

С. Е. Карапетян

Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I)

В в е д е н и е

В этой работе излагаются основные вопросы геометрии семейств многомерных плоскостей. Основные результаты получены с помощью теории шубертовых многообразий, хорошо разработанной в алгебраической геометрии [1]. В [2, 3, 4, 5] были рассмотрены только семейства прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. В настоящей работе не ставятся какие-либо ограничения относительно размерности пространства, размерности рассматриваемых плоскостей и числа параметров семейства.

В § 1 изучается касательное подпространство семейства и получается формула, по которой определяется его размерность. Второй параграф посвящен касательным линейным многообразиям семейства. Получено уравнение таких многообразий в грассмановых тангенциальных координатах. В третьем параграфе получена формула, по которой очень просто определяется фокальность данного семейства. Результаты этого параграфа были получены с помощью грассмановых и шубертовых многообразий.

Четвертый параграф посвящен огибающим многообразиям семейства. Такие многообразия в некотором смысле являются аналогами развертывающихся поверхностей трехмерного пространства.

В 5, 6, 7, 8, 9, 10 параграфах рассматриваются проективные соответствия, установленные двумя однопараметрическими подсемействами семейства. Обобщается понятие гармонического пересечения двух линейчатых поверхностей для однопараметрических семейств плоскостей. Рассматриваются семейства, которые допускают такие подсемейства.

В § 11 найдены уравнения фокальных многообразий семейства. В 12 и 13 параграфах рассматриваются двойственные результаты. В последнем параграфе доказываются две теоремы, определяющие количество фокусов и фокальных направлений.

§ 1. Касательное подпространство семейства

Отнесем a -параметрическое семейство (a -семейство) d -мерных плоскостей (d -плоскостей) в P_n к подвижному реперу $A_0 \cdots A_n$ так,

чтобы точки $A_0 \dots A_d$ лежали на d -плоскости семейства. Уравнения инфинитезимального перемещения вершин этого репера будут

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta], \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, n. \quad (1.1)$$

Дифференциал аналитической плоскости $A_0 \dots A_d$ напишется в виде

$$d\overline{0 \dots d} = (\omega_0^p + \dots + \omega_d^p) \overline{0 \dots d} + \omega_0^p \overline{p1 \dots d} + \dots + \omega_d^p \overline{01 \dots p}, \quad (1.2)$$

$\overline{ij \dots k} \equiv (A_i A_j \dots A_k)$ (суммировать по $p = d+1, \dots, n$).

Пусть

$$\omega_i^p = a_{ix}^p du^x, \quad i = 0 \dots d, \quad x = 1 \dots a \quad (1.3)$$

будут уравнениями a -семейства d -плоскостей.

Пространство минимальной размерности, которое содержит все d -плоскости дифференциальной окрестности первого порядка плоскости $\overline{01 \dots d}$ a -семейства, называется касательным подпространством. Касательное подпространство a -семейства в силу (1.2) и (1.3) выражается грассмановым произведением

$$(A_0, \dots, A_d, a_{01}^p A_p, \dots, a_{da}^p A_p). \quad (1.4)$$

Следовательно, размерность касательного подпространства a -семейства равна $d+r$, где r — ранг матрицы (a_{ix}^p) (p — индекс столбцов). Эта матрица имеет $n-d$ столбцов и $a(d+1)$ строк, т. е., вообще говоря, $r = \min[n-d, a(d+1)]$. Полагая $n \geq d+a(d+1)$, можно утверждать, что всегда размерность касательного подпространства a -семейства d -плоскостей $\leq d+a(d+1)$. Случай равенства соответствует наиболее общему a -семейству. Это одновременно означает, что дифференциальная окрестность первого порядка каждой d -плоскости a -семейства имеет одно и то же геометрическое строение во всех пространствах размерности $\geq d+a(d+1)$.

Линейное подпространство максимальной размерности, которое принадлежит всем d -мерным плоскостям дифференциальной окрестности первого порядка, называется фокальным подпространством семейства. Из последней теоремы по принципу двойственности формулируется другая теорема: размерность фокального подпространства a -семейства d -плоскостей $\geq d-a(n-d)$. Случай равенства соответствует наиболее общему d -семейству. Согласно этой теореме $(n-1)$ -семейство $(n-1)$ -плоскостей огибает некоторую гиперповерхность. Размерность фокального подпространства в каждом конкретном случае определяется рангом матрицы (a_{ix}^p) (i — индекс столбцов) (см. § 4).

Выбрав первые $d+r+1$ вершин подвижного репера в касательном подпространстве, получим

$$a_{ix}^p = 0, \quad p = d+r+2, \dots, n. \quad (1.5)$$

В силу (1.5) матрица (a_{ix}^p) будет квадратной типа $(d+r+1) \times (d+r+1)$.

§ 2. Касательные линейные многообразия

Как известно [1], каждой d -плоскости пространства P_n соответствует точка грассманова многообразия $\Omega(d, n)$, погруженного в пространство P_N размерности $N = C_{n+1}^d - 1$. a -семейство d -плоскостей отображается в a -поверхность на грассмановом многообразии. Касательная a -плоскость этой поверхности в силу (1.2) напишется в виде грассманова произведения

$$\left(\overline{0 \dots d}, \prod_{i=1}^a \left(a_{0i}^p \overline{p1 \dots d} + a_{1i}^p \overline{0p \dots d} + \dots + a_{di}^p \overline{01 \dots p} \right) \right), \quad (2.1)$$

где символ Π означает грассманово произведение.

В P_N эта плоскость пересекает $\Omega(d, n)$ по многообразию, являющемуся образом линейного многообразия $L_k(d, n)$ d -мерных плоскостей n -пространства. Число $k = a + (n-d)(d+1) - N$ есть размерность линейного многообразия $L_k(d, n)$. Так как $L_k(d, n)$ непосредственно связано с дифференциальной окрестностью первого порядка d -плоскости a -семейства, то мы его называем касательным многообразием a -семейства.

В случае $n=3$, $d=1$, т. е. для линейчатой геометрии трехмерного пространства, касательное линейное многообразие $L_0(1, 3)$ линейчатой поверхности ($a=1$) образовано из двух бесконечно-близких лучей этой поверхности. Касательное многообразие конгруэнции есть особая демиквадрика (см. [2]). Для комплекса прямых касательное многообразие представляет собой особую линейную конгруэнцию (см. [2]).

