

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. Джрбашян

Дисперсионная формула в теории возбуждения ядер¹

§ 1. Введение

Когда энергия падающих частиц намного меньше высоты кулоновского барьера, при рассмотрении возбуждения ядер влиянием ядерных сил можно пренебречь.

В работе К. Альдера, О. Бора и других [1] приводятся результаты экспериментов Теммера и Гейденбурга, наблюдавших возбуждение ядра ${}_{11}\text{Na}^{22}$ протонами. Эти данные (включая ошибку эксперимента) нанесены на фиг. 1 вертикальными черточками.

Из результатов Теммера и Гейденбурга следует, что при увеличении энергии (например, если она становится в несколько раз меньше высоты кулоновского барьера) ядерные силы начинают вступать в игру, приводя к образованию пиков над плавной кривой, которая правее и левее указанных пиков совпадает с вычисленным сечением кулоновского возбуждения, изображенным на фиг. 1 пунктирной линией.

В соответствии с этим вычислим поперечное сечение возбуждения ядер, пренебрегая ядерными силами по сравнению с кулоновскими везде, кроме резонансов, связанных с образованием промежуточного ядра.

§ 2. Дифференциальное сечение возбуждения

С этой целью воспользуемся дисперсионной формулой для неупругого рассеяния в кулоновском поле²:

$$d\sigma = \frac{4\pi^2 M^2 v_f}{h^2 v_i} \frac{1}{(2l_i + 1)(2s + 1)} \sum_{M_i M_f} \sum_{\nu_i \nu_f} \left| \int u_{\nu_f}^* \tau_f F_{k_f}^- V^3 u_{\nu_i} \tau_i F_{k_i}^+ dz_c + \right. \\ \left. - \frac{\hbar^2}{2\pi^2 M^2 v_i^2 v_f^2} \sum_{l_f m_f} Y_{l_f m_f}(\mathbf{k}_f) \sum_{l_i r M} i^{l_i - l_f} (2l_i + 1)^{\nu} \exp i[\tau_{l_f} + \tau_{l_i}] \times \right.$$

¹ Часть настоящей работы опубликована в журнале ЖЭТФ.² См. приложение.

$$\times \left| \frac{H_{i_1 0 s_2 i_1}^{rM} H_{f_1 m_f s_2 f_1}^{rM}}{W - W_{rj} + i \frac{\gamma_{rj}}{2}} \right|^2 dz. \quad (2.1)$$

Представим (2.1) в виде суммы трех членов

$$dz = dz_1 + dz_{12} + dz_2, \quad (2.2)$$

где dz_1 — дифференциальное сечение кулоновского возбуждения, dz_{12} — интерференция кулоновского и ядерно-резонансного возбуждений, dz_2 — ядерно-резонансное возбуждение.

Для dz_1 из (2.1) получаем

$$dz_1 = \frac{4\pi^2 M^2 v_i}{h^4 v_i} (2l_i + 1)^{-1} \sum_{M_i, M_f} \left| \int \varphi_f^+ F_{k_f} V^1 \varphi_i F_{k_i}^+ dz_e \right|^2 d\Omega. \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) служит исходной формулой для К. Альдера и др., вычисливших сечение кулоновского возбуждения [1].

Ими получено:

$$\begin{aligned} dz_1 = & \left(\frac{2\pi Z_1 e^2}{h v_i} \right)^2 \sum_{\lambda} B(E, \lambda) \frac{16\pi}{(2\lambda + 1)^2} k_i k_f \sum_{l_i l_f l_f'} (2l_i + 1) \times \\ & \times (2l_f + 1) (2l_i + 1) (2l_f + 1) i^{l_i - l_f - l_i' + l_f'} (-1)^{\lambda + l_f + l_f'} \times \\ & \times \exp i[\gamma_{l_i} + \gamma_{l_f} - \gamma_{l_i'} - \gamma_{l_f'}] \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{l_i l_f}^{-\lambda-1} M_{l_i' l_f'}^{-\lambda-1} \times \\ & \times \sum_{\tau} (2\tau + 1) \begin{Bmatrix} l_i & l_f & l \\ l_f & l_f & \lambda \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_i & l_f & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_f & l_f & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_{\tau}(\cos \theta) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $B(E, \lambda)$ — приведенная вероятность перехода

$$B(E, \lambda) = (2l_i + 1)^{-1} |\langle l_i | \lambda | l_f \rangle|^2. \quad (2.5)$$

$M_{l_i l_f}^{-\lambda-1}$ — радиальный матричный элемент от $r^{-\lambda-1}$.

