ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVI, № 3, 1963 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

# О некоторых однородных краевых задачах для дифференциальных операторов высокого порядка с постоянными коэффициентами

Исследование почти периодичности решений смешанной задачи для уравнения типа С. Л. Соболева

$$\frac{\partial^2 Lu}{\partial t^2}+Mu=0$$

приводит к следующей однородной краевой задаче на собственные значения: при каких значениях числового параметра $\lambda$ уравнение

$$Mu-\lambda Lu=0, \tag{1}$$

рассматриваемое в некоторой области $\Omega$ с границей $\Gamma$, имеет нетривиальные решения $u_\lambda$, обращающиеся в нуль на границе $\Gamma$. Эти значения параметра $\lambda$ называются собственными значениями, а решения $u_\lambda$—соответствующими собственными функциями.

Эта задача для уравнения колебания струны в случае, когда область $\Omega$—круг, была решена Р. А. Александряном [1], который доказал существование полной в $C_0$ системы полиномиальных собственных функций и дал их явное выражение через полиномы Чебышева.

Затем эта задача для некоторых однородных дифференциальных операторов $M$ и $L$ второго порядка с постоянными коэффициентами в эллипсоидальных областях и при некоторых однородных граничных условиях была рассмотрена в работах [2, 3, 4, 5], в которых доказана полнота соответствующих систем собственных функций в различных пространствах.

В настоящей работе показано, что развивая методику заметки [5], можно изучить однородные задачи и для дифференциальных операторов высокого порядка.

Пусть $M$ и $L$—однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка $2s$

$$M=\sum_{i_1\cdots i_s,\,j_1\cdots j_s=1}^{n} \alpha_{i_1\cdots i_s,\,j_1\cdots j_s}\frac{\partial^{2s}}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_s}\cdot\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_s}},$$

$$L = \sum_{i_1\cdots i_s, j_1\cdots j_s=1}^{n} \beta_{i_1\cdots i_s, j_1\cdots j_s} \frac{\partial^{2s}}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_s}\cdot\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_s}},$$

причем для всех действительных чисел $\xi_{i_1\cdots i_s}$ выполняется условие

$$\sum_{i_1\cdots i_s, j_1\cdots j_s=1}^{n} \beta_{i_1\cdots i_s, j_1\cdots j_s}\, \xi_{i_1\cdots i_s}\, \xi_{j_1\cdots j_s} \geqslant 0 \tag{2}$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда все $\xi_{i_1\cdots i_s}$ равны нулю; $\Omega$—произвольный эллипсоид с центром в начале координат, а граничные условия имеют вид

$$Gu\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial\sigma} Gu\Big|_{\Gamma} = \cdots = \frac{\partial^{s-1}}{\partial\sigma^{s-1}} Gu\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

где $\sigma$—любое фиксированное направление, $G = AB$; $A$ и $B$—дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами вида

$$A = \sum_{i_1+\cdots+i_n=0}^{N_1} a_{i_1\cdots i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},$$

$$B = \sum_{r=0}^{N_2} b_r \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r,$$

$N_1$ и $N_2$—любые натуральные числа, а оператор $\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^r$ получается формальным возведением в степень $r$.

Пусть $C^{(l)}(\Omega)$—пространство всех функций, непрерывно дифференцируемых до порядка $l$ с метрикой

$$\|\varphi\|_{C^{(l)}(\Omega)} = \max_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ 0\leqslant k\leqslant l}} |D^k\varphi|, \tag{4}$$

а $C_0^{(l)}(\Omega)$—подпространство функций, обращающихся в нуль на границе $\Gamma$ области $\Omega$ вместе со своими производными до порядка $l$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть $a_{0\ldots0} \neq 0$, $\gamma_k = b_0 + kb_1 + \cdots + k(k-1)\cdots(k-N_2+1)\,b_{N_2} \neq 0$ при любом целом $k \geqslant 0$, тогда при всяком $l$ система собственных функций задачи (1), (3) полна в некотором подпространстве $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega)$, содержащем в себе $C_0^{(l)}(\Omega)$.*

Для доказательства теоремы наряду с граничными условиями (3) рассмотрим и граничные условия

$$u\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial\sigma}\Big|_{\Gamma} = \cdots = \frac{\partial^{s-1}u}{\partial\sigma^{s-1}}\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{3*}$$

т. е. тот случай, когда $G$ является тождественным оператором.

Очевидно, для непрерывно дифференцируемых до порядка $s-1$ включительно в замкнутом эллипсоиде функций $u$ граничные условия (3*) равносильны тому, что все частные производные от $u$ до порядка $s-1$ включительно равны нулю на границе эллипсоида.

Лемма 1. *Полиномиальные собственные функции задачи (1), (3*) образуют базис в пространстве $P_0^*$, состоящем из всех полиномов, удовлетворяющих граничным условиям (3*).*

Обозначим через $\Theta_m$ пространство всех полиномов $p(x_1, \cdots, x_n)$ степени не выше $m$, а через $N_m$ размерность этого пространства.

Пусть $g(x_1, \cdots, x_n) = 1$ — уравнение рассматриваемого эллипсоида. Введем в пространстве $\Theta_m$ скалярное произведение

$$\{p, q\} = \int\limits_{\Omega} (1-g)^s pq d\Omega, \tag{5}$$

аналогичное скалярному произведению, введенному Р. Т. Денчевым в работе [2].