Пересечение d -плоскости и $(n-d-1)$ -плоскости выражается формулой

$$t^{i_0 \dots i_d} T_{i_0 \dots i_d} = 0, \quad (\text{суммируется по } i_0 < i_1 < \dots < i_d) \quad (2.2)$$

где $t^{i_0 \dots i_d}$ — грассмановы точечные координаты d -плоскости, а $T_{i_0 \dots i_d}$ — грассмановы тангенциальные координаты $(n-d-1)$ -плоскости. В силу (2.2) каждой точке t пространства P_N соответствует гиперплоскость (2.2) в пространстве переменных T . Это пространство, которое в дальнейшем обозначим через P'_N , также имеет размерность N и в нем лежит грассманово многообразие $\Omega(n-d-1, n)$. a -плоскость (2.1) отображается в $N-a-1$ -плоскость пространства P'_N . В силу (2.2) эта плоскость будет определяться уравнениями

$$T_{\sigma \dots d} = 0, \quad \sum_{i=0}^d a_i^p T_{01 \dots i-1 p i+1 \dots d} = 0. \quad (2.3)$$

В P_N плоскость (2.3) неизбежно пересекает грассманово многообразие $\Omega(n-d-1, n)$, ибо ее размерность для любого $a < (n-d)(d+1) \equiv p$ всегда больше числа $N-p$. Многообразие, по которому пересекаются $\Omega(n-d-1, n)$ и (2.3), вообще имеет размерность $p-a-1$. Таким образом: с каждой d -плоскостью a -семейства однозначно связывается *двойственное касательное линейное многообразие* $L_{p-a-1}(n-d-1, n)$. Для случаев $n=3$ и $n=4$ такие многообразия были рассмотрены автором в [2], [3], [4] и [5]. В случае $n=3$, $d=0$, $a=2$ это многообразие совпадает с касательной плоскостью поверхности.

§ 3. Фокальные семейства

В алгебраической геометрии хорошо разработана теория шубертовых многообразий (см. [1], т. II, стр. 348). Шубертово многообразие является системой d -плоскостей, удовлетворяющей условию Шуберта $(a_0 \dots a_d)$, которое мы сейчас сформулируем. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_d$ — система из $d+1$ таких линейных подпространств, что $A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_d$. Если размерности этих подпространств соответственно равны $a_0, \dots, a_d$, то d -плоскость удовлетворяет условиям Шуберта $(a_0, \dots, a_d)$, если она пересекает A_0 не менее, чем в точке, A_1 — не менее, чем по прямой и т. д.; A_{d-1} — не менее, чем по $(d-1)$ -мерному подпространству и если она лежит в A_d . Известно, что отображение многообразия Шуберта является неприводимым алгебраическим подмногообразием грассманова многообразия. Размерность и порядок этого отображения равны соответственно числам

$$p_{a_0 \dots a_d} = \sum_{i=0}^d a_i - \frac{1}{2} d(d+1), \quad g_{a_0 \dots a_d} = \frac{p_{a_0 \dots a_d}!}{a_0! \dots a_d!} \prod_{\lambda > 2} (a_\lambda - a_\lambda). \quad (3.1)$$

Нетрудно заметить, что совокупность d -плоскостей, пересекающих данную d -плоскость по $(d-1)$ -плоскости, образует шубертово многообразие с условием $(1, 2, \dots, d, n)$. Следовательно, размерность и порядок его отображения в P_N равны соответственно числам n и C_{n-1}^d . Но так как это отображение является конусом (асимптотическим) с вершиной в точке отображения данной d -плоскости и этот конус лежит в касательной p -плоскости многообразия $\Omega(d, n)$, то только общая $p-n$ -мерная плоскость будет пересекаться с этим конусом в конечном числе точек и число этих точек будет равно C_{n-1}^d .

Определение. Мы говорим, что a -семейство d -плоскостей имеет s -мерное фокальное подпространство (или просто s -фокус), если все d -плоскости первой дифференциальной окрестности каждой d -плоскости семейства проходят через некоторое s -мерное подпространство.

α -семейство d -плоскостей будет иметь конечное число однопараметрических подсемейств с фокальным $(d-1)$ -подпространством тогда и только тогда, когда касательная α -плоскость его отображения в P_N будет пересекаться с асимптотическим конусом по конечному числу образующих прямых. Но если $(p-n)$ -плоскость пересекает этот конус в конечном числе точек, то только $(p-n+1)$ -мерная касательная плоскость будет удовлетворять нашему требованию. Если $\alpha > p-n+1$, то такое семейство содержит бесконечно много подсемейств с фокальным $(d-1)$ -подпространством. Таким образом: *α -семейство d -плоскостей допускает однопараметрические подсемейства с фокальными $(d-1)$ -подпространствами тогда и только тогда, когда $\alpha \geq d(n-d-1)+1$. Только в случае равенства семейство содержит конечное число таких фокальных подсемейств. Число этих подсемейств равно C_{n-1}^d .*

В случае, когда касательное подпространство α -семейства имеет размерность $n-r$, теорема остается верной, если вместо n взять $n-r$.

Мы сейчас докажем аналогичную теорему для s -фокальных подсемейств. Нетрудно доказать, что совокупность d -плоскостей, пересекающих фиксированную d -плоскость не менее, чем по s -мерному подпространству, образует шубертово многообразие с условием $(d-s, d-s+1, \dots, d, n-d+s+1, \dots, n)$. С помощью (3.1) мы найдем размерность и порядок этого многообразия. Рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущей теоремы, приводят к следующему результату: *α -семейство d -плоскостей содержит однопараметрические подсемейства с фокальными s -подпространствами тогда и только тогда, когда $\alpha \geq (s+1)(n-2d+s)+1$. Только в случае равенства семейство допускает конечное число подсемейств с фокальными s -подпространствами. Число таких подсемейств не превышает порядок шубертова многообразия.*

Из этого результата по принципу двойственности непосредственно получается другая теорема: *α -параметрическое семейство d -плоскостей содержит однопараметрические подсемейства с касательным s -подпространством тогда и только тогда, когда $\alpha \geq (n-s)(2d-s+1)+1$. Равенство соответствует случаю, когда α -семейство содержит конечное число таких подсемейств.*

Теперь найдем уравнения фокальных подсемейств. Пусть точка $x^i A_i$ принадлежит подпространству пересечения двух бесконечно близких d -плоскостей α -семейства. Тогда $(d\omega_1 \dots d\omega_d, x^i A_i) = 0$, что равносильно системе

$$x^i \omega_i^p = 0, \quad i = 0 \dots d, \quad p = d+1, \dots, n, \quad (3.2)$$

и определяет фокусы и фокальные направления. Как мы видим, решение этой системы зависит от ранга матрицы

$$(\omega_i^p), \quad (3.3)$$

Если существуют такие направления (фокальные), для которых ранг этой матрицы меньше $d+1$, то существуют фокальные точки x^i на d -плоскости. Если ранг матрицы (3.3) для некоторых однопараметрических подсемейств равен $d-s$, то эти подсемейства являются s -фокальными (см. [6]).

