжений

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \lambda (2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_r),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta), \tag{1.3}$$

$$2\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 6\lambda\tau_{rz}$$

и условие несжимаемости материала

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0. \tag{1.4}$$

Рассматриваются два случая неоднородности, когда пластические свойства меняются: а) только по радиальным направлениям, т. е. $K=K(r)$ и б) только по продольным направлениям, притом по экспоненциальному закону, т. е. $K = ke^{\gamma z}$. Как в работе А. И. Кузнецова [3], так и в нашей статье [4] исследования задачи Прандтля для материалов, имеющих аналогичные неоднородности, показывают, что поперечная скорость не зависит от неоднородности материала.

Поэтому естественно, следуя полуобратному способу Хилла, принять, что радиальная скорость меняется линейно по радиусу

$$u = -u_0 \frac{r}{a}. \tag{1.5}$$

Тогда, используя условие несжимаемости (1.4), находим

$$w = \varphi(r) - 2\frac{u_0}{r}(l - z), \tag{1.6}$$

где $\varphi(r)$ — пока неопределенная функция от r.

Из (1.5) также следует

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta \quad \text{и} \quad \sigma_r = \sigma_\theta. \tag{1.7}$$

§ 2. *В случае, когда* $K = K(r)$, положим, что касательное напряжение не зависит от z: $\tau_{rz} = \tau_{rz}(r)$. Тогда из второго уравнения равновесия и условия текучести находим

$$\sigma_z = \psi(r) + \left[\tau'_{rz} + \frac{1}{r}\tau_{rz}\right](l - z), \tag{2.1}$$

$$\sigma_r = \sigma_z - \sqrt{3}\sqrt{K^2(r) - \tau_{rz}^2(r)}, \tag{2.2}$$

где $\psi(r)$ — произвольная функция от r.

Подставляя σ_r и τ_{rz} в первое уравнение равновесия и учитывая (1.7), получим

$$\left(\tau'_{rz}+\frac{1}{r}\tau_{rz}\right)'=0, \tag{2.3}$$

$$\psi'(r)-\sqrt{3}\,[\sqrt{K^2(r)-\tau^2_{rz}(r)}\,]'=0. \tag{2.4}$$

Интегрируя (2.3) и учитывая граничные условия $\tau_{rz}(0)=0$ и $\tau_{rz}(a)=-mK(a)$, получим

$$\tau_{rz}=-mK(a)\frac{r}{a}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует

$$\psi(r)=-A+\sqrt{3}\sqrt{K^2(r)-m^2K^2(a)\frac{r^2}{a^2}}, \qquad A=\text{const}.$$

Тогда

$$\sigma_r=-A-2m\frac{K(a)}{a}(l-z), \tag{2.6}$$

$$\sigma_z=-A-2m\frac{K(a)}{a}(l-z)+\sqrt{3}\sqrt{K^2(r)-m^2\frac{K^2(a)}{a^2}r^2}. \tag{2.7}$$

Условие равновесия части стержня

$$\int\limits_0^a 2\pi r\sigma_z dr+mK(a)\,2\pi a\,(l-z)=0 \tag{2.8}$$

для постоянного A дает

$$A=\frac{2\sqrt{3}}{a^2}\int\limits_0^a r\sqrt{K^2(r)-m^2K^2(a)\frac{r^2}{a^2}}\,dr. \tag{2.9}$$

Определим продольное перемещение w. Из условия коаксиальности главных осей скорости и напряжений находим

$$\varphi'(r)=-2\sqrt{3}\frac{u_0}{a}\frac{mK(a)\frac{r}{a}}{\sqrt{K^2(r)-m^2K^2(a)\frac{r^2}{a^2}}}. \tag{2.10}$$

Отсюда, интегрируя и подставляя значение w в (1.6), получим

$$w(r,z)=B-2\frac{v_0}{a}(l-z)-\frac{2\sqrt{3}\,u_0}{a}\int\limits_0^r\frac{m\frac{K(a)}{a}r\,dr}{\sqrt{K^2(r)-m^2K^2(a)\frac{r^2}{a^2}}}. \tag{2.11}$$

