

Э. Д. Газазян, Э. М. Лазнев

О черенковском излучении в волноводе

§ 1. Введение

Черенковское излучение в волноводе исследовалось как советскими, так и зарубежными авторами (см. литературу [4]). Было показано, что его частотный спектр в этом случае дискретный и зависит от параметров волновода, а также была вычислена интенсивность излучения. В настоящей работе, на примере точечного заряда, решена задача для заряженной нити конечной длины и для периодически следующих друг за другом таких нитей. Оказывается, что в случае заряженной нити излучаются не все частоты из спектра для точечного заряда и существует корреляция между радиусом волновода и длиной нити. Оказывается также, что в случае периодически следующих друг за другом нитей может иметь место интерференция [1,3]. Для всех случаев получены выражения для интенсивностей излучения, аналогичные выражениям работы [1].

§ 2. Излучение точечного заряда, движущегося вдоль оси волновода

Пусть точечный заряд величины e движется по оси z круглого цилиндрического волновода, заполненного диэлектриком, со скоростью v . Тогда плотность заряда и ток, создаваемый этим зарядом, запишутся в виде

$$\rho = e\delta(M' - M_0)\delta(z - vt), \quad (2.1)$$

$$j_z = ev\delta_z(M' - M_0)\delta(z - vt), \quad (2.2)$$

где M' и M_0 — координаты в плоскости сечения волновода, а $\delta(M' - M_0)$ — двумерная δ -функция.

Из (2.2) легко получить выражение для Фурье-компоненты тока

$$j_{\omega z} = \frac{e}{2\pi} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta(M' - M_0). \quad (2.3)$$

Волновое же уравнение для Фурье-компоненты вектора-потенциала будет

$$\Delta A_{mz} + \frac{z\omega^2}{c^2} A_{mz} = -\frac{2e}{c} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta(M' - M_0). \quad (2.4)$$

Из-за симметрии задачи здесь положено $\vec{A} = \vec{A}(0, 0, A_z)$.

Решим (2.4), построив для него предварительно функцию Грина. Рассмотрим уравнение

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n^2 \psi_n = 0 \quad (2.5)$$

с граничным условием

$$\psi_n|_z = 0. \quad (2.6)$$

где ψ_n — ортогональные и нормированные функции, т. е.

$$\Sigma \psi_n(M) \psi_n(M') = \delta(M - M') \quad (2.7)$$

и λ_n — их собственные значения.

Физический смысл граничного условия (2.6) вполне ясен. Такое условие обеспечивает обращение в нуль тангенциальной составляющей электрического поля на поверхности волновода Σ .

Из (2.7) для функции Грина получаем соотношение

$$LG = \Sigma \psi_n(M) \psi_n(M') \quad (2.8)$$

или

$$G = \Sigma L^{-1} \psi_n(M) \psi_n(M'). \quad (2.8')$$

Решение волнового уравнения (2.4) будем искать в виде

$$A_{mz} = \psi(M) e^{-i\frac{\omega}{v}z} \quad (2.9)$$

Тогда (2.4) запишется так

$$\Delta_2 \psi(M) + \left(\frac{z\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \right) \psi(M) = -\frac{2e}{c} \delta(M' - M_0). \quad (2.10)$$

Из (2.10) для оператора L имеем

$$L = \Delta_2 + \frac{z\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2}.$$

Для того, чтобы найти обратный ему оператор L^{-1} , нужно поддействовать L на функцию $\psi_n(M)$ и воспользоваться уравнением (2.5).

Тогда

$$L^{-1} = \frac{1}{\frac{z\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} - \lambda_n^2}. \quad (2.11)$$

Подставляя полученное значение L^{-1} в (2.8'), получаем для функции Грина выражение

$$G(M - M') = -\Sigma \frac{\psi_n(M) \psi_n(M')}{\lambda_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 z^2)} \quad (2.12)$$

Построив функцию Грина (2.12), решение уравнения (2.10) можем записать в виде

$$\psi_n(M) = \frac{2e}{c} \sum \frac{\psi_n(M) \psi_n(M_0)}{k_n^2 + \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 (1 - \beta^2 \varepsilon)} \quad (2.13)$$

Окончательно, для Фурье-компонент вектора-потенциала и электрического поля будем иметь

$$A_{nz} = \frac{2e}{c} e^{-i \frac{\omega}{v} z} \sum \frac{\psi_n(M) \psi_n(M_0)}{k_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon)} \quad (2.14)$$

(Это выражение было получено ранее К. А. Барсуковым [5]).

$$E_{nz} = \frac{2ie\omega}{zv^2} (1 - \beta^2 \varepsilon) e^{-i \frac{\omega}{v} z} \sum \frac{\psi_n(M) \psi_n(M_0)}{k_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon)} \quad (2.15)$$