Для вычисления dz_{12} и dz_2 учтем, что [2]

$$\begin{aligned} H_{f m_f}^{rM} = & \sum_{j \mu_j} (-1)^{l-s+\mu_j} (2j+1)^{\nu_j} \begin{pmatrix} l & s & j \\ m & \mu & -\mu_j \end{pmatrix} (-1)^{l-t+M} \times \\ & \times (2J+1)^{\nu_j} \begin{pmatrix} j & l & J \\ \mu_j & M_j & -M \end{pmatrix} U_{j l}^{\nu_j}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где величины $U_{j l}^{\nu_j}$ действительны [2.3], и

$$\int u_{\mu_j}^+ \varphi_f^+ F_{k_f} V^1 \varphi_i F_{k_i}^+ u_{\mu_j} dz_e = (4\pi)^2 Z_1 e^2 \delta_{\mu_j \mu_i} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{2\lambda+1} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (-1)^{I_i - M_i} \begin{pmatrix} I_i & \lambda & I_f \\ -M_i & \mu & M_f \end{pmatrix} \langle I_i \| \lambda \| I_f \rangle \sum_{l_i l_f m_f} i^{I_i - I_f} (-1)^{\mu} \times \\ & \times \exp i[\tau_{l_i} + \tau_{l_f}] (2l_i + 1) [(2l_f + 1) (2\lambda + 1)]^{1/2} \times \\ & \times \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & -m_f & \mu \end{pmatrix} Y_{l_f m_f}(\mathbf{k}_f) M_{l_i}^{-\lambda-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Матричные элементы $M_{l_i}^{-\lambda-1}$ и $\langle I_i \| \lambda \| I_f \rangle$ также действительны [1,4].

Принимая во внимание еще, что

$$\begin{aligned} Y_{l m}(\mathbf{k}_f) Y_{l' m'}(\mathbf{k}_f) &= \sum_{l'' m''} \left[\frac{(2l+1)(2l'+1)(2l''+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \times \\ & \times \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \end{pmatrix} Y_{l'' m''}(\mathbf{k}_f) \end{aligned} \quad (2.8)$$

и суммируя по магнитным квантовым числам, из (2.1) получим:

$$\begin{aligned} dz_{12} &= \frac{16\pi^4 v_f^2 Z_i e}{\hbar v_f^2 (2l_i + 1) (2s + 1)} \sum (-1)^{s - I_i - J + l} \times \\ & \times [(2l_i + 1) (2l_f + 1) (2\lambda + 1)^{-1}]^{1/2} (2l_i + 1) (2l_f + 1) \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \langle I_i \| \lambda \| I_f \rangle M_{l_i}^{-\lambda-1} [(2j_i + 1) (2j_f + 1)]^{1/2} (2J + 1) U_{ll_i j_i}^{rl} U_{jll_f j_f}^{rl} \times \\ & \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{i^{I_i - I_f - l_i + l_f} \exp i[\tau_{l_i} + \tau_{l_f} - \tau_{l_i} - \tau_{l_f}]}{E_i + W_{N_i} - W_{rJ} - i \frac{\gamma_{rJ}}{2}} \begin{Bmatrix} j_i & j_f & \lambda \\ I_f & l_i & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_f & l_i & \lambda \\ j_i & j_f & s \end{Bmatrix} \right\} \times \\ & \times \sum_l (2l + 1) \begin{Bmatrix} l_i & l_i & l \\ l_f & l_f & \lambda \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_i & l_i & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_f & l_f & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_l(\cos \vartheta) d\vartheta, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} dz_2 &= \frac{i_i^2}{4 (2l_i + 1) (2s + 1)} \sum (-1)^{l_i - I_f + j_i + j_i' + j_f - j_f'} \times \\ & \times [(2l_i + 1) (2l_i' + 1) (2l_f + 1) (2l_f' + 1)]^{1/2} \times \end{aligned}$$

$$\times i^{I_i - I_f - l_i + l_i'} \exp i[\tau_{l_i} + \tau_{l_i'} - \tau_{l_i} - \tau_{l_i'}] [(2j_i + 1) (2j_i' + 1) (2j_f + 1) \times$$

¹ Парциальная ширина γ_{rJ}^f согласно (II 34) и (2.6) связана с величинами $U_{jll_f}^{rJ}$ следующим образом

$$\gamma_{rJ}^f = 2\pi \sum_{lmM_{J2}} |H_{fllm}^{rJ}|^2 = 2\pi \sum_{lJ} (U_{jll_f}^{rJ})^2.$$

$$\times (2j'_j + 1)^{-1} (2J + 1) (2J' + 1) S_{l_i j_i l_f j_f} S_{l'_i j'_i l'_f j'_f} \sum_l (2l + 1) \times \\ \times \left\{ \begin{matrix} j_i j_j l \\ l_f l_f s \end{matrix} \middle| \begin{matrix} J J' l \\ J J' l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_i j_i l \\ j_i j_i s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l_i l_i l \\ j_i j_i s \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} l_i l_i l \\ 0 0 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_f l_f l \\ 0 0 0 \end{pmatrix} P_l(\cos \vartheta) d\Omega, \quad (2.10)$$

Суммирование в выражениях (2.9) и (2.10) производится по всевозможным значениям орбитальных l и полных j -моментов частицы, спина промежуточного ядра J . По мультипольности переходов l -суммирование производится от 1 до ∞ .

