

К. С. Чобанян, П. О. Галфаян

Об одной задаче теории упругости для составного прямоугольника

В статье рассматривается плоское напряженное состояние двух прямоугольных слоев, соединенных между собой по сторонам $y = 0$, $-l < x < l$ (фиг. 1). На сторонах $y = h_1$ и $y = -h_2$ даны симметрично распределенные относительно оси y нормальные и касательные напряжения. На сторонах же $x = \pm l$ даны нормальные напряжения и перемещения по направлению оси y , симметричные относительно этой оси. Касательные напряжения между слоями пренебрегаются [1]. Материалы слоев имеют различные модули упругости и одинаковые коэффициенты Пуассона.

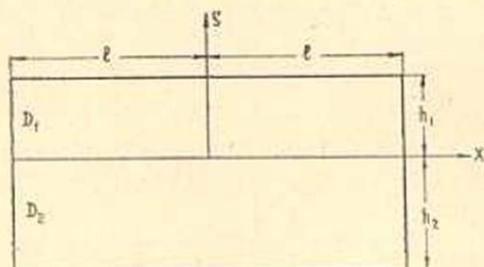
Аналогичная задача для однородного прямоугольника рассмотрена в работе [2]. В работах [3] и [4] рассмотрены другие задачи напряженного состояния составного прямоугольника.

Функции напряжений Эри для рассматриваемых прямоугольных слоев определяются в виде рядов Фурье по тригонометрическим функциям. Коэффициенты этих рядов, в свою очередь, определяются в виде бесконечных рядов известных величин, характеризующих заданные внешнюю нагрузку и перемещения. Решения в случаях сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки доведены до числовых результатов. Исследовано распределение нормальных напряжений на контакте при различных отношениях модулей упругости материалов.

1. Координатная система и размеры слоев, составляющих прямоугольник, показаны на фиг. 1.

Обозначим через Φ_i , z'_x , z'_y , z'_{xy} , u_i , v_i и E_i ($i = 1, 2$) соответственно функцию Эри, напряжения, перемещения и модули упругости в соответствующих областях D_i ($i = 1, 2$).

Функция напряжений Эри при отсутствии массовых сил удовлетворяет [5] дифференциальному уравнению



Фиг. 1.

$$\Delta^2 \Phi_l = \frac{\partial^4 \Phi_l}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi_l}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_l}{\partial y^4} = 0 \quad (1.1)$$

в каждой из областей D_l ($l = 1, 2$).

Напряжения через функцию Φ выражаются следующим образом

$$\tau'_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial y^2}, \quad \tau'_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x^2}, \quad \tau'_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$

перемещения определяются соотношениями

$$u_l = \frac{1}{E_l} \left\{ \int_0^x \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_l}{\partial x} \right\} - A_l y + B_l, \quad (1.3)$$

$$v_l = \frac{1}{E_l} \left\{ \int_0^y \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_l}{\partial y} \right\} + A_l x + C_l.$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, A_l , B_l , и C_l — постоянные, которые определяются из условий симметрии относительно оси y , т. е. $u_l(0, y) = \tau'_{xy}(0, y) = 0$, и из условия $v_l(\pm l, 0) = 0$.

На контакте Φ удовлетворяет [7] условиям

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_2(x, 0), \quad \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=0} =$$

$$= \varepsilon_{12} \left[\frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial y^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial y \partial x^2} \right]_{y=0} \quad (1.4)$$

где

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{\varepsilon_{21}} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Пренебрегая касательными напряжениями на контакте, будем иметь