Рассмотрим в этом пространстве линейные операторы

$$T = M(1-g)^s$$

$$D = (-1)^s L(1-g)^s.$$

Поскольку $M$ и $L$ — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка $2s$, а $(1-g)^s$ — полином степени $2s$, то операторы $T$ и $D$ отображают пространство $\Theta_m$ в себя. Покажем, что $T$ и $D$ являются симметричными в скалярном произведении (5) операторами, а оператор $D$ к тому же положительно определенный.

По определению имеем

$$\{Tp, q\} = \int\limits_{\Omega} \sum_{i_1 \cdots i_s, j_1 \cdots j_s = 1}^{n} a_{i_1 \cdots i_s, j_1 \cdots j_s} \frac{\partial^{2s}[(1-g)^s p]}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s} \partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_s}} \times$$

$$\times (1-g)^s q d\Omega.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что полином $(1-g)^s q$ обращается в нуль на границе эллипсоида вместе со своими производными до порядка $s-1$ включительно, получим

$$\{Tp, q\} = (-1)^s \int\limits_{\Omega} \sum_{i_1 \cdots i_s, j_1 \cdots j_s = 1}^{n} a_{i_1 \cdots i_s, j_1 \cdots j_s} \times$$

$$\times \frac{\partial^s[(1-g)^s p]}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}} \cdot \frac{\partial^s[(1-g)^s q]}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_s}} d\Omega = \{p, Tq\}.$$

Совершенно так же получим

$$\{Dp, q\} = \{p, Dq\},$$

$$\{Dp, p\} = \int\limits_{\Omega} \sum_{i_1\cdots i_s, j_1\cdots j_s=1}^{n} \beta_{i_1\cdots i_s, j_1\cdots j_s} \times$$

$$\times \frac{\partial^s[(1-g)^s p]}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_s}} \cdot \frac{\partial^s[(1-g)^s p]}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_s}}\, d\Omega.$$

Отсюда, если $\{Dp, p\}=0$, то в силу условия (2) получим, что все производные полинома $(1-g)^s p$ до порядка $s$ включительно равны нулю в $\Omega$. А это означает, что $(1-g)^s p$ должен быть полиномом степени не выше $s-1$, тогда как $(1-g)^s$ уже—полином степени $2s$. Это возможно только при $p\equiv 0$.

Фиксируем в пространстве $\Theta_m$ некоторый ортонормальный базис $e_1, e_2, \cdots, e_{N_m}$. Каждому полиному $p(x_1, \cdots, x_n)$ можно сопоставить, и притом однозначно, $N_m$—мерный вектор $\breve{p}$, представляющий собой упорядоченную совокупность его коэффициентов в этом базисе. Симметричным операторам $T$ и $D$ в этом базисе соответствуют вещественные симметричные матрицы

$$\breve{T} = \| \{Te_i, e_k\} \|, \quad \breve{D} = \| \{De_i, e_k\} \|.$$

Вводя скалярное произведение по Фридрихсу $[e_i, e_k] = \{De_i, e_k\}$ и пользуясь известным свойством определителя Грамма, убеждаемся в положительной определенности матрицы $\breve{D}$.

Таким образом, пучок квадратичных форм

$$\breve{T}(x, x) - \lambda \breve{D}(x, x),$$

соответствующий матрицам $\breve{T}$ и $\breve{D}$ является регулярным пучком. Пользуясь известной теоремой о регулярном пучке квадратичных форм [6], заключаем, что существуют $N_m$ вещественных чисел $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{N_m}$ и соответствующих им $N_m$ линейно независимых векторов $\breve{p}_1, \breve{p}_2, \cdots, \breve{p}_{N_m}$ таких, что

$$\breve{T}\breve{p}_i = \mu_i \breve{D}\breve{p}_i \quad (i = 1, 2, \cdots N_m).$$

Переходя к соответствующему операторному уравнению, получим

$$Tp_i = \mu_i Dp_i$$

или

$$M(1-g)^s p_i = (-1)^s \mu_i L(1-g)^s p_i.$$

Отсюда видим, что линейно независимые полиномы $\Phi_i^*(x_1,\cdots,x_n)=$ $=(1-g)^s p_i$ $(i=1, 2,\cdots, N_m)$ удовлетворяют уравнению (1). Кроме того, в силу множителя $(1-g)^s$, они удовлетворяют и граничным условиям (3*), т. е. полиномы $\Phi_i^*$, степень которых не выше $m+2s$, являются собственными функциями задачи (1), (3*). С другой стороны, легко видеть, что, если некоторый полином $r(x_1,\cdots,x_n)$, степень которого не выше $m+2s$, удовлетворяет граничным условиям (3*), то он имеет вид $r=(1-g)^s r_m$, где $r_m$ — полином степени не выше $m$. Таким образом, число линейно независимых полиномов степени не выше $m+2s$ и удовлетворяющих граничным условиям (3*) равно $N_m$ — размерности пространства всех полиномов степени не выше $m$. Отсюда очевидным образом следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $f(x_1,\cdots,x_n)\in C_0^{(l)}(\Omega)$, где $\Omega$ — произвольный эллипсоид с центром в начале координат. Тогда, при любом натуральном $N>l$, существует последовательность полиномов, обращающихся в нуль на границе эллипсоида вместе со своими производными до порядка $N$ включительно, которая сходится к $f$ по метрике $C_0^{(l)}(\Omega)$.*

