В. В. Черников

Об однолистных функциях с вещественными коэффициентами*

1. С помощью метода вариаций рассматривается задача на экстремум величины

$$J_f = \left| \frac{z_0^m f'(z_0)}{f^m(z_0)} \right| \quad (1.1)$$

при заданном z_0 , $|z_0| < 1$, вещественном m и $f(z)$, пробегающей все функции $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ класса S_r с вещественными коэффициентами $c_2, \dots$, голоморфные и однолистные в $|z| < 1$.

Мы устанавливаем соответствующие точные границы для (1.1) при $m \leq 1$ и при $m \geq 3$.

Теорема 1. Для $f(z) \in S_2$ при заданных $m \leq 1$, z_0 из $|z| < 1$ справедливы точные оценки:

$$\left| (1+z_0)(1-z_0)^{2m-3} \right|, \quad \text{если } \operatorname{Re}\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) \geq 2; \quad (1.2)$$

$$J_f \leq \left| \frac{1-z_0^2}{\left(1 - \frac{1+|z_0|^2}{|z_0|^2} z_0 \operatorname{Re} z_0 + z_0^2\right)^{2-m}} \right|, \quad \text{если } \left| \operatorname{Re}\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) \right| < 2; \quad (1.3)$$

$$\left| (1-z_0)(1+z_0)^{2m-3} \right|, \quad \text{если } \operatorname{Re}\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right) \leq -2. \quad (1.4)$$

Знак равенства в (1.2) имеет место только для функции

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad (1.5)$$

в (1.3) — только для функции

$$f(z) = \frac{z}{1-2tz+z^2}, \quad -1 < t < 1, \quad (1.6)$$

с $2t = \operatorname{Re}\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)$, в (1.4) — только для функции

$$f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}. \quad (1.7)$$

* Доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

При $m \geq 3$ в (1.2)–(1.4) знаки неравенств следует заменить противоположными.

Если $m > 3$, то в неравенствах, противоположных (1.2)–(1.4), знаки равенства имеют место соответственно только для функций (1.5)–(1.7), а при $m = 3$ в неравенстве, противоположном (1.3), знак равенства имеет место также для функции

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2}, \quad (1.8)$$

когда $\operatorname{Re} z_0 = 0$, и функций

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1 + 2(1+2t)z^2 + z^4 - 2\operatorname{Re}\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)(z+z^3)}}, \quad (1.9)$$

где

$$-4 < 4t < \left|z_0 + \frac{1}{z_0}\right|^2. \quad (1.10)$$

2. Установим необходимые вариационные формулы.

Исходя из известной теоремы Г. М. Голузина ([1], стр. 125), получаем следующие варьированные функции класса S_r :

$$f_*(z) = f(z) + \lambda f(z) P(z, a) + o(\lambda), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} P(z, a) &= A \frac{2f(z)}{f(z) - f(a)} + \bar{A} \frac{2f(z)}{f(z) - \bar{f}(a)} - \frac{A}{H^2(a)} \times \\ &\times \left[Q(z, a) + Q\left(z, \frac{1}{a}\right) \right] - \frac{\bar{A}}{H^2(\bar{a})} \left[Q(z, \bar{a}) + Q\left(z, \frac{1}{\bar{a}}\right) \right], \\ Q(z, a) &= H(z) \frac{z+a}{z-a} + 1, \quad H(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}, \\ f_*(z) &= f(z) + \lambda f(z) \left[A \frac{f(z)}{f(z) - w_0} + \bar{A} \frac{f(z)}{f(z) - \bar{w}_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $f(z) \in S_r$, A — произвольная комплексная постоянная, a — произвольно фиксированная в круге $|z| < 1$ точка, $\lambda > 0$ мало, причем в (2.2) функция $w = f(z)$ отображает $|z| < 1$ на область, для которой точка w_0 внешняя.

