

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. С. Чобанян

Мембранная аналогия задачи кручения составных
 призматических стержней

Задача о кручении составных стержней впервые была поставлена и исследована Н. И. Мусхелишвили [1].

В настоящей заметке аналогия Прандтля [2] обобщена для задачи кручения составных призматических стержней. Обобщенная мембранная аналогия использована для приближенного исследования задачи нестесненного кручения тонкостенных составных стержней.

1. Пусть призматический стержень состоит из нескольких изотропных и однородных тел с различными модулями упругости, соединенных между собой по боковым поверхностям. Область поперечного сечения D_0 (фиг. 1) такого стержня состоит из нескольких областей $D_1, D_2, \dots, D_N$, соответствующих различным материалам. Обозначим через L_0 контур D_0 , через L_i — контур D_i , а через L_{ij} — линию раздела D_i и D_j . Область D_0 будем считать пока односвязной. Линии раздела L_{ij} могут либо находиться целиком внутри D_0 , либо пересекаться с ее контуром.

Функция напряжений при кручении в областях D_i ($i = 1, 2, \dots, N$) удовлетворяет [3] дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} = -2G_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.1)$$

контурному условию

$$F = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (1.2)$$

условиям непрерывности

$$F_i = F_j \quad \text{на } L_{ij} \quad (1.3)$$

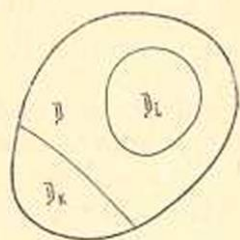
и условиям разрыва нормальной производной F

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial F_i}{\partial n} = \frac{1}{G_j} \frac{\partial F_j}{\partial n} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.4)$$

Касательные напряжения определяются соотношениями

$$\tau_{xz}^i = \frac{\partial F_i}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^i = -\frac{\partial F_i}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Здесь $F_i, G_i, \tau_{xz}^i, \tau_{yz}^i$ обозначают функцию напряжений, модуль



Фиг. 1.

сдвига и касательные напряжения в области D_i , θ — степень кручения, а n — нормаль к линии раздела L_{ij} .

Теперь рассмотрим составную мембрану, имеющую в ненагруженном состоянии форму области D_0 . Пусть натяжение мембраны в области D_i постоянно и равно T_i . Натянута на плоский контур L_0 мембрана, имеющая в различных частях различные натяжения, не может находиться в равновесии без дополнительных связей. Ограничим перемещения точек мембраны, лежащих на линии раздела L_{ij} , так, чтобы они могли свободно двигаться только по направлению, перпендикулярному к плоскости контура L_0 , т. е. наложим связи, запрещающие перемещения точек L_{ij} в ее плоскости. При выполнении этого условия состояние равновесия натянутой мембраны, имеющей в различных областях D_i различные произвольные натяжения T_i , будет обеспечено.

Прогиб w составной мембраны, находящейся под действием равномерно распределенного нормального давления p , удовлетворяет [2] дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = \frac{p}{T_i} \quad (1.6)$$

в каждой из областей D_i .

Так как внешний контур мембраны закреплен, то

$$w = 0 \quad \text{на } L_0. \quad (1.7)$$

Обеспечивая непрерывность прогиба w на линиях раздела L_{ij} , будем иметь условие

$$w_i = w_j \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.8)$$

Из условия равновесия элемента линии раздела, предполагая отсутствие взаимодействий между ее точками, находим

$$T_i \frac{\partial w_i}{\partial n} = T_j \frac{\partial w_j}{\partial n} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (1.9)$$

Дифференциальное уравнение (1.6) и условия (1.6)–(1.9) однозначно определяют прогиб w во всех областях D_i .

Сравнивая уравнения (1.1) и (1.6) и условия (1.2)–(1.4) и (1.7)–(1.9), замечаем, что при выполнении условий

$$2G_i T_i = m p \quad (1.10)$$

между F_i и w_i существует зависимость

$$F_i = m w_i \quad \text{или} \quad F = m w, \quad (1.11)$$

где m — произвольный постоянный параметр.