§ 4. Огибающие многообразия

Пусть ω^p_i определяют однопараметрическое фокальное подсемейство d -плоскостей α -семейства. Если это подсемейство рассматривать как точечное многообразие, то оно будет поверхностью размерности $d+1$. Касательная плоскость этой поверхности в некоторой точке $y^i A_i$ будет определяться грассмановым произведением

$$(A_0 \cdots A_d, y^i \omega^p_i A_p). \quad (4.1)$$

Если точка $y^i A_i$ совпадает с фокусом подсемейства, то касательная плоскость в этой точке в силу (3.2) будет неопределенной. Касательные плоскости (4.1) в точках $x + \lambda y$ для различных значений λ совпадают друг с другом. Таким образом, мы получаем аналог развертывающихся поверхностей трехмерного пространства.

Теперь будем искать такое k -мерное подпространство (k -фокус) d -плоскости α -семейства, которое принадлежит всем d -плоскостям дифференциальной окрестности первого порядка. Геометрическое место таких k -мерных подпространств будет называться огибающим многообразием α -семейства.

Пусть точка $x^i A_i$ принадлежит k -подпространству. Тогда согласно нашему требованию система (3.2) должна выполняться для любых du^x , т. е.

$$x^i a^p_{ix} = 0, \quad i = 0 \cdots d, \quad p = d+1, \cdots, n, \quad x = 1, \cdots, a. \quad (4.2)$$

Если ранг матрицы (a^p_{ix}) (i -индекс столбцов) равен $d-k$, то k -мерное подпространство принадлежит дифференциальной окрестности первого порядка. Таким образом: α -параметрическое семейство d -плоскостей имеет огибающее многообразие k -плоскостей тогда и только тогда, когда ранг матрицы (a^p_{ix}) (i -индекс столбцов) равен $d-k$.

В случае, когда $k=0$ и $a=d$, огибающее многообразие является d -мерной поверхностью, а дифференциальная окрестность d -плоскостей заполняет соприкасающееся пространство этой поверхности.

Резюмируя рассуждения, связанные с матрицей компонент тензора a^p_{ix} , мы видим, что когда p является индексом столбцов (или строк) матрицы (a^p_{ix}) , то ранг этой матрицы определяет размерность касательного подпространства. Когда i является индексом столбцов (или строк), то ранг матрицы характеризует существование огибаю-

щего многообразия. Наконец, когда α является индексом столбцов, то ранг матрицы (a_{ix}^p) не может быть ниже числа α , так как наше семейство существенно зависит от α параметров.

§ 5. Асимптотические и сопряженные направления на $\Omega(d, n)$

Асимптотические формы грассманова многообразия, как и любой другой поверхности, определяются требованием, чтобы второй дифференциал текущей точки лежал на касательной плоскости. В силу (1.2) это требование приводит к системе

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_j^p \omega_i^q = 0; \quad i, j = 0 \dots d; \quad p, q = d+1 \dots n. \quad (5.1)$$

Нетрудно заметить, что грассманово многообразие всегда (независимо от d и n) имеет асимптотические направления. Асимптотические линии являются прямыми и в каждой точке образуют асимптотический конус с вершиной в этой точке. Все образующие этого конуса принадлежат $\Omega(d, n)$. Как было сказано выше, размерность и порядок этого конуса равны соответственно числам n и C_{n-1}^d .

Действительно, каждая образующая прямая грассманова многообразия есть асимптотическая линия. Следовательно, эти направления удовлетворяют системе (5.1). Обратно, если некоторое направление на касательной плоскости является асимптотическим, то оно с грассмановым многообразием имеет по меньшей мере три общие точки, следовательно, оно является образующей и принадлежит асимптотическому конусу.

Каждая линия на грассмановом многообразии представляет однопараметрическое семейство d -плоскостей пространства P_n . Если эта линия огибает асимптотические направления, то каждая d -плоскость однопараметрического семейства со своей соседней пересекается по $(d-1)$ -мерному подпространству (т. е. 1-семейство является $(d-1)$ -фокальным).

Теперь перейдем к сопряженным направлениям грассманова многообразия. Касательная двумерная плоскость этого многообразия может пересекаться с асимптотическим конусом по двум (не больше) образующим прямым. Те направления, которые гармонически делят эти две образующие, называются сопряженными направлениями. Если ω_i^p определяют одно направление, а $\bar{\omega}_i^p$ — другое направление, то они называются сопряженными, если обращают в нуль все полярные формы системы (5.1).

§ 6. Проективное соответствие, установленное двумя 1-семействами

Пусть формы ω_i^p и $\bar{\omega}_i^p$ определяют два однопараметрических семейства d -плоскостей, которые имеют общую d -плоскость $0 \dots d$. На

грассмано-многообразии они представляются двумя пересекающимися линиями. Как и в § 3, мы их можем рассматривать как две $(d+1)$ -мерные поверхности. Касательная $(d+1)$ -мерная плоскость первой поверхности в точке $x^i A_i$ ($i = 0 \dots d$) определяется грассмановым произведением $(A_0 \dots A_d, x^i \omega_i^p A_p)$, а касательная $(d+1)$ -мерная плоскость второй поверхности в точке $y^i A_i$ определяется произведением $(A_0 \dots A_d, y^i \omega_i^q A_p)$; эти две плоскости совпадают тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$x^i \omega_i^p = \lambda y^i \bar{\omega}_i^p, \quad (6.1)$$

где λ — некоторый коэффициент пропорциональности.

Из этой системы, исключая λ , получим

$$x^i \omega_i^{d+1} : y^i \bar{\omega}_i^{d+1} = \dots = x^i \omega_i^n : y^i \bar{\omega}_i^n. \quad (6.2)$$

Число этих уравнений равно $n - d - 1$. Каждой точке y^i будет соответствовать единственная точка x^i тогда и только тогда, когда число независимых уравнений в системе (6.2) будет равно d . Следовательно, для решения задачи необходимо $n = 2d + 1$. Но касательное подпространство первого семейства в общем случае как раз имеет размерность $2d + 1$, следовательно, с помощью выбора координатного тетраэдра (см. § 1) можно добиться того, чтобы обратились в нуль формы ω_i^p , $i = 0 \dots d, p = 2d + 2 \dots n$. Этот факт показывает, что наше требование не ограничивает общности первого семейства. Так как каждая касательная $d+1$ -плоскость первой поверхности является касательной плоскостью (в некоторой другой точке) второй поверхности и наоборот, то касательные подпространства этих двух семейств совпадают. В силу (6.2) каждой точке x^i соответствует единственная точка y^i и наоборот, и это соответствие в общем случае является невырожденным проективным соответствием. Неподвижные точки такого проективного отображения соответствуют собственным значениям λ -матрицы $(\omega_i^p - \lambda \bar{\omega}_i^p)$.