Доказательство. При заданном $\varepsilon>0$ существует финитная и непрерывно дифференцируемая до порядка $l$ включительно в $\Omega$ функция такая, что

$$\|f-\varphi\|_{C^{(l)}(\Omega)}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Это можно показать, например, следующим образом. Продолжим функцию $f$ вне области $\Omega$ нулем и рассмотрим последовательность функций $\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=f(\alpha_m x_1,\cdots,\alpha_m x_n)$, где $\alpha_m>1$ и стремятся к единице. $\varphi_m$ будут, очевидно, финитными и непрерывно дифференцируемыми до порядка $l$ включительно в области $\Omega$ функциями. Имеем

$$\|f-\varphi_m\|_{C^{(l)}(\Omega)}=\max_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ 0\le k\le l}}|D^k f-D^k\varphi_m|=$$

$$=\max_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ 0\le k\le l}}\left|\frac{\partial^k f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}-\alpha_m^k\frac{\partial^k f(\alpha_m x_1,\cdots,\alpha_m x_n)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\right|.$$

Пользуясь равномерной непрерывностью функции $f$ и ее производных до порядка $l$ включительно в замкнутой области $\overline{\Omega}$, можно заключить, что, начиная с некоторого $m_0$, выполняется неравенство (6). С другой стороны, по известной теореме, обобщающей классическую аппроксимационную теорему Вейерштрасса, существует последовательность полиномов $Q_n$, стремящаяся к функции $\varphi$ в метрике $C^{(l)}(\Omega)$. Пусть $\Omega'$ — некоторая замкнутая область, лежащая целиком в $\Omega$ и вне которой функция $\varphi$ равна нулю. Составим полиномы $R_n=[(g-1)^r+1]^p Q_n$, где $g(x_1, \cdots, x_n) = 1$—уравнение эллипсоида, $\tau$—нечетное число, большее $N$, $\mu$—целое положительное число. Учитывая равномерную ограниченность полиномов $Q_n$ в метрике $C^{(l)}(\Omega)$ и то, что в области $\Omega'$ $(g-1)^\tau + 1 \leqslant \delta < 1$, легко видеть, что, выбирая $\mu$ достаточно большим, можно сделать полиномы $R_n$ сколь угодно малыми в метрике $C^{(l)}(\Omega')$ независимо от $n$. Кроме того, из сходимости последовательности $Q_n$ к функции $\varphi$ следует, что последовательность полиномов $Q_n$ стремится к нулю в метрике $C^{(l)}(\Omega - \Omega')$. Поэтому после выбора $\mu$ можно выбрать такое число $n_0$, чтобы функции $\varphi - Q_{n_0}$ и $R_{n_0}$ имели в метрике $C^{(l)}(\Omega)$ нормы, меньшие $\frac{\varepsilon}{4}$. Тогда будем иметь

$$\|\varphi - (Q_{n_0} - R_{n_0})\|_{C^{(l)}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Учитывая, что множитель $[(g-1)^\tau + 1]^\mu$ на границе эллипсоида равен единице, а все производные его до порядка $\tau - 1$ включительно на границе эллипсоида обращаются в нуль, и так как $\tau - 1 \geqslant N$, легко видеть, что полином $Q = Q_{n_0} - R_{n_0}$ обращается в нуль на границе эллипсоида вместе со своими производными до порядка $N$ включительно. Из (6) и (7) сразу вытекает утверждение леммы 2.

Следствие. Пусть $\widetilde{P}_0$—пространство, состоящее из всех полиномов, которые на границе эллипсоида удовлетворяют условиям

$$G_1 u|_\Gamma = G_2 u|_\Gamma = \cdots = G_r u|_\Gamma = 0, \tag{8}$$

где $G_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$—некоторые линейные дифференциальные операторы, а $r$—некоторое натуральное число. Пусть, далее, $\widetilde{\Phi}$ — множество полиномов, принадлежащих $\widetilde{P}_0$, такое, что каждый полином $p \in \widetilde{P}_0$ представляет собой конечную линейную комбинацию полиномов из $\widetilde{\Phi}$. Тогда при любом натуральном $l$ это множество полиномов $\widetilde{\Phi}$ образует полную систему в некотором подпространстве $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega)$ пространства $C^{(l)}(\Omega)$, которое содержит в себе $C_0^{(l)}(\Omega)$.

Действительно, если в лемме 2 взять $N$ больше максимума порядков $G_i$, то построенный полином $Q$ будет удовлетворять граничным условиям (8). Следовательно, $Q \in \widetilde{P}_0$. Таким образом, если функция $f \in C_0^{(l)}(\Omega)$, то ее можно аппроксимировать с любой степенью точности полиномами из $\widetilde{P}_0$. Так что, если обозначим через $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega)$ пополнение множества $\widetilde{P}_0$ по метрике $C^{(l)}(\Omega)$, будем иметь $C_0^{(l)}(\Omega) \subseteq \widetilde{C}^{(l)}(\Omega)$. При этом, очевидно, $\widetilde{\Phi}$ образует полную систему в пространстве $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega)$ и $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega) \subset C^{(l)}(\Omega)$.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть $P$—пространство всех полиномов. Покажем, что операторы $A$ и $B$, рассматриваемые только на пространстве $P$, имеют определенные во всем $P$ обратные операторы $A^{-1}$ и $B^{-1}$. Для этого нам нужно показать, что области значений операторов $A$ и $B$ совпадают с пространством $P$ и что прообразом нулевого полинома при отображении пространства $P$ в себя операторами $A$ и $B$ является нулевой полином.