Следовательно, каждая задача о кручении составного стержня односвязного поперечного сечения может быть сопоставлена с задачей о равновесии нагруженной равномерно распределенным нормальным давлением мембраны, натянутой на плоский контур, идентичный контуру поперечного сечения стержня. При этом мембрана в различ-

ных областях D_i должна иметь различные натяжения, определяемые соотношениями (1.10). Как уже отмечалось, на точки линии раздела должны быть наложены связи, допускающие перемещения только по направлению, перпендикулярному к плоскости непрогнувшейся мембраны, и не должно быть взаимодействия между этими точками.

Таким образом, задача кручения составного призматического стержня моментами, приложенными к его торцам, может быть экспериментально решена путем измерения прогибов мембраны, находящейся в вышеуказанных условиях. При этом:

1. Линии равного прогиба мембраны будут совпадать с траекториями касательных напряжений.

2. Результирующее касательное напряжение будет

$$\tau_{xy} = \frac{\Phi}{m} \frac{\partial w}{\partial n}, \quad (1.12)$$

где Φ — угол закручивания, n — направление нормали к линии равных прогибов, проходящей через данную точку мембраны.

3. Жесткость стержня при кручении определяется при помощи объема V , заключенного между поверхностью прогнувшейся мембраны и плоскостью опорного контура

$$C = \frac{2}{m} V = 2 \iint_{D_i} F dx dy = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{D_i} F_i dx dy. \quad (1.13)$$

В случае составного стержня многосвязного поперечного сечения мембранную аналогию можно получить как частный случай из вышеприведенной аналогии.

Действительно, принимая $G_i = 0$ в тех областях, контуры которых соответствуют внутренним контурам многосвязного поперечного сечения составного стержня, замечаем, что, согласно уравнению (1.1), F_i будет гармонической функцией, а ее нормальная производная на L_i , согласно условию (1.4), будет равна нулю. Следовательно, F_i будет постоянной внутри D_i . На основании (1.3) функция F на внутреннем контуре L_i , как и следовало ожидать, будет постоянной.

Принимая во внимание, что условие $G_i = 0$ соответствует условию $T_i = \infty$ для составной мембраны, подобными рассуждениями приходим к заключению, что в области D_i прогиб мембраны должен быть постоянным, что соответствует имитированию внутреннего контура мембраны абсолютно жесткой невесомой пластинкой, имеющей свободу только поступательного перемещения в направлении, перпендикулярном к ее плоскости.

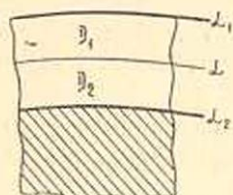
Таким образом, мембранная аналогия обобщается и для задачи кручения составных стержней многосвязного поперечного сечения.

Достаточно точное экспериментальное решение задачи о кручении составного стержня односвязного или многосвязного поперечного сечения при помощи мембранной аналогии, очевидно, связано с тех-

ническими трудностями. Однако, как известно [4], ценность мембранной аналогии для задачи кручения призматических стержней состоит не столько в том, что она открывает новый подход к экспериментальному исследованию проблемы кручения, сколько в том, что она в каждой конкретной задаче дает наглядное геометрическое представление о характере функции напряжений F без какого-либо экспериментального или теоретического исследования задачи.

Ниже мембранная аналогия использована для приближенного решения задачи нестесненного кручения тонкостенных составных стержней.

2. Рассмотрим задачи о кручении двухслойной трубы произвольного поперечного сечения. Часть мембраны, соответствующая поперечному сечению трубы, показана на фиг. 2. Заштрихованная область



Фиг. 2.

представляет собой абсолютно жесткую невесомую пластинку, имеющую свободу поступательного перемещения в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа. Контур L_1 закреплен, L_2 перемещается вместе с пластинкой, а точки контура L имеют возможность перемещаться только в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа. Натяжения в областях D_1 и D_2 различны. Они удовлетворяют условию (1.10).