Итак, если два однопараметрических семейства d -плоскостей имеют общую d -плоскость и их касательные $(2d+1)$ -подпространства совпадают, то на общей d -плоскости возникает проективное соответствие $x^i \rightarrow y^i$, согласно которому касательная в точке x^i $(d+1)$ -плоскость одной $(d+1)$ -поверхности касается другой $(d+1)$ -поверхности в точке y^i .

§ 7. Проективное соответствие, установленное двумя фокальными 1-семействами

В этом параграфе мы предположим, что касательные подпространства обоих 1-семейств совпадают и имеют размерность $d+r$, где $r \leq d$. В таком случае ранг матрицы (ω_i^p) , $i = 0 \dots d, p = d+1, \dots, d+r$ равен числу r и, следовательно, каждое 1-семейство имеет $(d-r)$ -

-фокус $((d-r)$ -мерное фокальное подпространство). При доказательстве мы ограничимся случаем, когда $r=d$, т. е. когда фокус является точкой.

Совпадение касательных $(d+1)$ -плоскостей двух 1-семейств в точках касания x^i и y^i , как и прежде, устанавливает соответствие

$$x^i \omega_i^p = \lambda y^i \bar{\omega}_i^p, \quad i = 0 \dots d; \quad p = d+1 \dots 2d. \quad (7.1)$$

Если x_0^i и y_0^i являются фокусами первого и второго 1-семейств, то из (7.1) следует, что эти фокусы соответствуют друг другу, ибо из $x_0^i \omega_i^p = 0$ следует $y_0^i \bar{\omega}_i^p = 0$. В силу (7.1) каждой точке x^i соответствуют точки y^i , лежащие на прямой $y^i y_0^i$, и наоборот. Таким образом, мы получаем две связки прямых с центрами x_0^i и y_0^i , между лучами которых устанавливается взаимно-однозначное (проективное) соответствие. Докажем, что *соответствие между этими двумя связками прямых не может быть перспективным*, т. е. прямая $x_0 y_0$ не может быть неподвижной в этом соответствии, если фокусы различны. Действительно, пусть точке $\mu x_0^i + \nu y_0^i$ соответствует некоторая другая точка $x_0^i + \nu y_0^i$ этой же прямой. Тогда в силу (7.1) будем иметь

$$(\mu x_0^i + \nu y_0^i) \omega_i^p = \lambda (\mu x_0^i + \nu y_0^i) \bar{\omega}_i^p,$$

но в силу $x_0^i \omega_i^p = 0$ и $y_0^i \bar{\omega}_i^p = 0$ последние соотношения можно написать в виде

$$(\mu x_0^i + \nu y_0^i) (\omega_i^p - \bar{\omega}_i^p) = 0.$$

Согласно нашему предположению, эти равенства удовлетворяются для всевозможных значений μ , что приводит к $x_0^i \omega_i^p = 0$, $y_0^i \bar{\omega}_i^p = 0$, т. е. $x_0 = y_0$, и теорема доказана.

Если два 1-семейства имеют совпавшие фокусы, то они здесь называются *конфокальными*.

Мы здесь ограничивались случаем, когда $r=d$. В общем случае (когда $r \leq d+1$) аналогичные рассуждения приводят к такому окончательному результату: *если два 1-семейства d -плоскостей имеют общую d -плоскость и если их касательные подпространства совпадают, то в этом (и только в этом) случае на общей d -плоскости устанавливается проективное соответствие двух связок $(d-r+1)$ -мерных подпространств с центрами в двух $(d-r)$ -фокусах этих семейств. Это соответствие не является перспективным, если семейства не конфокальны.*

§ 8. Проективное соответствие подпространств

Рассмотрим опять два 1-семейства d -плоскостей, которые имеют общее касательное подпространство. Пусть они определяются теми же формами ω_i^p и $\bar{\omega}_i^p$. Совокупность касательных $(d+1)$ -плоскостей

$(d+1)$ -поверхности вдоль одной прямой x_0x_1 лежит в определенном $(d+2)$ -подпространстве. Действительно, касательная плоскость в точке $x_0 + \lambda x_1$ определяется грасмановым произведением

$$(A_0, \dots, A_d, (x_0^i + \lambda x_1^i) \omega_i^p A_p).$$

Следовательно, $(d+2)$ -плоскость

$$(A_0 \cdots A_d, x_0^i \omega_i^p A_p, x_1^i \omega_i^p A_p) \quad (8.1)$$

является подпространством минимальной размерности, содержащей все касательные $(d+1)$ -плоскости вдоль прямой x_0x_1 , если, конечно, эта прямая не проходит через фокус семейства.

В силу ассоциативности грасманова произведения, из (8.1) получим

$$(A_0 \cdots A_d, \omega_{[i_0 \dots i_1]}^{p_0 p_1} t^{i_0 i_1} (A_{p_0} A_{p_1})), \quad i_0 < i_1, \quad p_0 < p_1, \quad (8.2)$$

где $t^{i_0 i_1}$ — точечные грасмановы координаты прямой x_0x_1 , а квадратные скобки означают альтернирование. Мы в дальнейшем подпространство (8.2) назовем касательной плоскостью 1-семейства ω_i^p вдоль прямой $t^{i_0 i_1}$.

Требование совпадения касательных плоскостей двух 1-семейств приведет к соотношениям

$$\bar{\omega}_{[i_0 \dots i_1]}^{p_0 p_1} \bar{t}^{j_0 j_1} = \lambda \omega_{[i_0 \dots i_1]}^{p_0 p_1} t^{j_0 j_1}, \quad (8.3)$$

которые устанавливают соответствие между прямыми d -мерной плоскости. Это соответствие также проективное (коллинеация в $(C_{d+1}^2 - 1)$ -мерном пространстве). Если одно из 1-семейств имеет фокус любой размерности, то другое также обладает фокусом той же размерности, и они соответствуют друг другу в этом соответствии.

Точно так же можно установить проективное соответствие между подпространствами любой размерности $s < d$.