Для потерь энергии на единицу длины пути получаем

$$\frac{dW}{dz} = - \int_V E_z dV = - \sum \int 2ie^2 (1 - \beta^2 \varepsilon) |\psi_n(M_0)|^2 \frac{\frac{\omega}{v^2} d\omega}{\left[k_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon) \right]} \quad (2.16)$$

Так как $z \neq 0$, то подынтегральное выражение в (2.16) будет иметь полюс только при условии

$$k_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon) = 0. \quad (2.17)$$

Отсюда для частоты излучения получаем выражение

$$\omega_n = \frac{k_n v}{1 - \beta^2 \varepsilon - 1} \quad (2.18)$$

Как видно из (2.18), спектр излучения — дискретный, зависящий от k_n , являющихся собственными значениями собственных функций волновода ψ_n . В случае цилиндрического волновода k_n будут пропорциональны корням функции Бесселя.

Условие действительности частот приводит к неравенству

$$\beta^2 \varepsilon - 1 > 0. \quad (2.19)$$

Неравенство (2.19) есть условие черенковского излучения.

При устремлении радиуса волновода к бесконечности можно сделать предельный переход к свободному пространству. Совершенно ясно, что при этом получится выражение для интенсивности черенковского излучения в свободном пространстве, и спектр частот станет сплошным [2].

Представим формулу (2.16) в более наглядной форме. Легко показать, что функции $\psi_n(M)$ являются функциями Бесселя первого рода нулевого порядка, т. е.

$$\psi_n(M) = B J_0(\lambda_n r), \quad (2.20)$$

где B — нормировочный коэффициент, равный

$$B = \frac{1}{\pi R^2 J_1(\lambda_n R)}. \quad (2.21)$$

Для больших R , воспользовавшись асимптотическими представлениями для функции Бесселя, получаем следующие выражения:

$$\lambda_n = \frac{\pi \left(n + \frac{3}{4} \right)}{R}, \quad (2.22)$$

$$B = \sqrt{\frac{\lambda_n}{2R}}. \quad (2.23)$$

Подставляя (2.22) и (2.23) в (2.16), имеем

$$\frac{dW}{dl} = -\frac{ie^2}{v^2} \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega \sum_n \frac{(\beta^2 z - 1) \lambda_n}{\lambda_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 z)}. \quad (2.24)$$

Из (2.22) ясно, что

$$\Delta \lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{R}. \quad (2.25)$$

Целя и умножая (2.24) на $\frac{\pi}{R}$ и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, суммирование в (2.24) можно заменить интегрированием по λ . Окончательно имеем

$$\frac{dW}{dl} = -\frac{ie^2}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{z} (\beta^2 z - 1) d\omega \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 z)}. \quad (2.26)$$

Полученное выражение есть интенсивность черенковского излучения в свободном пространстве [2].

§ 3. Излучение заряженной нити, движущейся вдоль оси волновода

Пусть заряженная нить длины a , расположенная вдоль оси волновода z движется со скоростью v по оси волновода. Линейные плотности заряда и тока для такой нити имеют вид [1].

$$\rho = qv\delta(M - M')\delta(z - vt), \quad (3.1)$$

$$j_z = qv\delta(M - M')\delta(z - vt), \quad (3.2)$$

где

$$\delta(z) = \begin{cases} 1 & |z| < a/r, \\ 0 & |z| > a/r, \end{cases} \quad (3.3)$$

а q — заряд на единицу длины.

Фурье-компонента линейной плотности тока равна

$$j_{\omega z} = \frac{qv\delta(M - M')}{\pi\omega} e^{-i\frac{\omega}{v}z} \sin \frac{\omega a}{2v}. \quad (3.4)$$

В этом случае функцию Грина можно построить аналогично § 2, а выражения для полей получаются подобные (2.15) с заменой лишь

$$e \rightarrow \frac{2qv}{\omega} \sin \frac{\omega a}{2v}. \quad (3.5)$$

Тогда для напряженности электрического поля получим выражение

$$E_z = \int d\omega \frac{4iq \sin \frac{\omega a}{2v}}{v} (1 - \beta^2 \epsilon) e^{i(\omega t - \frac{\omega}{v}z)} \sum \frac{|\psi_n(M)|^2}{k_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \epsilon)}, \quad (3.6)$$

а для потерь энергии на единицу длины пути имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{dW}{dt} \right)_0 &= - \int \rho E_z dV = \\ &= - \int d\omega \frac{8iq^2 \sin^2 \frac{\omega a}{2v}}{\omega^2} (1 - \beta^2 \epsilon) \sum \frac{|\psi_n(M')|^2}{k_n^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \epsilon)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формула (3.7) переходит в (2.16) при условии (3.5). При

$$\frac{\omega a}{2v} \ll 1, \quad \sin \frac{\omega a}{2v} \rightarrow \frac{\omega a}{2v}$$

(3.7) совпадает с (2.16), если положить $qa = e$, т. е. нить излучает как точечный заряд величины qa . С другой стороны, если в (3.7) положить

$$\omega = \frac{2\pi n v}{a}, \quad (3.8)$$

то поля излучения обращаются в нуль и, следовательно, в случае заряженной нити в спектре (2.18) отсутствуют частоты, удовлетворяющие условию (3.8).]