Введем местную систему координат (s, n) , где s — длина дуги L , отсчитываемая от произвольной точки L , а n — расстояние точки области D_1 или D_2 до L по ее нормали.

Толщины слоев h_1 и h_2 будем предполагать переменными. Уравнения кривых L , L_1 и L_2 будут $n = 0$, $n = h_1(s)$ и $n = -h_2(s)$.

Отношения толщины слоев к радиусу кривизны ρ линии раздела L , а также относительные изменения толщин h_1 и h_2 при изменении s на величину порядка h_1 или h_2 будем принимать малыми по сравнению с единицей.

Для части рассматриваемой мембраны, заключенной между координатными линиями $s = s_1$ и $s = s_2$ и имеющей длину порядка $h_1 + h_2$, местную систему координат с принятой здесь точностью можно считать прямоугольной. Соответствующая часть прогнувшейся составной мембраны, нагруженной вместе с невесомой жесткой пластинкой равномерно распределенным нормальным давлением, будет иметь форму, близкую к цилиндрической. Поэтому можно положить

$$\frac{\partial w_i}{\partial s} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.1)$$

Согласно мембранной аналогии и (2.1)

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = \frac{\partial^2 F_i}{\partial s^2} = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (2.2)$$

На основании (1.1) и (2.2) имеем

$$\frac{\sigma^2 F_i}{\partial s^2} = -2G_i. \quad (2.3)$$

Граничные условия для F_1 и F_2 получаем из (1.2)–(1.4)

$$\begin{aligned} F_1 &= 0 \quad \text{при } n = h_1, \quad F_2 = F_0 \quad \text{при } n = -h_2, \\ F_1 &= F_2, \quad \frac{1}{G_1} \frac{\partial F_1}{\partial n} = \frac{1}{G_2} \frac{\partial F_2}{\partial n} \quad \text{при } n = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь F_0 — постоянное значение F_2 на L_2 .

Интегрируя уравнение (2.2) и используя условия (2.4), находим

$$F_1 = -G_1 n^2 + \frac{n}{h} (G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2 - F_0) + \frac{h_1}{h} (G_2 h_2^2 + G_2 h_1 h_2 + F_0), \quad (2.5)$$

$$F_2 = -G_2 n^2 + \frac{n}{h} \frac{G_2}{G_1} (G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2 - F_0) + \frac{h_1}{h_2} (G_2 h_2^2 + G_2 h_1 h_2 + F_0), \quad (2.6)$$

где через $h = h_1 + \frac{G_2}{G_1} h_2$ обозначена приведенная толщина трубы.

Постоянная F_0 должна быть определена из обобщенной теоремы Бредта о циркуляции касательных напряжений для задачи о кручении составных призматических стержней [3]. В случае составного тонкостенного открытого профиля $F_0 = 0$.

Для циркуляции касательных напряжений по внутреннему контуру L_2 , согласно теореме Бредта, имеем

$$\oint_{L_2} \frac{\partial F_2}{\partial n} ds = -2G_2 S. \quad (2.7)$$

Здесь S — площадь области, ограниченной внутренним контуром L_2 .

Используя (2.6), из (2.7) получаем

$$F_0 = \frac{2G_1 S}{\oint \frac{ds}{h}} \left[1 + \frac{1}{2S} \oint \left(h_1^2 + \frac{G_2}{G_1} h_2^2 + 2h_1 h_2 \right) \frac{ds}{h} \right]. \quad (2.8)$$

Пренебрегая в (2.8) малыми членами порядка $\frac{h}{\rho}$ по сравнению с единицей, для F_0 будем иметь формулу

$$F_0 = \frac{2G_1 S}{\oint \frac{ds}{h}}. \quad (2.9)$$

На основании (2.5), (2.6) и (2.9) из (1.5) получаем выражения касательных напряжений τ_{zs}^1 и τ_{zs}^2 в соответствующих областях D_1 и D_2 :

$$\tau_{zs}^1 = -2G_1 n + \frac{8}{h} \left(G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2 - \frac{2G_1 S}{\oint \frac{ds}{h}} \right), \quad (2.10)$$

$$\tau_{zx}^2 = -2\theta G_2 n + \frac{\theta}{h} \frac{G_2}{G_1} \left(G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2 - \frac{2G_1 S}{\oint \frac{ds}{h}} \right). \quad (2.11)$$