В (2.10) через $S_{l_i j_i l_f j_f}$ обозначено

$$S_{l_i j_i l_f j_f} = \sum_l \frac{U_{l_i j_i}^{l l} U_{l_f j_f}^{l l}}{E_i + W_{N_i} - W_{eJ} + i \frac{\gamma_{iJ}}{2}}$$

§ 3. Полное сечение

Проинтегрировав по углу рассеяния, из (2.2), (2.3), (2.4), (2.9) и (2.10) получим

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_{12} + \sigma_2, \quad (3.1)$$

где σ_1 —сечение кулоновского возбуждения [1]:

$$\sigma_1 = \left(\frac{2\pi Z_1 e^2}{\hbar v_1} \right)^2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} B(E, \lambda) \frac{64\pi^2}{(2\lambda+1)^2} k_i k_f \sum_{l_i l_f} (2l_i + 1) (2l_f + 1) \times \\ \times \left(\begin{matrix} l_i l_f \lambda \\ 0 0 0 \end{matrix} \right)^2 |M_{l_i l_f}^{\lambda-1}|^2, \quad (3.2)$$

σ_{12} —интерференционный член:

$$\sigma_{12} = \frac{64\pi^2 v_1^2 Z_1 e^2}{\hbar v_1^2 (2l_i + 1)(2s + 1)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{l_i l_f j_i j_f} \langle l_i || \lambda || l_f \rangle (-1)^{s-l_i-J+j} \times \\ \times [(2l_i + 1)(2l_f + 1)(2l + 1)^{-1}]^2 \begin{pmatrix} l_i l_f \lambda \\ 0 0 0 \end{pmatrix} M_{l_i l_f}^{\lambda-1} [(2j_i + 1)(2j_f + 1)]^2 \times \\ \times (2J + 1) \left\{ \begin{matrix} j_i j_f \lambda \\ l_f l_i J \end{matrix} \middle| \begin{matrix} l_i l_i \lambda \\ j_i j_i s \end{matrix} \right\} U_{l_i j_i}^{l l} U_{l_f j_f}^{l l} \frac{E_i + W_{N_i} - W_{eJ}}{(E_i + W_{N_i} - W_{eJ})^2 + \frac{\gamma_{iJ}^2}{4}}, \quad (3.3)$$

σ_2 —сечение ядерно-резонансного возбуждения или, что то же самое, сечение неупругого рассеяния:

$$\sigma_2 = \frac{\pi_i^2}{(2l_i + 1)(2s + 1)} \sum_{l_i j_i l_f j_f} (2J + 1) \left| \sum_l \frac{U_{l_i j_i}^{l l} U_{l_f j_f}^{l l}}{E_i + W_{N_i} - W_{eJ} + i \frac{\gamma_{iJ}}{2}} \right|^2. \quad (3.4)$$

Для энергий падающей частицы, близких к уровню составного ядра $W_{IJ} - W_{N_i}$, ε_2 принимает вид:

$$\varepsilon_2 = \frac{\lambda_i^2}{4\pi} \frac{2J+1}{(2I_i+1)(2s+1)} \frac{\gamma_i^{IJ} \gamma_f^{IJ}}{[E_i - (W_{IJ} - W_{N_i})]^2 + \frac{\gamma_f^2}{4}} \quad (3.4a)$$

§ 4. Обсуждение и сравнение с экспериментом

Таким образом, зависимость дифференциального сечения возбуждения от угла рассеяния как в чисто кулоновском (2.4), так и в интерференционном (2.9) и ядерно-резонансном (2.10) членах дается полиномами Лежандра.

В полном сечении интерференционный член ε_{12} , согласно (3.3), равен нулю для медленных частиц, когда существенна только S -волна⁴. Если существенна также P -волна, то $\varepsilon_{12} = 0$ для возбуждений с $\kappa > 2$. Однако, $|\varepsilon_{12}| \ll \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ также для квадрупольного и дипольного возбуждений, что, в частности, имеет место в рассмотренном ниже случае (фиг. 1). Малость ε_{12} обусловлена тем, что при $\lambda = 2$ в (3.3) входит фактически только радиальный матричный элемент M_{11}^{-3} (при $\kappa = 1$ два элемента M_{01}^{-2} и M_{10}^{-2}), в то время как в (3.2) входят $M_{l_i l_f}^{-3}$ для которых l_i, l_f принимают значения: $0 < l_i, l_f < \infty$. Если частицы медленные, $M_{11} \ll \sum_{l_i l_f} M_{l_i l_f}^{-3}$.

Кроме того, в (3.3) отсутствует S -волна, дающая существенный вклад в (3.4).

Для указанных выше случаев имеем $\varepsilon \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2$: на кулоновскую кривую (3.2) налагается пик резонансного неупругого рассеивания (3.4a). По отклонению ε от суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ можно получить сведения о матричных элементах $U_{l_i l_f}^{IJ}$ и $U_{l_f l_i}^{IJ}$, а также определить знак приведенного матричного элемента $\langle l_i || i, l_f \rangle$.