§ 4. Излучение периодически следующих друг за другом заряженных нитей

Пусть нити одинаковой длины a следуют друг за другом по оси волновода z и расстояние между их центрами равно d . Тогда для Фурье-компонент поля и линейной плотности заряда для l -й нити мы получаем аналогичные (1) выражения

$$E_{\omega z}^l = f e^{-i \frac{\omega}{v} [z - i(l-1)d]} \quad (4.1)$$

$$\rho_{\omega z}^l = \varphi e^{-i \frac{\omega}{v} [z - i(l-1)d]} \quad (4.2)$$

где f и φ — не зависящие от z величины, полностью тождественные соответствующим выражениям § 3.

Предположим, что имеем m таких нитей. Тогда, для Фурье-компонент полных значений поля и линейной плотности заряда получим

$$E_{\omega z} = \sum_{l=1}^m E_{\omega z}^l = f e^{-i \frac{\omega}{v} z} \frac{1 - e^{-i m \omega d / v}}{1 - e^{-i \omega d / v}} \quad (4.3)$$

$$\rho_{\omega z} = \sum_{l=1}^m \rho_{\omega z}^l = \varphi e^{-i \frac{\omega}{v} z} \frac{1 - e^{-i m \omega d / v}}{1 - e^{-i \omega d / v}} \quad (4.4)$$

Полная потеря энергии на единицу пути, т. е. интенсивность излучения дается выражением, аналогичным [1]

$$\frac{dW}{dl} = - \int \epsilon E_z dV = - \int f \varphi \frac{\sin^2 \frac{m \omega d}{2v}}{\sin^2 \frac{\omega d}{2v}} d\omega \quad (4.5)$$

Как легко убедиться, выражение $-(f \cdot \varphi)$ есть частотное распределение интенсивности излучения одной нити (3.7). Следовательно, (4.5) можно переписать в виде

$$\frac{dW}{dl} = \int \left(\frac{dW}{dl} \right)_{\omega_0} \frac{\sin^2 \frac{m \omega d}{2v}}{\sin^2 \frac{\omega d}{2v}} d\omega \quad (4.6)$$

Здесь на спектр частот налагаются определенные условия. При $\omega = \frac{2\pi n v}{d}$ мы будем иметь максимальную интенсивность излучения, если эта частота будет совместима с выражением (2.18).

Окончательно приходим к заключению: если

$$\epsilon_k = \frac{\lambda_0 v}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \begin{cases} \frac{2\pi n v}{a}, & \text{то излучение на этой частоте отсутствует} \\ \frac{2\pi n v}{d}, & \text{то излучение на этой частоте максимальное.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Авторы признательны М. Л. Тер-Микаеляну и В. М. Арутюняну за обсуждение работы.

Физический ин-т ГКАЭ

Поступила 30 X 1962

Է. Դ. Գազարյան, Է. Մ. Լազրեյվ

ՋԵՐԵՆԿՈՎՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՅՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ԱԼԻԲԱՏԱՐԻ ՄԵԶ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է այն դեպքը, երբ շերենկովյան ճառագայթումը տեղի է ունենում զիջելի արկով լցված ալիքատարի մեջ: Ցույց է տրված, որ ալիքատարում հաճախականությունների ճառագայթման սպեկտրը զնային է և կախված է ալիքատարի պարամետրերից: Դիտարկված են կետային լիցքի վերջավոր երկարություն ունեցող լիցքավորված թելի և պարբերաբար իրար հաջորդող ալյուրի թելերի դեպքերը: Վերջին դեպքի համար ստացված է լուսնի ֆերենցիոն բանաձև: Բնութագրվում են ճառագայթման համար ստացված բանաձևերը համանման են անցումային ճառագայթման համար [1]-ի մեջ ստացված արտահայտություններին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амауни А. Ц. Переходное излучение периодически следующих друг за другом ступеней заряженных частиц. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, 1, 1962.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
3. Гинзбург В. Л. Об излучении микрорадиоволн и их поглощении в воздухе. Известия АН СССР, серия физ., **2**, 165, 1947.
4. Болотовский Б. М. Теория эффекта Вавилова-Черенкова. УФН, **75**, вып. 2, октябрь, 1961.
5. Барсуков К. А. Переходное излучение в волноводе. ЖТФ, **30**, 1337, 1960.