Рассмотрим далее функцию ([2], стр. 350–351)

$$w = \varphi(z) = z - \lambda z \frac{1-z^2}{1+z^2-2z \cos \alpha} + o(\lambda), \quad \varphi(0) = 0,$$

однолистно отображающую круг $|z| < 1$ на область $|w| < 1$ с двумя выброшенными луночками малой площади $\pi\lambda$, угловые точки которых близки соответственно к $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$. Если теперь $f(z) \in S_r$, то и функция

$$f_*(z) = \frac{f(\varphi(z))}{\varphi'(0)} \in S_r,$$

и при малом $\lambda > 0$, $t = \cos \alpha$, получаем формулу вариации функций класса S_r :

$$f_\lambda(z) = f(z) + \lambda \left[f(z) - z f'(z) \frac{1-z^2}{1+z^2-2tz} \right] + o(\lambda), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (2.3)$$

Наконец, если функция $w = f(z) \in S_r$ такова, что вещественная точка c не принадлежит образу круга $|z| < 1$ при отображении этой функцией, то функция

$$f_*(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)} \quad (2.4)$$

также принадлежит классу S_r .

Формулы (2.1)–(2.4) — искомые вариационные формулы.

3. Рассмотрим задачу о нахождении экстремальных значений величины (1.1). Существование экстремальных функций очевидно в силу применимости к функциям класса S_r принципа сгущения.

Пусть $f(z)$ одна из них. Применением варьированной функции (2.2) докажем, что образ B круга $|z| < 1$ при отображении $w = f(z)$ не имеет внешних точек. Далее, применение варьированной функции (2.1) приводит в $|z| < 1$ к дифференциальному уравнению для $f(z)$:

$$\frac{R(f(z))}{(f(z) - f(z_0))^2 (f(z) - \bar{f}(z_0))^2} = \left(\frac{f(z)}{zf'(z)} \right)^2 \times \\ \times \frac{T(z)}{(z - z_0)^2 \left(z - \frac{1}{z_0} \right)^2 (z - \bar{z}_0)^2 \left(z - \frac{1}{\bar{z}_0} \right)^2}, \quad (3.1)$$

где

$$R(w) = (2 - m) \operatorname{Re} f(z_0) w^3 - [(5 - 3m) (\operatorname{Re} f(z_0))^2 + \\ + (3 - m) (\operatorname{Im} f(z_0))^2] w^2 + (4 - 3m) |f(z_0)|^2 \operatorname{Re} f(z_0) w + \\ + (m - 1) |f(z_0)|^4, \quad (3.2)$$

$$T(z) = (m - 1) z^8 + a_7 z^7 + a_6 z^6 + a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + \\ + a_1 z + m - 1, \quad (3.3)$$

$$a_7 = \operatorname{Re} \left[p \left(z_0 - \frac{1}{z_0} \right) \right] + (5 - 4m) \operatorname{Re} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right), \quad (3.4)$$

$$a_6 = -2 \operatorname{Re} \left[p \left(z_0 - \frac{1}{z_0} \right) \right] \operatorname{Re} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) - \operatorname{Re} \left[p \left(z_0 - \frac{1}{z_0} \right) \times \right. \\ \times \left. \overline{\left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right)} \right] + (2m - 4) \left(2 + \left| z_0 + \frac{1}{z_0} \right|^2 \right) + \\ + (4m - 4) \left[\operatorname{Re} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) \right]^2, \quad (3.5)$$

$$a_3 = \left(3 + \left|z_0 + \frac{1}{z_0}\right|^2\right) \operatorname{Re} \left[p \left(z_0 - \frac{1}{z_0} \right) \right] + 2 \operatorname{Re} \left[p \left(z_0 - \frac{1}{z_0} \right) \times \right. \\ \left. \times \overline{\left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right)} \right] \operatorname{Re} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) + \left[8 + (5 - 4m) \left(3 + \left| z_0 + \frac{1}{z_0} \right|^2 \right) \right] \times \\ \times \operatorname{Re} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right). \quad (3.6)$$