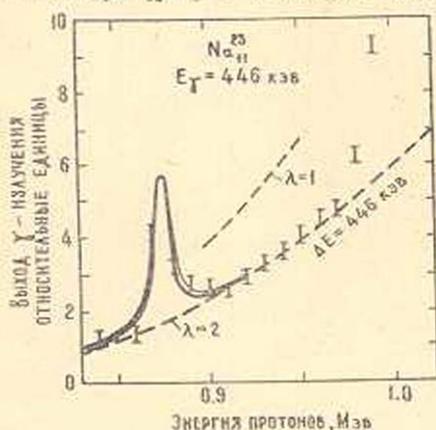
Это отклонение, выражающееся в искажении кривой (3.4a), становится существенным для высоких уровней промежуточного ядра, т. е. при больших значениях $W_{IJ} - W_{N_i}$ (и следовательно, больших E_i), когда все больше членов, дающих важный вклад в (3.2) и (3.4a) дают вклад в ε_{12} одновременно.

Однако в самом резонансе, т. е. при $E_i = W_{IJ} - W_{N_i}$, ε_{12} согласно (3.3) всегда обращается в нуль.

⁴ Для заряженных частиц существенны моменты $l \leq l_c$, где $l_c \equiv l_c \left(\frac{E_i}{B}, \frac{2\pi R}{v_B} \right)$.

B — высота кулоновского барьера, $\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2MB}}$, R — радиус ядра [3.5].

В заключение рассмотрим случай, приведенный на фиг. 1. Из экспериментов по исследованию других каналов распада промежуточного ядра $^{12}\text{Mg}^{24}$, каковыми являются упругое рассеяние протонов на



Фиг. 1.

$^{11}\text{Na}^{23}$ [6] и угловое распределение γ -лучей от реакции $^{11}\text{Na}^{23}(\rho, \gamma)^{12}\text{Mg}^{24}$ [7], известно, что при энергии протонов в лабораторной системе $E_p = 0,877 \text{ Мэв}$, образуется промежуточное ядро $^{12}\text{Mg}^{24}$ в возбужденном состоянии со спином $J=1$ и полной шириной $\Gamma = 8 \pm 2 \text{ КэВ}$. Кроме того, приведенный матричный элемент $\langle I_i || \lambda || I_f \rangle$ с точностью до знака известен из эксперимента [1] по возбуждению $^{11}\text{Na}^{23}$ α -частицами: $\langle I_i || \lambda || I_f \rangle = \pm 0,228 \text{ е барн}$. Подставляя эти данные в формулу (3.3), получим:

$$\sigma_{12} = \pm 2,264 \cdot 10^{-3} (U_{11^{1/2}}^1 U_{11^{1/2}}^1 - 0,9 U_{11^{1/2}}^1 U_{11^{1/2}}^1 + 0,513 [U_{10^{1/2}}^1 U_{12^{1/2}}^1 - 1,07 U_{10^{1/2}}^1 U_{12^{1/2}}^1]) \frac{\frac{23}{24} \frac{E_p - 877}{5}}{\left(\frac{23}{24} \frac{E_p - 877}{5}\right)^2 + 1} \text{ барн},$$

где E_p — энергия протона в лабораторной системе, выраженная в КэВ . Теперь рассмотрим выражение в фигурных скобках. Для нашего случая $\frac{E}{B} = 0,2263$, $\frac{2\pi R}{\lambda_B} = 1,77$. Оценивая [3] матричные элементы U при разных I , находим:

1. $|(U_i || \lambda || U_f)| \ll \frac{1}{2\pi} (\Gamma_i^1 \Gamma_f^1)^{1/2}$ при одинаковом знаке $U_{11^{1/2}}^1$ и $U_{12^{1/2}}^1$.
2. $|(U_i || \lambda || U_f)| \approx \frac{1}{2\pi} (\Gamma_i^1 \Gamma_f^1)^{1/2}$ при разных знаках $U_{11^{1/2}}^1$ и $U_{12^{1/2}}^1$.

Учитывая также (3.4а), для суммы $\sigma_2 + \sigma_{12}$ получаем:

$$\sigma_2 + \sigma_{12} = 11,94 \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{\pi^2 \Gamma_i^2} \frac{1 + \varepsilon 1,9 \cdot 10^{-4} \frac{\pi \Gamma_r}{(\Gamma_i \Gamma_f)^{1/2}} \frac{E_p - 877}{5,22}}{\left(\frac{E_p - 877}{5,22}\right)^2 + 1} \text{ барн},$$

где ε равен нулю для случая 1, и равен ± 1 для случая 2 при $\langle I_i || \lambda || I_f \rangle = \pm 0,228 \text{ е барн}$.

Построив по методу наименьших квадратов соответствующие кривые, находим, что кривая при значении $\varepsilon = -1$, изображенная жир-

ной линией на фиг. 1, несколько лучше согласуется с экспериментальными данными Теммера и Гейденбурга, чем две другие кривые, близкие к ней. Одна из них, соответствующая значению $\epsilon=0$ изображена тонкой сплошной линией. Таким образом, формулы (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) согласуются с экспериментальными данными.