Совпадение области значений оператора $A$ со всем пространством $P$ следует из того, что уравнение

$$Ap = q(x_1, \cdots, x_n)$$

при любом $q$ из пространства $P$ имеет решение

$$p = \left\{q - A_1 q + A_1^2 q - \cdots + (-1)^m A_1^m q\right\} \frac{1}{a_{0\ldots 0}},$$

где $m$—степень полинома $q$, а

$$A_1 = \left\{\sum_{i_1+\cdots+i_n=1}^{N_1} a_{i_1,\cdots,i_n} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}\right\} \frac{1}{a_{0\ldots 0}}.$$

С другой стороны, в силу $a_{0\ldots 0} \neq 0$, однородное уравнение $Ap = 0$ в пространстве $P$ имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $r$—степень полинома $p$ и $Ap = 0$. Считая $a_{0\ldots 0}$ равным единице, представим оператор $A$ в виде $A = E + A_1$, где $E$ — тождественный оператор. Имеем

$$Ap = (E + A_1)p = p + A_1 p = 0.$$

Но $A_1 p$—полином степени не выше $r-1$, так что, с одной стороны, степень полинома $p + A_1 p$ равна $r$, с другой—нулю, следовательно, $p = 0$.

Обозначим через $P_k$ пространство всех однородных многочленов степени $k$. В сферических координатах оператор $B$ имеет вид

$$B = \sum_{r=0}^{N_2} b_r \rho^r \frac{\partial^r}{\partial \rho^r}$$

так что, если $p \in P_k$, то

$$Bp = \gamma_k p, \tag{9}$$

где $\gamma_k \neq 0$ по условию. Отсюда следует существование во всем пространстве $P$ оператора $B^{-1}$, обратного оператору $B$.

Таким образом, имеем, что оператор $G = AB$, рассматриваемый только на пространстве $P$, имеет определенный во всем $P$ обратный оператор $G^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Пусть $\lambda$—собственное значение, а $\Phi_\lambda^*$—соответствующая ему полиномиальная собственная функция задачи (1), (3*). Покажем, что полином $\Phi_\lambda = G^{-1}\Phi_\lambda^*$ является собственной функцией задачи (1), (3), соответствующей этому же $\lambda$. Имеем $G\Phi_\lambda = \Phi_\lambda^*$ и, поскольку $\Phi_\lambda^*$ удовлетворяет граничным условиям (3*), $\Phi_\lambda$ удовлетворяет граничным условиям (3). Остается показать, что полином $\Phi_\lambda$ удовлетворяет уравнению (1). Имеем

$$(M - \lambda L)\,\Phi_\lambda^* = (M - \lambda L)\,AB\Phi_\lambda = A\,(M - \lambda L)\,B\Phi_\lambda = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(M - \lambda L)\,B\Phi_\lambda = 0. \tag{10}$$

Пусть $r$—степень многочлена $\Phi_\lambda$. Представим его в виде

$$\Phi_\lambda = \sum_{k=0}^{r} \Phi_{\lambda,k}, \quad \text{где} \quad \Phi_{\lambda,k} \in P_k. \tag{11}$$

Из (11), (9) и (10) получим

$$(M - \lambda L)\,B\Phi_\lambda = (M - \lambda L)\,B\sum_{k=0}^{r} \Phi_{\lambda,k} = (M - \lambda L)\sum_{k=0}^{r} \gamma_k \Phi_{\lambda,k} = 0. \tag{12}$$

Принимая во внимание, что $\gamma_k \neq 0$ при любом натуральном $k$ и что в уравнении (1) участвуют лишь производные одного и того же порядка, из (11) заключаем, что каждый из полиномов $\Phi_{\lambda,k}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, r)$ удовлетворяет уравнению (1), следовательно, и полином $\Phi_\lambda$ удовлетворяет уравнению (1) и, стало быть, является собственной функцией задачи (1), (3).

Обозначим через $P_0^*$ пространство всех полиномов, удовлетворяющих граничным условиям (3*), а через $P_0$—пространство полиномов, удовлетворяющих граничным условиям (3). Операторы $G$ и $G^{-1}$ устанавливают взаимно-однозначное соответствие между пространствами $P_0$ и $P_0^*$. В частности, множеству $\Phi_i^*$, состоящему из полиномиальных собственных функций задачи (1), (3*) из $P_0^*$ в $P_0$, соответствует множество полиномиальных собственных функций $\Phi_i = G^{-1}\Phi_i^*$ задачи (1), (3). Но по лемме 1 множество полиномов $\Phi_i^*$ образует базис в пространстве $P_0^*$, следовательно, множество полиномов $\Phi_i$ образует базис в пространстве $P_0$.

Применяя к множеству $\Phi_i$ следствие леммы 2, убеждаемся в справедливости теоремы.

В случае, когда $l < s - 1$, $G$—тождественный оператор, множество $\Phi_i$ принадлежит $C_0^{(l)}(\Omega)$; следовательно, $\overline{C}^{(l)}(\Omega)$ совпадает с $C_0^{(l)}(\Omega)$.