$$a_4 = -4 \operatorname{Re} \left[p \left(z_0 - \frac{1}{z_0} \right) \right] \operatorname{Re} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) - \operatorname{Re} \left[p \left(z_0 - \frac{1}{z_0} \right) \times \right. \\ \left. \times \overline{\left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right)} \right] \left(2 + \left| z_0 + \frac{1}{z_0} \right|^2 \right) + (8m - 16) \left[\operatorname{Re} \left(z_0 + \frac{1}{z_0} \right) \right]^2 + \\ + (m - 1) \left(2 + \left| z_0 + \frac{1}{z_0} \right|^2 \right) + 2m - 10, \quad (3.7)$$

$$p = 1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - m \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)}. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.1) позволяет утверждать, что экстремальная область B получается из плоскости w проведением разреза по кривой Γ , состоящей из конечного числа n аналитических дуг C_i , $i=1, 2, \dots, n$. Конечные концы дуг C_i , принадлежащие только одной из них, обозначим через η_ε , $\varepsilon=1, 2, \dots, r$, принадлежащие по крайней мере двум из C_i — через ζ_k , $k=1, 2, \dots, q$. Если $\mu_\varepsilon = f^{-1}(\eta_\varepsilon)$, $|\mu_\varepsilon| = 1$, то из уравнения (3.1) следует, что полином (3.3) должен иметь двойной нуль $z = \mu_\varepsilon$. Поэтому кривая Γ может содержать не более четырех точек η_ε .

Из уравнения (3.1) следует далее, если принять во внимание алгебраическую особенность функции $f_{(w)}^{-1}$ в точках ζ_k , что точки ζ_k являются корнями полинома (3.2), причем вещественные ζ_k могут принадлежать не более пяти дугам C_i , а комплексные — только трем, и соответствующие дуги C_i исходят из точек ζ_k под равными углами друг к другу. Учитывая еще симметрию области B относительно вещественной оси, получаем, таким образом, только следующие возможные виды кривой Γ .

1) Γ состоит из пяти дуг, имеющих общую вещественную точку ζ_1 , из которой они исходят под равными углами друг к другу, причем дуга C_1 лежит на вещественной оси, а дуги C_2, C_3 симметричны относительно этой оси с дугами C_4, C_5 .

2) Γ состоит из пяти дуг. Дуги C_1, C_2 имеют общий конец $w = \infty$ и лежат на вещественной оси. Дуги C_i , $i=2, 3, 4, 5$, имеют общую вещественную точку ζ_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу, причем дуга C_3 лежит на вещественной оси, а дуги C_4, C_5 симметричны относительно этой оси.

3) Γ состоит из шести дуг. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общую вещественную точку ζ_1 , а дуги $C_i, i=3, 4, 5, 6$, имеют общую вещественную точку ζ_2 . Соответствующие дуги исходят из точек ζ_1, ζ_2 под равными углами друг к другу, причем дуги C_3, C_6 лежат на вещественной оси, а дуги C_1, C_4 симметричны относительно этой оси с дугами C_2, C_5 .

4) Γ состоит из пяти дуг. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общий конец $w = \infty$, причем дуга C_3 лежит на вещественной оси, а дуги C_1, C_2 симметричны относительно этой оси. Дуги C_3, C_4, C_5 имеют общую вещественную точку ζ_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу, причем дуги C_4, C_5 симметричны относительно вещественной оси.

5) Γ состоит из шести дуг. Дуги C_1, C_2 лежат на вещественной оси и имеют общий конец $w = \infty$. Дуги C_1, C_3, C_4 имеют общую вещественную точку ζ_1 , дуги C_2, C_5, C_6 имеют общую вещественную точку ζ_2 . Соответствующие дуги исходят из точек ζ_1, ζ_2 под равными углами друг к другу, причем дуги C_4, C_6 симметричны относительно вещественной оси с дугами C_3, C_5 .

6) Γ состоит из четырех дуг, имеющих общий конец $w = \infty$ и попарно симметричных относительно вещественной оси.

7) Γ состоит из четырех дуг, имеющих общий конец $w = \infty$, причем дуги C_1, C_2 лежат на вещественной оси, а дуги C_3, C_4 симметричны относительно этой оси.