Для $\frac{\Gamma_i \Gamma_f}{\Gamma_i^2}$ получается значение $1,78 \cdot 10^{-5}$, которое находится в согласии с результатом $\left(\frac{\Gamma_f}{\Gamma_i} \gg 0,9\right)$ эксперимента [6] Бауманна и др.

Кроме того, малый вклад τ_{12} говорит в пользу того, что величины $L_{i,1}^1$ и $L_{i,2}^1$ имеют разные знаки и что $\langle I_i | \lambda | I_i \rangle = +0,228$ е барн.

Автор пользуется случаем принести благодарность К. А. Тер-Мартirosяну, М. Л. Тер-Микаеляну, А. Ц. Амагуни и В. А. Шахбазяну за обсуждение результатов.

П р и л о ж е н и е

Дисперсионная формула для неупругого рассеяния в кулоновском поле

Для ядерных реакций дисперсионные формулы можно вывести исходя из соображений аналитичности, унитарности матрицы рассеяния и ее инвариантности относительно обращения времени⁵.

Чтобы вывести исходную формулу для сечения возбуждения ядра, учитывающую наряду с кулоновскими силами вклад ядерных сил, приводящих к образованию и распаду промежуточного ядра, мы будем пользоваться методом Бете. Этот метод, хотя и является вполне строгим, однако, как показано Пайерлсом и Капуром [9], в представляющем для нас интерес случае, когда расстояние между уровнями промежуточного ядра превышает их ширину, дает правильные результаты. Помимо этого, метод Бете нагляден.

Итак, рассмотрим процесс возбуждения ядра:

$$N_i + P_i \rightarrow N_f + P_f, \quad (\text{П } 1)$$

где $N_{i,f}$ обозначает ядро, $P_{i,f}$ — частицу в начальном и конечном состоянии соответственно. Введем волновую функцию всей системы:

$$\Psi = \varphi_i \psi_i + \varphi_f \psi_f + \epsilon \varphi_c. \quad (\text{П } 2)$$

Здесь $\varphi_i, \varphi_f, \varphi_c$ — волновые функции начального, конечного и промежуточного ядра; ψ_i, ψ_f — волновые функции, описывающие движение частицы относительно ядра до и после возбуждения.

Ψ удовлетворяет уравнению Шредингера:

⁵ См., например, работу В. И. Сердобольского [8].

$$H\Psi = W\Psi, \quad (\text{П } 3)$$

где

$$H = H^0 + V, \quad V = V^1 + V^2, \quad (\text{П } 4)$$

$$H^0 = H_N + T + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad (\text{П } 4a)$$

$$V^1 = Z_1 e \int \frac{\rho_n d\tau_n}{|r - r_n|} - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}; \quad (\text{П } 4b)$$

V^2 —некоторое сильное взаимодействие, приводящее к образованию и распаду промежуточного ядра.

H_N —оператор внутренней энергии ядра с собственным значением W_N ,

T —оператор кинетической энергии движения частицы относительно ядра,

ρ_n —оператор плотности заряда ядра.

Выделим из полной энергии W внутреннюю энергию ядра W_N , положив $W = W_N + E$, и воспользуемся следствиями уравнения (П 3):

$$\int \varphi_c^* (H - W) \Psi d\tau_c = 0, \quad (\text{П } 3a)$$

$$\int \varphi_f^* (H - W) \Psi d\tau_{N_f} = 0, \quad (\text{П } 3b)$$

$$\int \varphi_i^* (H - W) \Psi d\tau_{N_i} = 0. \quad (\text{П } 3в)$$

В (П 3a) интегрирование производится по всем координатам частицы и ядра; а в (П 3б), (П 3в)—только по внутренним координатам ядра.

Учитывая (П 2), (П 4), а также уравнения, которым удовлетворяют нормированные функции $\varphi_c, \varphi_f, \varphi_i$:

$$H_{N_i} \varphi_i = W_{N_i} \varphi_i, \quad H_{N_f} \varphi_f = W_{N_f} \varphi_f, \quad H \varphi_c = W_c \varphi_c, \quad (\text{П } 5)$$

из (П 3a), (П 3б), (П 3в) получаем:

$$c(W - W_c) = \int \varphi_c^* (V_1 - L_1) \varphi_i \psi_i d\tau_c + \int \varphi_c^* (V_f - L_f) \varphi_f \psi_f d\tau_c, \quad (\text{П } 6)$$

$$L \psi_f = c \int \varphi_f^* (V_f - L_f) \varphi_c d\tau_{N_f} + \int |\varphi_f|^2 V_f \psi_f d\tau_{N_f} + \int \varphi_f^* (V_f - L_f) \varphi_i \psi_i d\tau_{N_f}, \quad (\text{П } 7)$$

и аналогичное уравнение для ψ_i .

Здесь L есть оператор:

$$L = E - T - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = E + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \Delta - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (\text{П } 8)$$

Индекс i при L, V означает, что эти операторы относятся к частице P_i и ядру N_i .