Условие равенства количества материала, протекающего в осевом направлении через поперечное сечение, расходу материала вдоль втулки будет

$$\int\limits_0^a 2\pi a w(r,z)\,dr=2\pi a u_0 z. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11) в (2.12), для неопределенной постоянной находим

$$B = 2u_0 \frac{l}{a} + \frac{2\sqrt{3}\,u_0}{a^3} \int_0^a \frac{(a^2 - r^2)\, mK(a) \frac{r}{a} dr}{\sqrt{K^2(r) - m^2 \frac{K^2(a)}{a^2} r^2}}. \tag{2.13}$$

Полагая в полученных формулах для компонентов напряжений и скорости $K(r) = K = \text{const}$, получим

$$\sigma_r = -A - 2\frac{mK}{a}(l - z), \qquad \tau_{rz} = -mK\frac{r}{a},$$

$$\sigma_z = -A - 2\frac{mK}{a}(l - z) + \sqrt{3}K\sqrt{1 - m^2\frac{r^2}{a^2}},$$

$$A = \frac{2K}{\sqrt{3}\,m^2}\left[1 - \sqrt{(1-m^2)^3}\right], \qquad u = -u_0\frac{r}{a},$$

$$w = 2u_0\frac{z}{a} + \frac{2\sqrt{3}\,u_0}{m}\sqrt{1 - m^2\frac{r^2}{a^2}} - \frac{4u_0}{\sqrt{3}\,m^3}\left[1 - \sqrt{(1-m^2)^3}\right].$$

Эти выражения совпадают с формулами Хилла для однородного материала.

§ 3. *В случае неоднородности* $K = ke^{\gamma z}$ касательное напряжение ищем в виде

$$\tau_{rz} = -ke^{\gamma z}F(r), \tag{3.1}$$

где $F(r)$ — искомая функция от r.

Из второго уравнения равновесия и условия пластичности находим

$$\sigma_z = H(r) - k\frac{e^{\gamma l} - e^{\gamma z}}{\gamma}\left(F' + \frac{1}{r}F\right), \tag{3.2}$$

$$\sigma_r = \sigma_z - \sqrt{3}ke^{\gamma z}\sqrt{1 - F^2(r)}, \tag{3.3}$$

где $H(r)$ — произвольная функция от r.

Первое уравнение равновесия дает

$$\left(F' + \frac{1}{r}F\right)' - \sqrt{3}\gamma\left[\sqrt{1 - F^2}\right]' - \gamma^2 F = 0, \tag{3.4}$$

$$H' - \frac{ke^{\gamma l}}{\gamma}\left(F' + \frac{1}{r}F\right)' = 0. \tag{3.5}$$

Согласно (3.4) для определения F получим квази-линейное дифференциальное уравнение

$$r^2F'' + r\left[1 + \frac{\sqrt{3}\gamma rF}{\sqrt{1 - F^2}}\right]F' - (1 + \gamma^2r^2)F = 0. \tag{3.6}$$

Из условий $\tau_{rz}(0, z) = 0$ и $\tau_{rz}(a, z) = -mke^{\gamma z}$ следует

$$F(0) = 0, \qquad F(a) = m. \tag{3.7}$$

Интегрируя (3.5), получим

$$H(r)=C-\frac{ke^{\gamma l}}{\gamma}\left(F'+\frac{1}{r}F\right)+\frac{ke^{\gamma l}}{\gamma}D, \quad D=\left(F'+\frac{1}{r}F\right)_{r=0}, \quad C=\text{const}. \tag{3.7}$$

Подставляя выражение $H(r)$ в (3.2) и (3.3) и используя соотношение

$$F'+\frac{1}{r}F=D+\sqrt{3}\,\gamma\sqrt{1-F^2}-\gamma\sqrt{3}+\gamma^2\int_0^r F dr, \tag{3.8}$$