8) Γ состоит из семи дуг. Дуги C_1, C_2, C_3 имеют общую точку ζ_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_4, C_5, C_6 , имеющими общую точку $\zeta_2 = \bar{\zeta}_1$. Дуги C_3, C_6, C_7 имеют общую вещественную точку ζ_3 , причем дуга C_7 лежит на вещественной оси.

9) Γ состоит из шести дуг. Дуги C_1, C_3, C_5 имеют общую точку ζ_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу и симметричны относительно вещественной оси с дугами C_2, C_4, C_6 , имеющими общую точку $\zeta_2 = \bar{\zeta}_1$, причем дуги C_1, C_2 имеют общий конец $w = \infty$.

10) Γ состоит из трех дуг, имеющих общий конец $w = \infty$, причем дуга C_1 лежит на вещественной оси, а дуги C_2, C_3 симметричны относительно этой оси.

11) Γ состоит из четырех дуг, имеющих общую вещественную точку ζ_1 , из которой они исходят под равными углами друг к другу, причем дуги C_1, C_2 лежат на вещественной оси, а дуги C_3, C_4 симметричны относительно этой оси.

12) Γ состоит из четырех дуг. Дуги C_1, C_2 лежат на вещественной оси и имеют общий конец $w = \infty$. Дуги C_2, C_3, C_4 имеют общую вещественную точку ζ_1 , исходят из нее под равными углами друг к другу, причем дуги C_3, C_4 симметричны относительно вещественной оси.

13) Γ состоит из трех дуг, имеющих общую вещественную точку ζ_1 , из которой они исходят под равными углами друг к другу. Дуга

C_1 лежит на вещественной оси, а дуги C_2, C_3 симметричны относительно этой оси.

14) Γ состоит из двух дуг, симметричных относительно вещественной оси.

15) Γ состоит из двух дуг, лежащих на вещественной оси.

16) Γ состоит из одной дуги, лежащей на вещественной оси.

В дальнейшем область B с границей Γ вида $s, s=1, 2, \dots, 16$, обозначаем через B_s . Функцию класса S_s , отображающую $|z| < 1$ на область вида B_s , обозначаем через $f_s(z)$. Легко видеть, что функциями $f_s(z), s=15, 16$, являются только функции (1.5)–(1.7).

4. Пусть $f(z)$ — экстремальная функция. Применяя варьированную функцию (2.3) и учитывая формулы (3.4)–(3.8), приходим в случае минимума к неравенству:

$$2(m-1)(8t^4 - 8t^2 + 1) + 2a_7(4t^3 - 3t) + 2a_6(2t^2 - 1) + 2a_5t + a_4 \leq 0, \quad (4.1)$$

где $-1 < t < 1$. В случае максимума знак неравенства в (4.1) следует заменить противоположным.

Пусть в (1.1)

$$m > 3. \quad (4.2)$$

Рассмотрим случай, когда в уравнении (3.1) $\operatorname{Re} f(z_0) \neq 0$. Тогда минимум величине (1.1) могут доставлять только функции (1.5), (1.7) и функции $\omega = f_s(z), s=1, 3, 8, 11, 13$. Покажем, что последние функции не экстремальны. Допустим противное, и пусть ζ_1 — кратная вещественная точка границы экстремальной области $B_s, s=1, 3, 8, 11, 13$. Если область B_s такова, что $\zeta_1 > 0$, то полином (3.2) должен иметь положительный корень $\omega = \zeta_1$ (простой или кратный). Но, согласно (4.2), (3.2), это может иметь место только при $\operatorname{Re} f_s(z_0) > 0$. При $\zeta_1 < 0$ должно быть, следовательно, $\operatorname{Re} f_s(z_0) < 0$. Пусть c такая вещественная точка границы экстремальной области B_s , что

$$|c| > |f_s(z_0) - c|. \quad (4.3)$$

По только что сказанному неравенство (4.3) будет справедливо, если $|c|$ достаточно велик. При таком c построим по формуле (2.4) функцию $f_*(z) \in S$. Для нее имеем в силу экстремальности $f_s(z): J_{f_*} < J_{f_s}$, т. е. учитывая (4.2), $|c| < |f_s(z_0) - c|$, что противоречит (4.3).

5. Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении (3.1)

$$\operatorname{Re} f(z_0) = 0. \quad (5.1)$$

Тогда минимум величине (1.1) могут доставлять только функции (1.6) и функции $\omega = f_s(z), s=9, 14$.

Предположим, что минимум доставляет функция $f_9(z)$. Если $z = \mu_e (e=1, 2)$ — точки на окружности $|z|=1$, соответствующие кон-

цевым точкам η_ε ($\varepsilon = 1, 2$) границы области B_0 при отображении $w = f_0(z)$, то из уравнения (3.1) имеем:

$$T(z) = (m-1) [(z - \mu_1)(z - \bar{\mu}_1)(z - \mu_2)(z - \bar{\mu}_2)]^2,$$

где $T(z)$ — полином (3.3). Таким образом,

$$a_7 = -4(m-1)(\operatorname{Re} \mu_1 + \operatorname{Re} \mu_2),$$

$$a_8 = 4(m-1)[1 + (\operatorname{Re} \mu_1)^2 + (\operatorname{Re} \mu_2)^2 + 4\operatorname{Re} \mu_1 \operatorname{Re} \mu_2],$$

$$a_9 = -4(m-1)(3 + 4\operatorname{Re} \mu_1 \operatorname{Re} \mu_2)(\operatorname{Re} \mu_1 + \operatorname{Re} \mu_2),$$

$$a_{10} = 2(m-1)[3 + 4(\operatorname{Re} \mu_1)^2 + 4(\operatorname{Re} \mu_2)^2 + 8\operatorname{Re} \mu_1 \operatorname{Re} \mu_2(2 + \operatorname{Re} \mu_1 \operatorname{Re} \mu_2)].$$

Поэтому условие (4.1) с учетом (4.2) при $t = 1$ дает:

$$[(1 - \operatorname{Re} \mu_1)(1 - \operatorname{Re} \mu_2)]^2 \leq 0,$$

что невозможно.

Подобным же образом приведем к противоречию предположение о том, что минимум доставляет $f_{14}(z)$.

Итак, при условии (4.2) минимум величине (1.1) доставляют только функции (1.5)–(1.7). Элементарные вычисления приводят к указанным в теореме 1 оценкам с соответствующими этим функциям случаями знаков равенства.

6. Пусть в (1.1)

$$m = 3. \quad (6.1)$$

При $\operatorname{Re} f(z_0) \neq 0$ в уравнении (3.1) применимы рассуждения пункта 4, следовательно, минимум доставляют только функции (1.5), (1.7).

Пусть $\operatorname{Re} f(z_0) = 0$. Учитывая (6.1), (5.1), (3.2), уравнение (3.1) перепишем в виде:

$$\frac{(\operatorname{Im} f(z_0))^4}{[f^2(z) + (\operatorname{Im} f(z_0))^2]^2} = \left(\frac{f(z)}{zf'(z)} \right)^2 \prod(z), \quad (6.2)$$

где

$$2 \prod(z) = \frac{T(z)}{\left[(z - z_0) \left(z - \frac{1}{z_0} \right) (z - \bar{z}_0) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_0} \right) \right]^2}, \quad (6.3)$$