§ 9. Двупараметрические семейства

Сначала докажем теорему: Если касательные подпространства любых двух 1-подсемейств 2-семейства лежат в некотором подпространстве минимальной размерности (которая называется линейной оболочкой для первых двух подпространств), то касательное подпространство 2-семейства совпадает с этой линейной оболочкой.

Действительно, пусть два 1-подсемейства определяются уравнениями $du^1 = 0$, $du^2 = 0$, их касательные подпространства в силу (1.4) напишутся в виде $(A_0 \cdots A_d, a_{01}^p A_p, \dots, a_{d1}^p A_p)$ и $(A_0 \cdots A_d, a_{02}^p A_p, \dots, a_{d2}^p A_p)$. Если линейная оболочка этих двух подпространств имеет размерность l , то касательное подпространство 2-семейства также будет иметь размерность l , ибо в силу (1.4) оно образуется из тех же точек, что и эти два подпространства.

Определение. Два однопараметрических подсемейства гармонически пересекаются (или инволюционны), если проективное соответствие, устанавливаемое этими 1-семействами, является инволюционным.

Из этой теоремы следует, что только такое 2-семейство может допускать гармонически пересекающиеся подсемейства, размерность касательного подпространства которого $\leq 2d+1$.

Предположим, что размерность касательного подпространства равна $2d+1$. Тогда в силу § 3 это 2-семейство обладает 0-фокальными подсемействами. Фокусы будут удовлетворять уравнениям

$$x^i \omega_i^p = 0, \quad i = 0 \dots d, \quad p = d+1 \dots 2d+1, \quad (9.1)$$

а фокальные подсемейства — одному уравнению

$$|\omega_i^p| = 0. \quad (9.2)$$

Пусть фокальное направление определяется уравнением $du^2 = \lambda du^1$, тогда (9.2) даст ровно $d+1$ решений λ_i , а система (9.1) для каждого λ_i даст один фокус. Таким образом: 2-семейство d -плоскостей с касательным $(2d+1)$ -подпространством имеет $d+1$ 0-фокусов и $d+1$ 0-фокальных направлений¹. Для наиболее общего 2-семейства линейная оболочка $d+1$ фокусов совпадает с d -плоскостью. Следовательно, можно точки A_i совместить с фокусами, а точки A_{d+i+1} взять на касательной 2-плоскости поверхности A_i . Тогда все формы ω_i^p , кроме ω_i^{d+i+1} , будут тождественно обращаться в нуль и матрица (ω_i^p) станет диагональной. Фокальные направления будут определяться уравнениями $\omega_i^{d+i+1} = 0, \quad i = 0 \dots d$.

Пусть ω_i^p и $\bar{\omega}_i^p$ — два 1-подсемейства нашего 2-семейства. Тогда коллинеация (7.1) на d -плоскости напишется в простом виде

$$x^i \omega_i^{d+i+1} = \lambda y^i \bar{\omega}_i^{d+i+1} \quad (\text{не суммировать по } i). \quad (9.3)$$

Неподвижные точки этой коллинеации совпадают с фокусами 2-семейства. Соответствие (9.3) вырождается тогда и только тогда, когда одно из 1-подсемейств является фокальным.

Соответствие (9.3) дает возможность применять всю теорию проективных преобразований в построении однопараметрических подсемейств 2-семейства, обладающих соответствующими геометрическими свойствами. Например, это соответствие является инволюцией тогда и только тогда, когда

$$\omega_i^{d+i+1} = \varepsilon_i \bar{\omega}_i^{d+i+1}, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Отсюда следует, что если одно однопараметрическое семейство d -плоскостей задано отношением форм ω_i^{d+i+1} , то существуют ровно

¹ Доказательство этой теоремы принадлежит Шепеленко [7].

$2d-1$ однопараметрических семейств d -плоскостей, каждое из которых гармонически пересекается с первым однопараметрическим семейством. Как известно, два 1-семейства гармонически пересекаются, если касательные $(d+1)$ -плоскости их точечных многообразий в точках касания x и y совпадают, и это свойство является взаимным для всех точек d -плоскости, т. е. если касательные $(d+1)$ -плоскости первой $(d+1)$ -поверхности в точке x и второй $(d+1)$ -поверхности в точке y совпадают, то касательные плоскости первой поверхности в точке y и второй поверхности в точке x также совпадают. Таким образом, получается следующая теорема: *если касательное подпространство двупараметрического семейства d -мерных плоскостей имеет размерность $2d+1$, то существуют 2^{d-1} однопараметрических подсемейств, каждое из которых гармонически пересекается с произвольно заданным однопараметрическим нефокальным подсемейством.* При $d=1$ получаются гармонически пересекающиеся линейчатые поверхности конгруэнции прямых трехмерного пространства.

Два однопараметрических подсемейства называются гармонически пересекающимися типа s ($s < d$), если 1) их точечные $(d+1)$ -мерные поверхности пересекаются по d -плоскости и если 2) проективное соответствие между s -мерными подпространствами общей d -плоскости, установленное этими двумя $(d+1)$ -поверхностями, является инволюцией. Если $t^{i_0 \dots i_s}$ — грассмановы координаты s -мерного подпространства d -плоскости, то это проективное соответствие для двух 1-подсемейств $\omega_{i_0}^{d+i_0+1} \dots \omega_{i_s}^{d+i_s+1}$ пишется в виде

$$t^{i_0 \dots i_s} \omega_{i_0}^{d+i_0+1} \dots \omega_{i_s}^{d+i_s+1} = \lambda t^{j_0 \dots j_s} \omega_{j_0}^{d+j_0+1} \dots \omega_{j_s}^{d+j_s+1} \\ (\text{не суммировать по } i_0 \dots i_s).$$

Условие инволюционности пишется в виде

$$\omega_{i_0}^{d+i_0+1} \dots \omega_{i_s}^{d+i_s+1} = \pm \omega_{j_0}^{d+j_0+1} \dots \omega_{j_s}^{d+j_s+1}.$$

Для каждого нефокального 1-подсемейства можно найти определенное количество 1-подсемейств, которые с ним дают гармоническое пересечение типа s .

Из геометрических соображений следует, что если два 1-семейства имеют гармоническое пересечение типа s , то они одновременно имеют гармоническое пересечение типа больше s . Обратная теорема не верна. В частности, каждые два 1-подсемейства нашего двупараметрического семейства всегда имеют гармоническое пересечение типа d .

Как мы видели, все полученные нами проективные преобразования на d -плоскости семейства были неспециальными (их матрицы имели диагональный вид). Если предполагать, что линейная оболочка всех фокусов не совпадает с d -плоскостью семейства, то в таком слу-

чае можно ожидать только специальных проективных преобразований на d -плоскости.