M — приведенная масса ядра и частицы.

Произведем разделение переменных, положив

$$\psi_f = \sum_{lm} \frac{\psi_{flm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r}, \quad (\text{П } 9)$$

где ψ_{flm} , согласно (П 7), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \frac{d^2 \psi_{flm}}{dr^2} + \left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} \right] \psi_{flm} = A. \quad (\text{П } 10)$$

Здесь через A обозначена правая часть (П 7), умноженная на $r Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и проинтегрированная по углам.

Так как энергия взаимодействия V с расстоянием спадает достаточно быстро (как $\frac{1}{r^2}$ или быстрее), то для больших r решение (П 10) будет совпадать с одним из частных решений уравнения (П 10) без правой части [10,11], т. е.

$$\psi_{flm} = \alpha_{flm} f_{fl}(r) + \beta_{flm} g_{fl}(r), \quad (\text{П } 11)$$

где f и g — решения однородного уравнения

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} \frac{d^2 f, g}{dr^2} + \left[E - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{8\pi^2 M r^2} \right] f, g = 0. \quad (\text{П } 12)$$

Асимптотически, для больших r , мы будем иметь:

$$f = \sin \left(kr - \alpha \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l \right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (\text{П } 13)$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}, \quad (\text{П } 13a)$$

$$k = \frac{2\pi M v}{\hbar} = \frac{2\pi (2ME)^{1/2}}{\hbar}, \quad (\text{П } 13b)$$

$$\eta_l = \arg \Gamma(l+1+i\alpha). \quad (\text{П } 13b')$$

В качестве g выберем решение (П 12), линейно независимое с f :

$$g = \cos \left(kr - \alpha \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l \right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (\text{П } 14)$$

Как следует из (П 12), (П 13), (П 14), f и g удовлетворяют соотношению

$$g \frac{df}{dr} - f \frac{dg}{dr} = \text{const} = k. \quad (\text{П } 15)$$

Аналогично из (П 10) и (П 12) имеем:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(f \frac{d\psi}{dr} - \psi \frac{df}{dr} \right) = \frac{8\pi^2 M}{h^2} \int_0^{\infty} f A dr. \quad (\text{П } 16)$$

Воспользовавшись (П 11) и (П 15) получаем, что левая часть (П 16) равна $-\xi_{lm} k_f$.

Следовательно,

$$\xi_{lm} = -\frac{8\pi^2 M}{h^2 k_f} \int_0^{\infty} f_{lm} A dr. \quad (\text{П } 17)$$

Введем теперь функцию

$$F_{lm} = \frac{f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r}. \quad (\text{П } 18)$$

Согласно (П 8) и (П 12) удовлетворяется уравнение

$$L_f F_{lm} = 0. \quad (\text{П } 19)$$

В силу (П 19) и самосопряженности оператора L_f , члены обуславливаемые им в (П 17), отпадут и мы получим:

$$\xi_{lm} = -\frac{4\pi}{h^2 v_f} \int \varphi_f^* F_{lm}^* V (e\varphi_f + \varphi_f \psi_f + \varphi_f \psi_f^*) d\tau. \quad (\text{П } 20)$$

Так как мы интересуемся эффектом возбуждения ядра, то ψ_f есть волновая функция неупругого рассеяния частицы и, следовательно, асимптотически она должна себя вести как расходящаяся волна. Отсюда следует, что в (П 11) $\alpha_{lm} = i\xi_{lm}$ и

$$\psi_{lm} = \xi_{lm} (g + if), \quad r \rightarrow \infty. \quad (\text{П } 21)$$

Если нормировать падающую искаженную кулоновским полем плоскую волну к единице потока, то сечение согласно (П 19), (П 13), (П 14) будет равно:

$$d\sigma = v_f \left| \sum_{lm} \xi_{lm} \exp i \left[r - \frac{l\pi}{2} + \eta_l \right] Y_{lm}(k_f) \right|^2 d\Omega. \quad (\text{П } 22)$$

Здесь через k_f обозначено направление движения рассеянной частицы, совпадающее при $r \rightarrow \infty$ с направлением радиуса-вектора.

Подставляя (П 20) в (П 22), получим

$$d\sigma = \frac{4\pi^2 M^2 v_f}{h^2 v_l} \left| \int \varphi_f^* F_{k_f}^* V v_l^* W d\tau \right|^2 d\Omega. \quad (\text{П } 23)$$

F_{k_f} есть волновая функция частицы в кулоновском поле с энергией $\frac{h^2 k_f^2}{8\pi^2 M}$, являющаяся на бесконечности суперпозицией искаженной плоской и сходящейся волн [1,11].

$$F_{k_f}^- = \sum_{lm} 4\pi^{1/2} l \exp[-i\gamma_l] Y_{lm}^*(\mathbf{k}_f) Y_{lm}(\theta, \varphi) (k_f r)^{-1} f_{ll}(r) = \\ = \exp\left[-\frac{\pi\alpha_f}{2}\right] \Gamma(1-i\alpha_f) \exp[i\mathbf{k}_f \mathbf{r}] {}_1F_1(i\alpha_f; 1; -i(k_f r + \mathbf{k}_f \mathbf{r})). \quad (\text{П } 24)$$