Из уравнения (6.2) следует, что экстремальны только функции $f_s(z)$, $s = 6, 7, 14, 15$. Принимая во внимание (6.1), (3.3), (6.3), (4.1), на окружности $|z| = 1$ будем иметь:

$$\prod(z) \leq 0. \quad (6.4)$$

Интегрируя уравнение (6.2) с учетом (6.4), приходим к заключению, что экстремальная функция $w = f_s(z)$, $s = 6, 7, 14, 15$, удовлетворяет на $|z| = 1$ условию:

$$\arg \frac{w^2}{w^2 + (\operatorname{Im} f_s(z_0))^2} = 0.$$

Отсюда вытекает, что граничные дуги C_s экстремальных областей B_s , $s=6, 7, 14, 15$, могут лежать только на координатных осях плоскости w , т. е. минимум величине (1.1) при условиях (6.1), (5.1) могут доставлять только функции (1.6), (1.8) и функции $f_7(z)$ вида (ср., например, [2], стр. 170):

$$f_7(z) = \frac{z}{\sqrt{(1+z^2-2t_1z)(1+z^2-2t_2z)}}, \quad -1 < t_1 < t_2 < 1. \quad (6.5)$$

Учитывая для этих функций условие (5.1), получим после элементарных вычислений указанные в теореме 1 оценки с соответствующими функциям (1.6), (1.8) и (1.9) случаями знаков равенства. При этом функции (6.5) принимают вид (1.9), где $t = t_1 t_2$ удовлетворяет неравенствам (1.10).

Теорема 1 для случая $m \geq 3$, таким образом, полностью доказана. Случай $m \leq 1$ рассматривается совершенно аналогично и приводит к утверждению оценок (1.2)–(1.4) с указанными случаями знаков равенства.

При $m = 0$ и $m = 1$ из (1.2)–(1.4) следуют результаты, полученные соответственно Г. М. Голузиным [3] и Д. А. Дженкинсом [4] иными средствами.

7. В качестве следствия теоремы 1 укажем оценку для угла γ между касательной плоскостью к поверхности модуля функции $f(z) \in S_r$ и плоскостью z .

Известно (см., например, [5], стр. 139), что

$$\operatorname{tg} \gamma = 2 |f(z) f'(z)|.$$

Теорема 2. При $f(z) \in S_r$ для $\operatorname{tg} \gamma$ имеем точные оценки:

$$\operatorname{tg} \gamma \leq \begin{cases} 2 \left| \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \right|, & \text{если } \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right) \geq 2; \\ 2 \left| \frac{z(1-z^2)}{\left(1 - \frac{1+|z|^2}{|z|^2} z \operatorname{Re} z + z^2 \right)^2} \right|, & \text{если } \left| \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right| < 2; \\ 2 \left| \frac{z(1-z)}{(1+z)^3} \right|, & \text{если } \operatorname{Re} \left(z + \frac{1}{z} \right) \leq -2. \end{cases}$$

Для доказательства этих оценок достаточно применить теорему 1 при $m = -1$. Точность этих оценок следует из точности оценок (1.2)–(1.4).

Վ. Վ. Չեքիկով

ԻՐԱԿԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ՄԻԱԹԵՐԹ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ հետազոտվում է, մի քանի էքստրեմալ խնդիրների տեսակետից, թեյլորյան վերլուծումների իրական գործակիցներ ունեցող միավոր շրջանում հարմարիք և միաթերթ ֆունկցիաների S_r դասը:

Վարիացիոն մեթոդով գտնված են (1.1) մեծության վերին ճշգրիտ գնահատականները, երբ $m \leq 1$, և այդ մեծության ստորին ճշգրիտ գնահատումները, երբ $m \geq 3$, որոնք ընդհանրացնում են Գ. Մ. Գոլուզինի արդյունքները (զեպք՝ $m = 0$) և Ի. Ա. Ջենկինսինը (զեպք՝ $m = 1$): Որպես հետևանք, զույգ են արված վերին ճշգրիտ գնահատականները ֆունկցիայի մոդուլի մակերևույթը շոշափող հարթություն և միավոր շրջանի հարթության միջև ընկնող անկյան համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. Давренъев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
3. Голузин Г. М. О типично вещественных функциях. Математ. сб., 27, № 2, 1950.
4. Jenkins J. A. On univalent functions with real coefficients. Ann. of Math., vol. 71, № 1, 1960, 1—15.
5. Поляк Г. и Сега Г. Задачи и теоремы из анализа, ч. 1. Гостехиздат, М., 1956.