Из этой теоремы, в частности, следуют результаты, полученные в указанных выше работах.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема остается верной и в следующих случаях:

а) оператор $B$ заменен оператором

$$\widetilde{B} = \sum_{r=0}^{N_1} b_r \left[ (x_1 - c_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - c_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right]^r,$$

который в сферических координатах с полюсом в точке $(c_1, \cdots, c_n)$ имеет вид:

$$\widetilde{B} = \sum_{r=0}^{N_1} b_r \frac{\partial^r}{\partial \rho^r};$$

в) граничный оператор имеет вид:

$$G = \sum_{l=1}^{r} A_1^{(l)} B_1^{(l)} A_2^{(l)} B_2^{(l)} \cdots A_m^{(l)} B_m^{(l)},$$

где $m$ и $r$—некоторые натуральные числа. При этом предполагается, что операторы $A_k^{(1)}$, $B_k^{(l)}$ $(k=1, 2, \cdots m)$ удовлетворяют условиям теоремы, а в каждом из остальных слагаемых коэффициент $a_{0\ldots0}$ хотя бы одного из операторов $A$ равен нулю.

В конце укажем, как можно приспособить этот метод для исследования некоторых других краевых задач.

Пусть уравнение (1) имеет вид

$$\sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \lambda \sum_{ij=1}^{n} \beta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \qquad (1^*)$$

где $\|\alpha_{ij}\|$, $\|\beta_{ij}\|$—постоянные матрицы, причем $\|\beta_{ij}\|$—положительно определенная. Кроме того предположим, что уравнение не содержит производных нечетного порядка по первым $r$ переменным $(r < n)$. Пусть $\Omega^*$—область, ограниченная гиперплоскостями $x_1=0$, $x_2=0, \cdots$, $x_r=0$ и симметричным относительно них эллипсоидом $\Omega$. Обозначим через $\Gamma_0$ часть границы $\Gamma^*$ области $\Omega^*$, принадлежащую границе эллипсоида, а через $\Gamma_i$—части границы, принадлежащие координатным гиперплоскостям. Пусть $s$—целое число такое, что $0 \leqslant s \leqslant r$.

Рассмотрим граничные условия

$$G_0 u|_{\Gamma_0} = 0, \qquad (2^*, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} G_i u|_{\Gamma_i} = 0, & (i = 1, 2, \cdots, s) \\ \frac{\partial}{\partial n} G_i u|_{\Gamma_i} = 0, & (i = s+1, \cdots, r), \end{array} \right. \qquad (2^*, 2)$$

где

$$G_i = A_i B_i, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, r)$$

$$A_i = p_i\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \cdots, \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}, \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

$$B_i = \sum_{j=0}^{N_i} b_j^{(i)} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^j,$$

$p_i$—полиномы произвольной степени, $b_j^{(i)}$—постоянные, $N_i$—любые целые положительные числа.

Покажем, что утверждение доказанной выше теоремы сохраняет свою силу для задачи (1*), (2*), если предполагать, что свободный член полинома $p_0$ и $\gamma_k^{(0)} = b_0^{(0)} + kb_1^{(0)} + \cdots + k(k-1)\cdots(k-N_0+1)\, b_{N_0}^{(0)}$ не равны нулю при любом целом $k \geqslant s$.

Для этой цели рассмотрим вспомогательную задачу (1*), (3*)

$$G_0 u\,|_\Gamma = 0, \tag{3*}$$

где $\Gamma$—граница области $\Omega$.

Пусть $\Theta^*$—пространство полиномов вида

$$p^* = x_1 \cdot x_2 \cdots x_s p\,(x_1^2, \cdots, x_r^2,\ x_{r+1}, \cdots, x_n),$$

а $\Theta_m^*$—подпространство пространства $\Theta^*$, состоящее из всех полиномов степени не выше $m$. Поскольку уравнение эллипсоида $\Omega$ четно относительно $x_1, x_2, \cdots, x_r$, а уравнение (1*) содержит лишь четное число дифференцирований по $x_1, \cdots, x_r$, то введенные операторы

$$T = M(1-g),$$

$$D = -L(1-g)$$

переводят $\Theta_m^*$ само в себя, кроме того в этом пространстве они сохраняют все свойства, требуемые в доказательстве теоремы. Учитывая (9), т. е., что однородные полиномы являются собственными функциями операторов $B_i$ и то, что операторы $A_i$ содержат только четное число дифференцирований по $x_1, x_2, \cdots, x_r$, имеем, что $\Theta^*$ является инвариантным подпространством операторов $G_i$. Полагая свободный член полинома $p_0$ равным единице, из утверждений, относящихся к оператору $A$ в доказанной выше теореме, можем сказать (поскольку $A_0$ удовлетворяет требуемым в теореме условиям), что оператор $A_0$ в пространстве всех полиномов $P$ имеет определенный во всем $P$ обратный оператор

$$A_0^{-1} = E - \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_0^2 - \widetilde{A}_0^3 + \cdots,$$

где $\widetilde{A}_0 = A_0 - E$, и поскольку $\Theta^*$ является инвариантным подпространством оператора $A_0$, а следовательно, и операторов $\widetilde{A}_0^i$ $(i=1, 2,\ldots)$, то, рассматривая $A_0$ только в пространстве $\Theta^*$, можем утверждать, что $A_0^{-1}$ является обратным оператором во всем $\Theta^*$. В силу (9) и из того, что входящие в $\Theta^*$ полиномы состоят из членов степени не меньше $s$, таким же свойством обладает и оператор $B_0$.