Выражения (П 23) для сечения и следовало бы ожидать. Действительно, представляя возмущенную волновую функцию в виде

$$\Psi = S v_f^{-1/2} F_{k_f}^+ \varphi_f, \quad (\text{П } 23a)$$

где S — матрица рассеяния:

$$S = \exp\left[-i \int_{-\infty}^{\infty} V(r) dt\right], \quad (\text{П } 23b)$$

а $v_f^{-1/2} F_{k_f}^+$ — невозмущенная (см. ниже (П 26), (П 28)) функция частицы, и учитывая существование эквивалентных графиков, для интеграла в (П 23) будем иметь

$$\int \varphi_f^* F_{k_f}^* V v_f^{1/2} \Psi d\tau_c = i \int \varphi_f^* F_{k_f}^* (S-1) \varphi_f F_{k_f}^+ d\tau_c, \quad (\text{П } 23в)$$

т. е. амплитуду рассеяния для рассматриваемого процесса.

Теперь учтем, что ядерными силами можно пренебречь по сравнению с кулоновскими везде, кроме резонансов, связанных с образованием и распадом промежуточного ядра. Тогда (П 23) можно переписать в виде

$$d\sigma = \frac{4\pi^2 M^2 v_f}{h^4 v_l} \left| \int \varphi_f^* F_{k_f}^* (V^1 \varphi_l \psi_l + V^1 \varphi_f \psi_f + V_c \varphi_l) v_l^{1/2} d\tau_c \right|^2 d\Omega. \quad (\text{П } 25)$$

В выражении (П 25) ψ_l — возмущенная функция частицы в начальном состоянии. Для нее нетрудно получить соответствующее выражение [3]

$$\psi_l = \sum_l A_l F_{ll0} + \sum_{lm} \beta_{llm} (G_{llm} + iF_{llm}), \quad (\text{П } 26)$$

где

$$A_l = \frac{(4\pi)^{1/2} (2l+1)^{1/2} l!}{v_l^{1/2} k_l} \exp[i\gamma_l], \quad (\text{П } 26a)$$

$$\beta_{llm} = -\frac{4\pi}{h v_l} \int \varphi_l^* F_{llm}^* (V_c \varphi_c + V^1 \varphi_l \psi_l + V^1 \varphi_f \psi_f) d\tau_c, \quad (\text{П } 26b)$$

$$G_{llm} = \frac{\gamma_{ll}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r}. \quad (\text{П } 26в)$$

$\gamma_{ll}(r)$ входит в решение уравнения (П 10):

$$\psi_{llm}(r) = a_{llm} f_{ll}(r) + \beta_{llm} \gamma_{ll}(r) \quad (\text{П } 26г)$$

и асимптотически переходит в $g_{ll}(r)$.

Аналогично из (П 20), (П 21) имеем:

$$\psi_j = \sum_{lm} \varphi_{jlm} (G_{jlm} + iF_{jlm}). \quad (\text{П } 27)$$

Так как V^1 — электромагнитное взаимодействие, мы можем в отношении к нему применить теорию возмущений и ограничиться первым неисчезающим приближением [1].

Тогда из (П 26), (П 27) следует, что вторым членом в подынтегральном выражении (П 25) мы можем пренебречь, а в первом члене (П 25) — для ψ_i ограничиться первым слагаемым в (П 26), который с учетом (П 26а) и (П 18) сводится к

$$\sum_l A_l F_{l0} = v_l^{-1/2} F_{k_l}, \quad (\text{П } 28)$$

где $F_{k_l}^+$ — волновая функция частицы с энергией $\frac{\hbar^2 k_l^2}{8\pi^2 M}$, которая на больших расстояниях является суперпозицией искаженной плоской и расходящейся волн:

$$\begin{aligned} F_{k_l}^+ &= \sum_{lm} 4\pi i^l \exp[i\eta_l] Y_{lm}^*(\mathbf{0}) Y_{lm}(\theta, \varphi) (k_l r)^{-1} f_{lt}(r) = \\ &= \exp\left[-\frac{\pi\alpha_l}{2}\right] \Gamma(1+i\alpha_l) \exp[i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}] F_1(-i\alpha_l; 1; i(k_l r - \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r})). \end{aligned} \quad (\text{П } 29)$$

Подставляя (П 26) и (П 27) в (П 6), мы получим значение коэффициента c при волновой функции промежуточного ядра, которое благодаря малости V^1 в первом приближении сводится к известному выражению [3]:

$$c = \sum_l \frac{A_l V_{l0}^c}{W - W_c + i \frac{\gamma_c}{2}}, \quad (\text{П } 30)$$

где A_l дается (П 26а),

$$V_{l0}^c = \int \varphi_c^* V_l \varphi_l F_{l0} d\tau_c, \quad (\text{П } 31)$$

$$\gamma_c = \frac{8\pi}{\hbar v_l} \sum_{lm} |V_{l0}^c|^2 + \frac{8\pi}{\hbar v_l} \sum_{lm} |V_{l0}^c|^2. \quad (\text{П } 32)$$

Пусть теперь начальное и конечное ядра имеют спин I_i и I_f , а частица — спин s . Введем спиновую функцию частицы u_μ .