вытекающее из (3.4), находим

$$\sigma_r=C-k\frac{e^{\gamma l}-e^{\gamma z}}{\gamma}D-\sqrt{3}ke^{\gamma z}+ke^{\gamma z}\gamma\int_0^r F(r)\,dr, \tag{3.9}$$

$$\sigma_z=C-k\frac{e^{\gamma l}-e^{\gamma z}}{\gamma}D-\sqrt{3}ke^{\gamma z}+ke^{\gamma z}\left[\sqrt{3}\sqrt{1-F^2}+\gamma\int_0^r F dr\right]. \tag{3.10}$$

Подставляя выражение для σ_z из (3.10) в условие равновесия части стержня

$$\int_0^a 2\pi r\sigma_z(r,z)\,dr+\int_z^l mke^{\gamma z}2\pi a dz=0, \tag{3.11}$$

для определения произвольного постоянного C находим равенство

$$C-k\frac{e^{\gamma l}-e^{\gamma z}}{\gamma}D-\sqrt{3}ke^{\gamma z}+ke^{\gamma z}\frac{2}{a^2}\left[\sqrt{3}\int_0^a r\sqrt{1-F^2}\,dr+\right.$$

$$\left.+\gamma\int_0^a rdr\int_0^r F dr\right]=-2\frac{m}{a}k\frac{e^{\gamma l}-e^{\gamma z}}{\gamma}. \tag{3.12}$$

Умножая все члены равенства (3.8) на r и интегрируя от нуля до a, получим

$$\sqrt{3}\int_0^a r\sqrt{1-F^2}\,dr+\gamma\int_0^a rdr\int_0^r F\,dr=\frac{a^2}{2}\left[\sqrt{3}-\frac{1}{\gamma}\left(D-2\frac{m}{a}\right)\right]. \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.12), будем иметь

$$C=\frac{ke^{\gamma l}}{\gamma}\left(D-2\frac{m}{a}\right). \tag{3.14}$$

или

$$C = -\frac{2ke^{\gamma l}}{a^2}\left[\sqrt{3}\int_0^a r\sqrt{1-F^2}\,dr + \gamma\int_0^a rdr\int_0^r F dr\right] + \sqrt{3}ke^{\gamma l}. \tag{3.15}$$

Анологично предыдущему случаю, определяя продольное перемещение, получим

$$w = E - 2\frac{u_0}{a}(l-z) - \frac{2\sqrt{3}u_0}{a}\int_0^r \frac{F dr}{\sqrt{1-F^2}}, \qquad E = \text{const}. \tag{3.16}$$

Из условия (2.12) находим

$$E = 2\frac{u_0}{a}l + \frac{2\sqrt{3}u_0}{a^3}\int_0^a \frac{(a^2-r^2)F}{\sqrt{1-F^2}}\,dr. \tag{3.17}$$

Таким образом, компоненты напряжения (3.1), (3.2), (3.3) и продольная скорость (3.16) выражаются через функцию $F(r)$, определяющуюся из уравнений (3.6) при граничных условиях (3.7).

При малых значениях γa, принимая в (3.6)

$$1 + \frac{\sqrt{3}F}{\sqrt{1-F^2}}\gamma r \approx 1 \qquad 1 + \gamma^2 r^2 \approx 1,$$

получим

$$r^2F'' + rF' - F = 0. \tag{3.18}$$

Решение уравнения (3.18) при условии (3.7) будет

$$F = m\frac{r}{a}. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.9), (3.10) и (3.15), получим

$$\sigma_r = C - 2\frac{m}{a}k\frac{e^{\gamma l}-e^{\gamma z}}{\gamma} - \sqrt{3}ke^{\gamma z} + \gamma\frac{mk}{2a}e^{\gamma z}r^2, \tag{3.20}$$

$$\sigma_z = \sigma_r + \sqrt{3}ke^{\gamma z}\sqrt{1-m^2\frac{r^2}{a^2}}, \tag{3.21}$$

$$C = \sqrt{3}\,ke^{\gamma l} - \frac{2ke^{\gamma l}}{\sqrt{3}m^2}\left[1-\sqrt{(1-m^2)^3}\right] + \gamma\frac{mka}{4}e^{\gamma l}. \tag{3.22}$$

Из (3.16) и (3.17) получим продольное перемещение

$$w = -\frac{4u_0}{\sqrt{3}m^2}\left[1-\sqrt{(1-m^2)^3}\right] + 2\frac{u_0}{a}z + \frac{2\sqrt{3}u_0}{m}\sqrt{1-m^2\frac{r^2}{a^2}}, \tag{3.23}$$

не зависящее от неоднородности материала.