Таким образом, имеем, что оператор $G_0$, рассматриваемый только в пространстве $\Theta^*$, имеет определенный во всем $\Theta^*$ обратный оператор $G_0^{-1} = B_0^{-1} \cdot A_0^{-1}$.

После этого совершенно так же, как и при доказательстве нашей теоремы убеждаемся, что полиномиальные собственные функции задачи (1*), (3*) образуют базис в пространстве $\tilde{\Theta}^*$ полиномов, принадлежащих $\Theta^*$ и удовлетворяющих граничному условию (3*).

Пусть $\varepsilon > 0$ задано, $f^* \in C_0^{(l)}(\Omega^*)$, а $\varphi^*$—финитная и непрерывно дифференцируемая до порядка $l$ в $\Omega^*$ функция, удовлетворяющая условию

$$\| f^* - \varphi^* \|_{C^{(l)}(\Omega^*)} < \varepsilon. \tag{13}$$

Продолжим функцию $\varphi^*$ на весь эллипсоид $\Omega$ нечетно относительно $x_1, \cdots, x_s$ и четно относительно $x_{s+1}, \cdots, x_r$. Полученную таким образом финитную в $\Omega$ функцию обозначим через $\varphi$. Очевидно, $\varphi$ принадлежит $C_0^{(l)}(\Omega)$. Пусть $Q_n$—последовательность полиномов, сходящаяся к функции $\varphi$ в метрике $C^{(l)}(\Omega)$. Представим ее в виде $Q_n = Q_n' + Q_n''$, где $Q_n'$—последовательность полиномов нечетных, а $Q_n''$—четных относительно $x_1$. Покажем, что последовательность $Q_n'$ также сходится к $\varphi$ в той же метрике. Действительно, пусть $\| \varphi - Q_n \|_{C^{(l)}(\Omega)} < \varepsilon_n$, достаточно показать, что $\| \varphi - Q_n' \|_{C^{(l)}(\Omega)} < \varepsilon_n$. Допустим обратное. Тогда без ограничения общности можно считать, что для некоторого $k$ и для некоторой точки $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ выполняется неравенство

$$D^k \varphi(x_0) - D^k Q_n'(x_0) > \varepsilon_n.$$

Пусть $D^k$ содержит четное число дифференцирований по $x_1$, тогда, в силу нечетности функций $D^k \varphi$ и $D^k Q_n'$ относительно $x_1$, будем иметь

$$D^k \varphi(x_0) - D^k Q_n'(x_0) - D^k Q_n''(x_0) > \varepsilon_n - \delta_n$$

$$D^k Q_n'(\bar{x}_0) - D^k \varphi(\bar{x}_0) + D^k Q_n''(\bar{x}_0) > \varepsilon_n + \delta_n,$$

где

$$\bar{x}_0 = (-x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0), \quad \delta_n = D^k Q_n''(x_0) = D^k Q_n''(\bar{x}_0).$$

А это противоречит допущению. Случай, когда $D^k$ содержит нечетное число дифференцирований по $x_1$, рассматривается аналогично. Представляя $Q_n'$ в виде $Q_n' = \tilde{Q}_n + \tilde{\tilde{Q}}_n$, где $\tilde{Q}_n$ — последовательность полиномов нечетных, а $\tilde{\tilde{Q}}_n$—четных относительно $x_2$, аналогичным образом получим, что $\tilde{Q}_n$ также сходится к $\varphi$ в той же метрике. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что существует последовательность полиномов $Q_n^*$ из $\Theta^*$, которая сходится к $\varphi$ в метрике $C^{(l)}(\Omega)$. Так как полиномы $R_n = \{(g-1)^\tau + 1\}^\mu Q_n^*$ также принадлежат $\Theta^*$, то аналогично, как и в лемме 2 убеждаемся, что при любом $l$ существует последовательность полиномов, принадлежащих $\Theta^*$ и обращающихся в нуль на границе эллипсоида $\Omega$ вместе со своими производными до порядка $N^* > l$, которая сходится к функции $\varphi$ в метрике $C_0^{(l)}(\Omega)$. Взяв $N^* > N_0 + M_0$, где $M_0$—степень полинома $p_0$, можем утверждать, что при заданном $\varepsilon > 0$ существует полином $p^* \in \widetilde{\Theta}^*$ такой, что

$$\| p^* - \varphi \|_{C^{(l)}(\Omega)} < \varepsilon$$

и подавно

$$\| p^* - \varphi^* \|_{C^{(l)}(\Omega^*)} < \varepsilon. \tag{14}$$

Учитывая, что собственные функции задачи (1*), (3*), принадлежащие $\Theta^*$, образуют базис в $\widetilde{\Theta}^*$, из (13) и (14) окончательно получим

$$\left\| \sum_{k=1}^{q} c_k p_k^* - f^* \right\|_{C_0^{(l)}(\Omega^*)} < 2\varepsilon, \tag{15}$$

где $p_k^*$—собственные функции задачи (1*), (3*), принадлежащие $\Theta^*$. Но все полиномы $\Theta^*$ равны нулю на $\Gamma_i$ $(i = 1, 2, \cdots, s)$, кроме того, так как нормальная производная на $\Gamma_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ с точностью до знака совпадает с $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, то из четности полиномов $\Theta^*$ относительно $x_{s+1}, \cdots, x_r$ и из того, что $\Theta^*$ является инвариантным подпространством операторов $G_i$, следует, что все полиномы $\Theta^*$ удовлетворяют граничному условию (2*, 2). Таким образом, собственные функции задачи (1*), (3*), принадлежащие $\Theta^*$, являются одновременно и собственными функциями задачи (1*), (2*). Следовательно, собственные функции задачи (1*), (2*) образуют базис в $\widetilde{\Theta}^*$. Пополняя $\widetilde{\Theta}^*$ в метрике $C^{(l)}(\Omega^*)$, получим некоторое пространство $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega^*)$, в котором, очевидно, собственные функции задачи (1*), (2*) образуют полную систему. Очевидно, $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega^*)$ принадлежит $C^{(l)}(\Omega^*)$ и согласно (15) содержит в себе $C_0^{(l)}(\Omega^*)$.