Если, кроме того, перейти от функции f_l частицы, имеющей асимптотический вид (П 13), к функции φ_l , нормированной на энергию, что приведет к переходу от матричных элементов $V_{i_l m_l}^c$ к матричным элементам $H_{i_l m_l s \mu}^{cM}$:

$$V_{i l_i m_i}^c \rightarrow \left(\frac{\hbar v_i}{4} \right)^{1/2} H_{i l_i m_i s_{i l_i}}^{rM}, \quad (\text{П } 33)$$

то (П 32) запишется в виде:

$$\gamma_c = 2\pi \sum_{l_i m_i M_i s_{i l_i}} |H_{i l_i m_i s_{i l_i}}^{rM}|^2 + 2\pi \sum_{l_j m_j M_j s_{j l_j}} |H_{j l_j m_j s_{j l_j}}^{rM}|^2. \quad (\text{П } 34)$$

Усредняя по начальным, суммируя по конечным проекциям спинов частицы и ядра и, введя суммирование по r , чему соответствует учитьвание возможности нескольких уровней промежуточного ядра [3], из [П 25) придем к формуле (2.1).

Физический Институт
Г. Ереван

Поступила 18 IX 1962

Վ. Հ. ՋԵՐԱՇՅԱՆԻ

ԳԻՍՄԵՐՍԻՈՆ ՖՈՐՄՈՒԼԱՆ ՄԻՋՈՒԿՆԵՐԻ ԳՐԳՈՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Եթև միջուկի վրա բնկնող մասնիկի էներգիան փոքր ինչ պակաս է կուլոնյան բարիերի բարձրությունից, ապա էքսպերիմենտից հետևում է, որ միջուկի զրգոման կտրվածքի մեջ միջուկային ուժերը ներդրում են տալիս միայն սեղոնանաներում, որոնք պայմանավորված են միջանկյալ միջուկի առաջացմամբ:

Գրան համապատասխան, արհամարհելով միջուկային ուժերը կուլոնյան ուժերի նկատմամբ ամենուրեք, բացի սեղոնանաներից, և հաշվի առնելով նրանց սեղոնանաների տիրույթում, հաշվվում են զրգոման զիֆերենցիալ և լրիվ կտրվածքները: Այդ նպատակով ստացված է կուլոնյան դաշտում լիցքավորված մասնիկների ոչ առաձգական ջրումը նկարագրող դիսպերսիոն ֆորմուլան (2.1):

Լրիվ կտրվածքը բաղկացած է կուլոնյան, միջուկային-սեղոնանային և ինտերֆերենցիոն անդամներից:

Կուլոնյան անդամը (3.2) համընկնում է կուլոնյան զրգոման կտրվածքի հայանի [1] արտահայտության հետ: Միջուկային սեղոնանային (3.4) անդամը ոչ առաձգական միջուկային-սեղոնանային ջրման կտրվածքն է:

Ինտերֆերենցիոն անդամի (3.3) ներդրումը էական է միջանկյալ միջուկի համեմատաբար բարձր մակարդակների համար և փոքր է դառնում ցածր էներգիաների դեպքում, երբ կարևոր են օրբիտալ մոմենտի միայն փոքր արևերները:

Ստացված արդյունքները համաձայնվում են էքսպերիմենտալ տվյալների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сб. статей. Деформация атомных ядер. ИЛ, М., 1958.
2. *Bethe H. A. and Placzek G.* Resonance effects in nuclear processes. *Phys. Rev.* **45**, 1937.
3. *Бете Г. А.* Физика ядра, т. II. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
4. *Зигбан К.* Бета- и гамма-спектроскопия. ИЛ, М., 1959.
5. *Ахиезер А. и Померанчук И.* Некоторые вопросы теории ядра. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
6. *Baumann N. P., Prosser F. W. Jr., Read W. G. and Krone R. W.* Elastic scattering of protons from Na^{23} . *Phys. Rev.*, **104**, 376, 1956.
7. *Prosser F. W. Jr., Baumann N. P., Brice D. K., Read W. G. and Krone R. W.* Angular distributions of the gamma rays from the reaction Na^{23} (p, γ) Mg^{23} . *Phys. Rev.*, **104**, 369, 1956.
8. *Serdobitsky V. J.* Dispersion formulas in the theory of nuclear reactions. *Nucl. Phys.* **21**, 245, 1960.
9. *Kapur P. I. and Peierls R.* The dispersion formula for nuclear reactions. *Proc. Roy. Soc.*, **A166**, 277, 1938.
10. *Мотт Н. и Мессе Г.* Теория атомных столкновений. ИЛ, М., 1951.
11. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.