Далее мы предполагали, что касательное подпространство 2-семейства имеет размерность $2d+1$. Пусть теперь размерность касательного подпространства равна $2d-r$, тогда каждое однопараметрическое подсемейство будет иметь r -фокус (r -мерное фокальное подпространство). Следовательно, два 1-подсемейства устанавливают проективное соответствие двух связок $(r+1)$ -подпространств, вершины которых совпадают с r -фокусами данных 1-подсемейств (см. параграф 7). В этом случае также рассматриваются инволюционные соответствия двух 1-подсемейств. Заметим, что с помощью таких инволюционных соответствий на двумерной поверхности четырехмерного проективного пространства были обнаружены сети линий (инволюционные), которые обладают замечательными геометрическими свойствами (см. [3,4], там они называются ассоциированными сетями).

§ 10. Семейства, обладающие гармонически пересекающимися 1-подсемействами

В этом параграфе мы найдем те семейства d -плоскостей, каждое однопараметрическое подсемейство которых пересекается гармонически с некоторым однопараметрическим подсемейством того же семейства.

Допустим, что некоторое a -семейство d -плоскостей обладает этим свойством. Возьмем произвольное однопараметрическое подсемейство этого семейства. На грасмановом многообразии это подсемейство будет представляться некоторой линией. Если это подсемейство достаточно общее, то его касательное подпространство имеет размерность $2d+1$. В силу результатов предыдущего параграфа a -семейство должно содержать то двухпараметрическое семейство, которое имеет то же самое касательное подпространство, но это в общем случае возможно тогда и только тогда, когда

$$a = (d+1)(n-2d-1) + 2.$$

Итак, *каждое однопараметрическое подсемейство наиболее общего a -параметрического семейства гармонически пересекает некоторое однопараметрическое подсемейство тогда и только тогда, когда $a = (d+1)(n-2d-1) + 2$. Если $a > (d+1) \times (n-2d-1) + 2$, то каждое однопараметрическое подсемейство этого семейства гармонически пересекает бесконечно много однопараметрических подсемейств. В случае, когда $a = (d+1)(n-2d-1) + 2$, как уже известно, каждое однопараметрическое подсемейство пересекает гармонически не одно, а 2^{d-1} однопараметрических подсемейств.*

§ 11. Фокальное многообразие семейства

Если a -семейство d -плоскостей рассматривать как точечное многообразие, то оно будет представлять поверхность размерности $a + d$ в пространстве размерности n (предполагая $n > a + d$). Касательная $(a + d)$ -плоскость этой поверхности в точке $x^i A_i (i = 0 \dots d)$ определяется грасмановым произведением

$$(A_0 \dots A_d, x^i a_{i1}^p A_p, \dots, x^i a_{ia}^p A_p). \quad (11.1)$$

Эта касательная $(d + a)$ -плоскость не определена в точках, для которых ранг матрицы $(x^i a_{ij}^p)$ ниже числа a . Такие точки называются особыми, а геометрическое место особых точек на d -плоскости называется особым многообразием. Нетрудно заметить, что особые точки совпадают с фокусами d -плоскости a -семейства. Действительно, фокусы и фокальные направления a -семейства определяются системой $x^i \omega_i^p \equiv x^i a_{ia}^p dx^a = 0$. Эта система имеет решение относительно x^i , если ранг матрицы $(a_{ia}^p dx^a)$ ниже числа $d + 1$ для некоторых (фокальных) направлений. И наоборот, та же система будет иметь решение для dx^a тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(a_{ia}^p x^i)$ ниже числа a . Следовательно, те точки, для которых ранг матрицы $(a_{ia}^p x^i)$ ниже числа a являются фокусами.

Таким образом, для фокальных направлений ранг матрицы $(a_{ia}^p dx^a)$ должен быть меньше числа $d + 1$, а для фокусов ранг матрицы $(a_{ia}^p x^i)$ должен быть меньше числа a . Эта теорема верна и в том случае, когда не удовлетворяется неравенство $n > d + a$.

Геометрическое место всех фокусов d -плоскости a -семейства называется фокальным многообразием. Оно является алгебраическим многообразием на d -плоскости, и его уравнениями будут все миноры высшего порядка матрицы $(x^i a_{ia}^p)$, обращенные в нуль.

Представляет особый интерес тот случай, когда вышеуказанная матрица имеет квадратный вид. В этом случае $a = n - d$ и, следовательно, семейство будет конгруэнцией (см. [6]). Для конгруэнции получается единственное уравнение фокального многообразия, которое имеет вид

$$|x^i a_{ia}^p| = 0.$$

Следовательно, фокальное многообразие конгруэнции d -плоскостей является алгебраической гиперповерхностью d -подпространства конгруэнции. Порядок этого многообразия равен числу a . Например, фокальное многообразие конгруэнции прямых в P_3 совпадает с двумя фокусами луча, а для конгруэнций 2-плоскостей в P_4 оно является кривой второго порядка и т. д. Из этой теоремы, как следствие, получается, что $(n - 1)$ -параметрическое семейство прямых в P_n имеет на каждом луче ровно $n - 1$ фокусов и столько же фокальных направлений.

Касательная плоскость (11.1) в фокусах снижает свою размерность и тогда она называется фокальной плоскостью. Размерность фокальной плоскости зависит от ранга матрицы $(x^i a_{ij}^p)$. Если ранг этой матрицы равен r , то размерность фокальной плоскости в фокусе x^i равна $d+r$.

Рассмотрим совокупность касательных $(d+a)$ -плоскостей в различных точках плоскости семейства. Две такие плоскости в точках x^i и y^i совпадают тогда и только тогда, когда

$$a_{ij}^p (x^i - \lambda y^i) = 0,$$

где λ — некоторый коэффициент пропорциональности.

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы (a_{ij}^p) (i — индекс столбцов) меньше числа $d+1$.

Если ранг этой матрицы равен $d-r$, то, как известно, наше семейство будет r -фокальным, т. е. все d -плоскости окрестности первого порядка будут принадлежать некоторому r -мерному подпространству.

Таким образом: касательные плоскости (11.1) в различных точках касания совпадают тогда и только тогда, когда a -семейство имеет фокус и прямая, проходящая через точки касания этих плоскостей, проходит через этот фокус семейства.