Пренебрегая в (2.10) и (2.11) малыми величинами, будем иметь

$$\tau_{zx}^1 = \frac{2\theta G_1 S}{h \oint \frac{ds}{h}}. \quad (1.12)$$

Напряжения τ_{zx}^1 являются малыми по сравнению с напряжениями τ_{zx}^2 .

Жесткость на кручение определим при помощи мембранной аналогии. Согласно (2.11) и (2.13), имеем

$$C = \frac{M_{kp}}{\theta} = \frac{2}{m} V = 2F_0 S + 2 \iint_{D_1} F_1 ds dn + 2 \iint_{D_2} F_2 ds dn. \quad (2.13)$$

Внося выражения F_1 и F_2 из (2.5) и (2.6) в (2.13), после некоторых преобразований находим

$$C = 2F_0 S + F_0 \oint (h_1 + h_2)^2 \frac{ds}{h} + \frac{G_1}{3} \oint \left(h_1^2 - \frac{G_2}{G_1} h_2^2 \right)^2 \frac{ds}{h} + \frac{2G_2}{3} \oint h_1 h_2 (h_1 + h_2)^2 \frac{ds}{h}. \quad (2.14)$$

Пренебрегая в (2.14) малыми величинами порядка $\frac{h^2}{\rho^3}$ по сравнению с $\frac{h}{\rho}$ и принимая во внимание (2.8), находим упрощенную формулу для определения жесткости при кручении тонкостенного стержня двусвязного профиля

$$C = \frac{2G_1 S}{\oint \frac{ds}{h}} \left[2S + 2 \oint (h_1 + h_2)^2 \frac{ds}{h} + \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \oint h_2^2 \frac{ds}{h} \right]. \quad (2.15)$$

Формулу для жесткости C можно еще упростить, пренебрегая в (2.15) величинами порядка $\frac{h^2}{\rho^2}$ по сравнению с единицей. Получаем

$$C = \frac{4G_1 S^2}{\oint \frac{ds}{h}}. \quad (2.16)$$

Обобщение формул (2.10)–(2.16), когда число областей поперечного сечения, соответствующих различным материалам составного призматического стержня, и степень многосвязности D_0 больше двух, дополнительного принципиального исследования не требует.

Как видно из (2.12) и (2.16), упрощенные выражения для касательных напряжений и жесткости при кручении однородного и со-

ставного стержней двусвязного профиля одинаковы, только в последнем случае обычная толщина в соответствующих формулах для однородных стержней [2] должна быть заменена приведенной толщиной

$$h = h_1 + \frac{G_2}{G_1} h_2.$$

Формулы (2.10), (2.11) и (2.15) могут быть использованы для более точного определения касательных напряжений и жесткости при кручении составных стержней, когда малые величины порядка $\frac{h}{\rho}$

в расчетах представляют интерес. Из этих формул можно получить выражения касательных напряжений и жесткости при нестесненном кручении тонкостенного двухслойного стержня произвольного открытого профиля. Принимая в (2.10), (2.11) и (2.14) $F_0 = 0$, находим

$$\tau_{zs}^1 = -2\theta G_1 n + \frac{\theta}{h} (G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2), \quad (2.17)$$

$$\tau_{zs}^2 = -2\theta G_2 n + \frac{\theta}{h} \frac{G_2}{G_1} (G_1 h_1^2 - G_2 h_2^2), \quad (2.18)$$

$$C = \frac{G_1}{3} \int_L \left(h_1^2 - \frac{G_2}{G_1} h_2^2 \right) \frac{s}{h} ds + \frac{4 G_2}{3} \int_L h_1 h_2 (h_1 + h_2)^2 \frac{ds}{h}. \quad (2.19)$$

Здесь интегрирование производится по незамкнутой линии раздела L , которая может иметь разветвления.