(1*), (2*) как частные случаи содержат, например, задачи со следующими граничными условиями

$$G_0 u \big|_{\Gamma^*} = 0,$$

т. е. случай, когда $s = r$ и все $G_i = G_0$.

Полагая $\Omega$ единичной сферой, $G_i = E$, получим граничные условия

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \bigg|_{\Gamma^*} = 0,$$

где при $0 \leqslant s \leqslant r$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{на} \quad \Gamma_0 + \sum\limits_{i=1}^{s} \Gamma_i \\ 0 & \text{на} \quad \sum\limits_{i=s+1}^{r} \Gamma_i \end{cases}, \qquad \beta = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad \Gamma_0 + \sum\limits_{i=1}^{s} \Gamma_i \\ 1 & \text{на} \quad \sum\limits_{i=s+1}^{r} \Gamma_i \end{cases}$$

или

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{на} \quad \sum\limits_{i=1}^{s} \Gamma_i \\ 0 & \text{на} \quad \Gamma_0 + \sum\limits_{i=s+1}^{r} \Gamma_i \end{cases}, \qquad \beta = \begin{cases} 0 & \text{на} \quad \sum\limits_{i=1}^{s} \Gamma_i \\ 1 & \text{на} \quad \Gamma_0 + \sum\limits_{i=s+1}^{r} \Gamma_i \end{cases}.$$

Последний случай получается, когда $G_0 = \frac{\partial}{\partial n}$, а это возможно, если $1 \leqslant s \leqslant r$.

В том случае, когда уравнение (1*) есть уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1**}$$

а $\Omega$—единичный круг, т. е. $\Omega^*$—полукруг или четверть круга, используя [1], можно указать собственные значения и получить явное выражение соответствующих собственных функций задачи (1**), (2*).

Действительно, в работе [1] показано, что для значений

$\lambda_{k,n} = \operatorname{ctg} \frac{k}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, $\quad n = 2, 3, \cdots, \quad k = 1, 2, \cdots n-1$, функции

$$u_{k,n}(x, y) = T_n\left(x \cos \frac{k}{n} \cdot \frac{\pi}{2} + y \sin \frac{k}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ (-1)^{k+1} T_n\left(x \cos \frac{k}{n} \cdot \frac{\pi}{2} - y \sin \frac{k}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right), \tag{16}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — полиномы Чебышева, удовлетворяют уравнению (1**) и обращаются в нуль на границе единичного круга.

Покажем, что функции $u_{k,n}(x, y)$ являются собственными функциями задачи Дирихле не только в единичном круге, но одновременно и в некоторых определенных эллипсоидальных областях. Для этого, поскольку функции $u_{k,n}(x, y)$, будучи полиномами от $x$ и $y$, удовлетворяют уравнению (1**) на всей плоскости, достаточно указать те области, на границе которых функции $u_{k,n}(x, y)$ обращаются в нуль. Сделаем подстановку

$$x = \frac{\xi}{a}, \qquad y = \frac{\eta}{b}.$$

Тогда функции

$$u_{k,n}=T_n\left(\frac{\xi}{a}\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\eta}{b}\sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+(-1)^{k+1}T_n\left(\frac{\xi}{a}\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\eta}{b}\sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

в новой системе координат обращаются в нуль на эллипсе $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1$. Таким образом, если $a$ и $b$—ненулевые числа, то при любом натуральном $n\geqslant 2$ и $k=1, 2,\cdots n-1$ функции

$$T_n\left(\frac{x}{a}\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+(-1)^{k+1}T_n\left(\frac{x}{a}\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

обращаются в нуль на эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Запишем (16) в форме

$$u_{k,n}(x,y)=T_n\left(x\frac{\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}+y\frac{\sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+(-1)^{k+1}T_n\left(x\frac{\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}-y\frac{\sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть $\tau$—целое число, удовлетворяющее условию $1\leqslant\tau\leqslant n-1$. Взяв $\tau$ той же четности, что и $k$, на основании предыдущего можем утверждать, что функции $u_{k,n}(x,y)$ обращаются в нуль на эллипсах

$$\frac{x^2}{a^2_{\tau,k}}+\frac{y^2}{b^2_{\tau,k}}=1,$$

где

$$a_{\tau,k}=\frac{\cos\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}},\qquad b_{\tau,k}=\frac{\sin\frac{\tau}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

Далее, в полярных координатах $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ имеем

$$u_{k,n}=T_n\left[\rho\cos\left(\varphi-\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]+(-1)^{k+1}T_n\left[\rho\cos\left(\varphi+\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

На прямой $y=0$, т. е. когда $\varphi=0$, $\cos\left(\varphi-\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\varphi+\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, а на прямой $x=0$ $\cos\left(\varphi-\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\varphi+\frac{k}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому, учитывая, что полиномы Чебышева содержат лишь степени аргумента одинаковой четности, получим следующие случаи:

I. $n$-четно, $k$-четно, $u_{k,n}(x, y)$ обращаются в нуль на прямых $x=0$, $y=0$. В этом случае можем взять $\tau=2, 4, \cdots, n-2$, всего $\frac{n-2}{2}$ значений.