С помощью теории шубертовых многообразий легко доказываться, что если a -семейство является r -фокальным, то через каждую точку $(d+a)$ -поверхности проходят ∞^{d-r-1} $(r+1)$ -плоскостей, принадлежащих d -плоскости, вдоль каждой из которых касательная $d+a$ -плоскость не меняется. Это свойство r -фокального a -семейства d -плоскостей является аналогом свойства развертывающихся поверхностей трехмерного пространства.

При $r=0$, $a=d$ a -семейство d -плоскостей образует многообразие касательных плоскостей некоторой d -поверхности. Этот факт позволяет распространить все полученные результаты на теорию многомерных поверхностей n -мерного пространства, о которых мы будем говорить ниже.

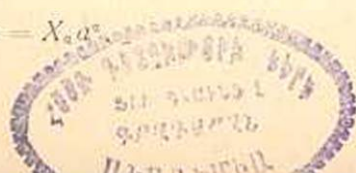
§ 12. „Тангенциальный“ подвижной репер

Для дальнейшего исследования очень важно введение так называемого подвижного тангенциального репера. Элементами этого репера являются грани (гиперплоскости) нашего точечного репера A_i . Если элементы этого репера обозначим через a^x ($x=0 \dots n$), где

$$a^x = (-1)^x \overline{01 \dots, x-1, x+1, \dots, n}, \quad (12.1)$$

и тангенциальные координаты произвольной гиперплоскости m — через X_a , то нетрудно заметить, что

$$m = X_a a^x \quad (12.2)$$



Каждое k -мерное подпространство имеет одновременно два типа координат: 1) это точечные грасмановы координаты $t^{a_1 \dots a_k}$, когда k -подпространство определяется своими $k+1$ точками; 2) тангенциальные грасмановы координаты $T_{a_{n-k} \dots a_n}$, когда k -подпространство определяется как пересечение $n-k$ гиперплоскостей. Между точечными и тангенциальными грасмановыми координатами одного и того же k -подпространства существует простая связь

$$t^{a_1 \dots a_k} = \varepsilon_{a_0 \dots a_n} T_{a_{n-k} \dots a_n} \quad (12.3)$$

где $a_0 \dots a_n$ — любая перестановка чисел $0, \dots, n$ причем, $\varepsilon_{a_0 \dots a_n} = 1$ или -1 в зависимости от четности или нечетности этой перестановки.

Дифференцируя (12.1), в силу (1.1), получим инфинитезимальное перемещение элементов тангенциального репера, которое также имеет простой вид

$$da^x = -\omega^x_a a^a. \quad (12.4)$$

§ 13. Касательные гиперплоскости и касательный конус

Определение. Гиперплоскость называется касательной, если она содержит две бесконечно близкие d -плоскости a -семейства. Однопараметрическое подсемейство, в котором берутся эти две d -плоскости, называется подсемейством с касательной гиперплоскостью.

Пусть гиперплоскость $f = X_p a^p$, $p = d+1, \dots, n$ является касательной. Тогда в силу определения мы должны иметь

$$df \equiv 0 \pmod{(a^{d+1} \dots a^n)},$$

что приводит к системе уравнений

$$X_p a^p_{i_1} du^{i_1} = 0 \quad \text{или} \quad X_p a^p_{i_1} du^{i_1} = 0. \quad (13.1)$$

Эта система имеет ненулевое решение относительно X_p тогда и только тогда, когда ранг матрицы $(a^p_{i_1} du^{i_1})$ для некоторых 1-подсемейств (подсемейств с касательной гиперплоскостью) меньше числа $n-d$. Отсюда следует, что если $d < n-d-1$, то каждое 1-подсемейство любого a -семейства является подсемейством с касательной гиперплоскостью. Очевидна также следующая теорема: если $d > n-d-1$, каждое 1-подсемейство любого a -семейства является фокальным подсемейством. Из этих двух теорем вытекает следующий важный, но почти очевидный результат: если $n \neq 2d+1$, то любое a -семейство d -плоскостей либо имеет фокальные 1-подсемейства (когда $d > n-d-1$), либо 1-подсемейства с касательной гиперплоскостью (когда $d < n-d-1$), либо обладает и фокальными 1-подсемействами и 1-подсемействами с касательной гиперплоскостью. Последнее утверждение этой теоремы будет установлено ниже.

Пусть ранг матрицы $(a^p_{i_1} du^{i_1})$ равен $n-d-r$, тогда решение системы (13.1) будет $(n-r)$ -мерным подпространством, совпадающим с касательным подпространством данного 1-подсемейства.

Совокупность касательных гиперплоскостей для всех 1-подсемейств α -семейства образует некоторый конус, вершина которого совпадает с d -плоскостью α -семейства. Этот конус называется касательным. Его уравнения мы получим, если будем приравнивать нулю все миноры высшего порядка матрицы:

$$(X_p a_{ix}^p). \quad (13.2)$$

Как видим, касательный конус является алгебраическим многообразием.

Представляет особый интерес тот случай, когда матрица квадратная, т. е. когда $\alpha = d + 1$. В этом случае α -семейство называется псевдоконгруэнцией. Касательный конус псевдоконгруэнции будет определяться одним уравнением, следовательно, касательный конус псевдоконгруэнции d -мерных плоскостей является гиперконусом класса α . Из этой теоремы, как следствие, вытекает, что $(n - 1)$ -параметрическое семейство $(n - 2)$ -мерных плоскостей, вообще говоря, имеет $n - 1$ касательных гиперплоскостей. Для трехмерного случая имеются две касательные плоскости, которые совпадают с фокальными плоскостями конгруэнции. В работе [3] был найден касательный конус для 2-семейства прямых.

Как мы уже доказали, любое α -семейство d -плоскостей либо содержит фокальные подсемейства, либо подсемейства с касательной гиперплоскостью. Случай $n = 2d + 1$ является исключением. Однопараметрическое семейство d -плоскостей в $(2d + 1)$ -пространстве, вообще говоря, действительно не фокальное и не имеет касательной гиперплоскости, но двухпараметрическое семейство в том же пространстве уже имеет фокальные подсемейства, эти же подсемейства, как легко заметить, имеют одновременно касательные гиперплоскости. Следовательно, существует только одно семейство d -плоскостей, которое и не фокально и не обладает касательной гиперплоскостью. Это общее однопараметрическое семейство d -плоскостей в пространстве P_{2d+1} . Все остальные семейства либо обладают фокальными подсемействами, либо подсемействами с касательной гиперплоскостью.