Заметим, что, придавая одной из величин G_1 , G_2 , h_1 , h_2 значение нуль, из формул (2.17)–(2.19) получим соответствующие известные [2] формулы для однородных тонкостенных стержней открытого профиля.

Следует отметить, что, как и в случае однородных тонкостенных стержней, полученные в этой заметке формулы не могут дать близкое к действительному распределение касательных напряжений в окрестности тех точек L , где нарушаются условия, на основании которых получены эти формулы (наличие угловых точек, большая кривизна L , резкое изменение толщин h_1 и h_2). Однако, искажение действительного распределения напряжения формулами (2.10)–(2.12), (2.17) и (2.18) имеет местный характер и не влияет на величину жесткости при кручении сколь-нибудь существенным образом, так как площадь областей, где это искажение значительно, мала по сравнению со всей площадью поперечного сечения стержня.

4. Մ. Չորանյան

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ
ՄԵՄԲՐԱՆԱՅԻՆ ԱՆԱԼՈԳԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տարբեր առաձգականության մոդուլներ ունեցող, իզոտրոպ, համասեռ և կողմնային մակերևութներով իրար հետ միացված պրիզմայաձև մարմիններից կազմված պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը համապատասխանության մեջ է դրվում այդ ձողի լայնական հատվածքի ձևն ունեցող, արտաքին կոնտուրով ամրացված և հավասարաչափ չաշխված p նորմալ բեռի տակ գտնվող բազադրչալ մեմբրանի ծոման խնդրի հետ: Ձողի լայնական հատվածքի տարրեր նյութիկրին համապատասխանող տիրույթներում մեմբրանի $T_i (i=1, 2, \dots, N)$ ձգվածությունը պետք է լինի տարրեր և բավարարի (1.10) պայմանին, որտեղ G_i -ն նյութի սահմանի մոդուլն է, իսկ m -ը՝ հաստատուն կամայական պարամետր: Բազադրչալ մեմբրանի տարրեր մասերում տարրեր ձգվածություն ստանալու համար պետք է տիրույթների բաժանման զծերի կետերի տեղափոխությունները չծոված մեմբրանի հարթության մեջ բոլորովին արգելել այնպես, որ այդ կետերը հնարավորություն ունենան տեղափոխվելու միայն չծոված մեմբրանի հարթությանն ուղղահայաց, ընդ որում նրանց միջև անմիջական փոխազդեցություններ չպետք է լինեն:

Բազադրչալ ձողերի ոլորման խնդրի մեմբրանային անալոգիան առանց խնդրի լուծումը դրսևելու տալիս է լարումների ֆունկցիայի երկրաչափական պատկերացումը, որի օգնությամբ որոշ դեպքերում հնարավոր է գտնել մոտավոր լուծում, երբ խնդրի ճշգրիտ լուծումը կապված է դժվարությունների հետ:

Որպես դիտարկված անալոգիայի կիրառություն քննարկվում է բարակապատ երկշերտ ձողի շկաշկանդված ոլորման խնդիրը: Ինչպես փակ, այնպես էլ բաց պրոֆիլների դեպքում շոշափող լարումների և կոշտությունների համար ստացված են մոտավոր բանաձևեր: Եթե բավարարվում ենք ընդունված մոտավորությանը, ապա երկշերտ և համասեռ բարակապատ ձողերի ոլորման խնդիրներում ինչպես շոշափող լարումները, այնպես էլ կոշտությունները որոշվում են նույն բանաձևերով, միայն երկշերտի դեպքում պատի սովորական հաստության փոխարեն պետք է վերցնել բերված հաստությունը

$$h = h_1 + \frac{G_2 h_2}{G_1},$$

որտեղ h_1 -ը և h_2 -ը շերտերի հաստություններն են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
3. Чобанян К. С. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 8, № 2, 1955.
4. Новожилов В. В. Теория упругости. Судпромгиз, Л., 1958.