Принимая в выражениях компонентов напряжений (3.1), (3.20)—(3.23) $\gamma \to 0$, получим соответствующие формулы Хилла для однородного материала.

Конечно, полученные решения обладают тем же недостатком, что и вышеуказанные [1—4]. Это решение становится неверным на торцах и в середине стержня.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 XII 1962

Մ. Ա. Զադոյան

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՆՅՈՒԹԻ ՄՂՈՒՄԸ ՍԵՂՄՎՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻՑ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ռ. Հիլլը [1] ուսումնասիրել է շառավղային ուղղությամբ սեղմվող գլանային խողովակում գտնվող նյութի պլաստիկական վիճակը։

Սեղման հետևանքով նյութը շարժվում է երկայնական ուղղություններով առաջացնելով կոնտակտային մակերևույթի վրա երկայնական հակազդող շոշափող լարումներ։

Այդ շոշափող լարումները Պրանդտլի [2] խնդրի անալոգիայով ընդունվում են հավասար mK, *որտեղ* m*-ը կոնտակտային մակերևույթի անհարթության աստիճանն է, իսկ* K*-ն պլաստիկական հաստատունն է։*

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է Հիլլի խնդիրը պլաստիկորեն անհամասեռ նյութի համար։ Ուսումնասիրվում է երկու դեպք.

ա) երբ նյութը անհամասեռ է շառավղային ուղղությամբ՝ $K = K(r)$ *և*

բ) երբ նյութը անհամասեռ է միայն երկայնական ուղղությամբ, այն էլ էքսպոնենցիալ օրենքով. $K = ke^{\gamma z}$, *որտեղ* k *և* γ *հայտնի պարամետրեր են։*

Պրանդտլի խնդրի ուսումնասիրությունները վերոհիշյալ անհամասեռ նյութերի դեպքում, ինչպես Ա. Ի. Կուզնեցովի [3], այնպես էլ մեր հոդվածում [4], ցույց են տալիս, որ լայնական արագությունները կախված չեն նյութի անհամասեռությունից։ Այդ պատճառով բնական է, հետևելով Հիլլի կիսահակադարձ եղանակին, ընդունել, որ լայնական արագությունները, մեր խնդրի համար, փոփոխվում են միայն ըստ շառավղի՝ գծային օրենքով։

Օգտվելով առանցքասիմետրիկ հավասարակշռության հավասարումներից (1), Հուբեր-Միզեսի հոսունության չափանիշից (2), դեֆորմացիաների արագությունների և լարումների բաղադրիչների միջև եղած առնչություններից (3), նյութի անսեղմելիության ենթադրությամբ (4), անհամասեռության առաջին դեպքի համար ստանում ենք (12)—(14) արտահայտությունները լարումների համար, իսկ (5) և (18)-ը՝ արագությունների համար։ Անհամասեռության երկրորդ դեպքի համար ստացվում են (39)—(41) արտահայտությունները լարումների համար, իսկ (5) և (42)-ը՝ արագությունների համար։ Վերջիններս նյութի անհամասեռությունից կախված չեն։

Անհամասեռության երկու դեպքում էլ կատարելով սահմանային անցում $K=\mathrm{const}$, *ստանում ենք Հիլլի ստացած բանաձևերը։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
2. *Prandtl L.* Leits ang. Math. Mech., **3**, 1923 (русск. перевод „Теория пластичности" сб. статей, ИЛ, М.-Л., 1948).
3. *Кузнецов А. И.* Задача о неоднородном пластическом слое. Archiwum Mechaniki Stosowanej, Warszawe, **12**, № 2, 1960.
4. *Задоян М. А.* О сжатии пластически неоднородной по длине полосы двумя жесткими плитами. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1962.