II. $n$-четно, $k$-нечетно; $\tau=1, 3, \cdots, n-1$, всего $\frac{n}{2}$ значений.

III. $n$-нечетно, $k$-четно, $u_{k,n}(x, y)$ обращаются в нуль на прямой $y=0$; $\tau=2, 4, \cdots, n-1$, всего $\frac{n-1}{2}$ значений.

IV. $n$-нечетно, $k$-нечетно, $u_{k,n}(x, y)$ обращаются в нуль на прямой $x=0$; $\tau=1, 3, \cdots, n-2$, всего $\frac{n-1}{2}$ значений.

Соответственно этим случаям с точностью до постоянного множителя будем иметь следующие представления:

I. $$u_{k,n}=xy\left(\frac{x^2}{a_{2,k}^2}+\frac{y^2}{b_{2,k}^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a_{4,k}^2}+\frac{y^2}{b_{4,k}^2}-1\right)\cdots\left(\frac{x^2}{a_{n-2,k}^2}+\frac{y^2}{b_{n-2,k}^2}-1\right),$$

II. $$u_{k,n}=\left(\frac{x^2}{a_{1,k}^2}+\frac{y^2}{b_{1,k}^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a_{3,k}^2}+\frac{y^2}{b_{3,k}^2}-1\right)\cdots\left(\frac{x^2}{a_{n-1,k}^2}+\frac{y^2}{b_{n-1,k}^2}-1\right),$$

III. $$u_{k,n}=y\left(\frac{x^2}{a_{2,k}^2}+\frac{y^2}{b_{2,k}^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a_{4,k}^2}+\frac{y^2}{b_{4,k}^2}-1\right)\cdots\left(\frac{x^2}{a_{n-1,\tau}^2}+\frac{y^2}{b_{n-1,k}^2}-1\right),$$

IV. $$u_{k,n}=x\left(\frac{x^2}{a_{1,k}^2}+\frac{y^2}{b_{1,k}^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a_{3,k}^2}+\frac{y^2}{b_{3,k}^2}-1\right)\cdots\left(\frac{x^2}{a_{n-2,k}^2}+\frac{y^2}{b_{n-2,k}^2}-1\right).$$

Пользуясь этими группами и их некоторыми группировками и исходя из видов обратных операторов $B_0^{-1}$, $A_0^{-1}$, получим явное выражение собственных функций $v_{k,n}=G_0^{-1}u_{k,n}$, соответствующих всем различным случаям задачи (1**), (2*).

Вычислительный Центр
АН Армянской ССР

Поступила 26 VII 1952

Ս. Գ. Հովսեփյան

# ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ՝ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱՍԵՌ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ


## ԱՄՓՈՓՈՒՄ

*Աշխատության մեջ (1), (3) եզրային խնդրի համար ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը:*

Թեորեմա — *Դիցուք* $a_{0\ldots0}\neq 0$, $\gamma_k = b_0 + kb_1 + \cdots + k(k-1)\cdots(k-N_2+1)\,b_{N_2}\neq 0$ *ցանկացած* $k\geq 0$ *ամբողջ թվի համար: Տեղի ունի (2) պայմանը: Այդ դեպքում կամայական* $l$*-ի համար (1), (3) եզրային խնդրի սեփական ֆունկցիաների սիստեմը լրիվ է* $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega)$*-ում, որը* $C^{(l)}(\Omega)$*-ի ենթատարածություն է և իր մեջ պարունակում է* $C_0^{(l)}(\Omega)$*-ն:* $\Omega$*-ն կամայական էլիպսոիդ է, որի կենտրոնը գտնվում է սկզբնակետում: Երբ* $l\leqslant s-1$, $G$*-ն նույնական օպերատոր է, ապա* $\widetilde{C}^{(l)}(\Omega)$*-ն համընկնում է* $C_0^{(l)}(\Omega)$*-ի հետ:*

*Նույն թեորեմն ապացուցվում է նաև (1*), (2*) եզրային խնդրի համար, որտեղ* $\Omega^*$*-ն իրենից ներկայացնում է կենտրոնն սկզբնակետում,* $x_1, x_2, \cdots, x_r$ *առանցքների նկատմամբ սիմետրիկ* $\Omega$ *էլիպսոիդով և* $x_1=0$, $x_2=0, \cdots, x_r=0$ *հիպերհարթություններով սահմանափակված տիրույթ:*


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Александрян Р. А.* О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге. ДАН СССР, **73**, № 5, 1950.
2. *Денчев Р. Т.* О спектре одного оператора. ДАН СССР, **126**, № 2, 1959.
3. *Александрян Р. А.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева. Труды М. М. О, **9**, 1960.
4. *Арутюнян Е. А., Гюльмисарян А. Г., Овсепян С. Г.* О некоторых однородных краевых задачах для уравнения колебания струны. ДАН СССР, **138**, № 6, 1961.
5. *Овсепян С. Г.* О некоторых однородных краевых задачах для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. ДАН СССР, **139**, № 2, 1961.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Гостехиздат, М., 1954.