Из системы (13.1) непосредственно вытекают уравнения касательного подпространства α -семейства в тангенциальных координатах. Так как в этом подпространстве должно лежать касательное подпространство каждого 1-подсемейства, то эта система должна удовлетворяться для всех отношений du^i , т. е.

$$X_p a_{ix}^p = 0. \quad (13.3)$$

Это и есть система уравнений касательного подпространства (1.4) в тангенциальных координатах. Если ранг матрицы a_{ix}^p (p —индекс столбцов) меньше числа $n - d$ и равняется $n - d - r$, то размерность касательного подпространства (как известно из § 4) равна $n - r$.

Уместно здесь добавить результат из § 3 о том, что a -параметрическое семейство содержит однопараметрические подсемейства с касательными s -подпространствами тогда и только тогда, когда $a \geq (n-s)(2d-s+1)+1$. Равенство соответствует случаю, когда семейство содержит конечное число таких подсемейств.

Легко заметить, что если размерность касательного подпространства l -подсемейства равна s , то это подсемейство имеет $(2d-s)$ -фокус.

§ 14. Число фокусов и касательных гиперплоскостей семейства

В этом параграфе будем рассматривать только такие a -семейства d -плоскостей, которые имеют конечное число 0-фокусов и касательных гиперплоскостей. Так как в первом случае $s=0$ (см. § 3), то $a=n-2d+1$, т. е. *только $(n-2d+1)$ -параметрические семейства имеют 0-фокусы в конечном числе.*

Как известно, фокусы и фокальные направления удовлетворяют системе

$$a_{ix}^p x^i du^x = 0. \quad (14.1)$$

Эта система имеет конечное число решений относительно x^i тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$(a_{ix}^p du^x) \quad (14.2)$$

равен числу d . Это требование накладывает ровно $a-1$ независимых условий на дифференциалы du^x (в виде $a-1$ уравнений, каждое из которых имеет порядок $d+1$ относительно неизвестных du^x). Эти условия дают, вообще говоря, $(d+1)^{a-1}$ решений (в силу теоремы Безу). Следовательно, наше семейство имеет $(d+1)^{a-1}$ фокальных однопараметрических направлений. Внося каждое из этих решений в систему (14.1), получим один фокус. Таким образом, семейство будет иметь всего $(d+1)^{a-1}$ фокусов. Но это число нас не всегда удовлетворяет. Например, для трехпараметрического семейства прямых в четырехмерном пространстве это число равно 4, но C_{n-1}^d (см. § 3) для этого случая равно трем. Такое несоответствие связано с предположением, что вышеуказанная алгебраическая система имеет $(d+1)^{a-1}$ решений, а на самом деле эта система имеет меньшее число решений. Для установления истинного числа фокусов и фокальных направлений мы теперь решим систему, рассматривая ее как линейную систему относительно неизвестных du^x (раньше мы ее рассматривали как линейную систему относительно x^i).

Итак, для того, чтобы система (14.1) имела конечное число решений относительно du^x , необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы

$$(a_{ix}^p x^i) \quad (14.3)$$

был равен $a - 1$, что дает нам ровно d независимых условий. Каждое такое условие представляет алгебраическое однородное уравнение порядка a относительно неизвестных x^i . Число решений такой системы, вообще говоря, равно a^d . Следовательно, число фокусов и фокальных направлений теперь равно a^d . Это число также нас не всегда удовлетворяет (по той же причине), ибо оно не верно, например, для случая двухпараметрического семейства d -мерных плоскостей в $(2d+1)$ -пространстве. Следовательно, для количества фокусов одного и того же семейства получаем два различных числа $(d+1)^{a-1}$ и a^d . Но мы как в одном, так и в другом доказательстве пользовались теоремой Безу. Как известно (см. [1], т. II), теорема Безу справедлива только для неприводимых многообразий. Нетрудно заметить, что каждый минор высшего порядка матрицы (14.2) в случае $a \leq d+1$ является наиболее общим (следовательно, неприводимым) многочленом относительно du^i и наоборот, при $a \geq d+1$ каждый минор высшего порядка матрицы (14.3) является наиболее общим многочленом относительно x^i . Таким образом, когда $a \leq d+1$, число фокусов семейства равно $(d+1)^{a-1}$, когда $a \geq d+1$, число фокусов равно a^d . Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема. Число фокусов и фокальных направлений a -семейства d -плоскостей, допускающего конечное число 0-фокальных подсемейств равно числу $(d+1)^{a-1}$, если $d+1 \geq a$, и числу a^d , если $d+1 < a$.

Теперь рассмотрим такие a -семейства d -плоскостей, которые обладают конечным числом однопараметрических подсемейств, имеющих касательные гиперплоскости. В силу последней теоремы предыдущего параграфа для таких семейств $a = 2d - n + 3$, т. е. только $2d - n + 3$ -параметрические семейства d -плоскостей обладают конечным числом однопараметрических подсемейств с касательными гиперплоскостями.

По принципу двойственности легко заметить, что касательные гиперплоскости и однопараметрические семейства с касательными гиперплоскостями определяются системой

$$a_{\mu}^p X_p du^{\mu} = 0$$

и по аналогии с предыдущей теоремой доказывается

Теорема. Число касательных гиперплоскостей и 1-подсемейств с касательными гиперплоскостями a -семейства, допускающего конечное число касательных гиперплоскостей, равно a^{n-d-1} , если $n-d \leq a$, и $(n-d)^{a-1}$, если $n-d \geq a$.

Ереванский заочный педагогический институт

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 29 I 1963

Ս. Ե. Կարապետյան

ԲԱԶՄԱԶԱՓ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ (I)

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են բազմաչափ հարթությունների ընտանիքների պրոյեկտիվ-դիֆերենցիալ երկրաչափության հիմնական հարցերը, կապված ընտանիքի հարթության առաջին կարգի դիֆերենցիալ շրջապատի հետ:

Հիմնական արդյունքներն ստացվում են հանրահաշվական երկրաչափության (հատկապես նրա չութերության բազմաձևությունների տեսության) օգնությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ходж В. и Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. I, II. ИЛ, М., 1954.
2. Карапетян С. Е. О комплексах прямых трехмерного проективного пространства. Математ. сборник, 56 (98): 3, 1962.
3. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 2, 1962.
4. Карапетян С. Е. Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 3, 1962.
5. Карапетян С. Е. Сопряженные направления и их приложение. ДАН СССР, 133, № 5, 1960.
6. Гейдельман Р. М. Теория конгруэнций плоскостей в неевклидовых пространствах. Докторская диссертация, МГУ, 1958.
7. Шепелев Л. М. Проективное изгибание двупараметрического семейства $(p-1)$ -плоскостей $(2p-1)$ -пространства. Геометрический сборник, выпуск 2. Изд. Томского университета, 1962.