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.5)$$

Принимая, что внешнюю нагрузку и перемещение $v(\pm l, y)$ можно представить сходящимися тригонометрическими рядами, рассмотрим плоское напряженное состояние составного прямоугольника при следующих краевых условиях [3]

$$\tau_y^{(1)}(x, h_1) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x^2} \Big|_{y=h_1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \cos \alpha_k x,$$

$$\tau_y^{(2)}(x, -h_2) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x^2} \Big|_{y=-h_2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(2)} \cos \alpha_k x, \quad (1.6)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, h_1) = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x \partial y} \Big|_{y=h_1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(1)} \sin \alpha_k x, \quad (1.7)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, -h_2) = - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y} \Big|_{y=-h_2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(2)} \sin \alpha_k x \quad (1.7)$$

$$\sigma_x^{(1)}(\pm l, y) = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \cos \beta_k y,$$

$$\sigma_x^{(2)}(\pm l, y) = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)} \cos \gamma_k y, \quad (1.8)$$

$$v_1(\pm l, y) = \frac{1}{E_1} \left\{ \int_0^y \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right\} \Big|_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)} \sin \beta_k y, \quad (1.9)$$

$$v_2(\pm l, y) = \frac{1}{E_2} \left\{ \int_0^y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right\} \Big|_{x=\pm l} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(2)} \sin \gamma_k y,$$

где

$$\alpha_k = (2k-1) \frac{\pi}{2l}, \quad \beta_k = (2k-1) \frac{\pi}{2h_1}, \quad \gamma_k = (2k-1) \frac{\pi}{2h_2}. \quad (1.10)$$

На основании симметрии относительно оси y функцию $\Phi(x, y)$ можно определить только в одной половине прямоугольника ($x > 0$).

Функции Φ_1 и Φ_2 ищем в следующей форме

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y (C_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k y)] \times \\ & \times \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k x + F_k^{(1)} \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x] \cos \beta_k y, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq x \leq l \\ 0 \leq y \leq h_1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y (C_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k y)] \times \\ & \times \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(2)} \operatorname{ch} \gamma_k x + F_k^{(2)} \gamma_k x \operatorname{sh} \gamma_k x] \cos \gamma_k y, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq x \leq l \\ -h_2 \leq y \leq 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в условия (1.4)–(1.6), получаем

$$C_k^{(1)} - \nu_{12} C_k^{(2)} = 0, \quad B_k^{(1)} + C_k^{(1)} = 0, \quad B_k^{(2)} + C_k^{(2)} = 0,$$

$$A_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k h_1 + B_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k h_1 + \alpha_k h_1 (C_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k h_1 + D_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k h_1) = - \frac{a_k^{(1)}}{\alpha_k^2}, \quad (1.13)$$

$$A_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k h_2 - B_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k h_2 - \alpha_k h_2 (C_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k h_2 - D_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k h_2) = - \frac{a_k^{(2)}}{\alpha_k^2}.$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в условия (1.8) и (1.9) и решая полученные уравнения относительно $E_k^{(i)}$ и $F_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$), получаем

$$E_k^{(1)} = - \frac{1}{\beta_k^2 \operatorname{ch} \beta_k l} \left[\left(1 + \frac{1+\gamma}{2} \beta_k l \cdot \operatorname{th} \beta_k l \right) c_k^{(1)} - \frac{E_1}{2} \beta_k^2 l \cdot \operatorname{th} \beta_k l \cdot d_k^{(1)} \right],$$

$$E_k^{(2)} = - \frac{1}{\gamma_k^2 \operatorname{ch} \gamma_k l} \left[\left(1 + \frac{1+\gamma}{2} \gamma_k l \cdot \operatorname{th} \gamma_k l \right) c_k^{(2)} - \frac{E_2}{2} \gamma_k^2 l \cdot \operatorname{th} \gamma_k l \cdot d_k^{(2)} \right], \quad (1.14)$$

$$F_k^{(1)} = \frac{(1+\gamma) c_k^{(1)} + E_1 \beta_k d_k^{(1)}}{2\beta_k^2 \operatorname{ch} \beta_k l}, \quad F_k^{(2)} = \frac{(1+\gamma) c_k^{(2)} + E_2 \gamma_k d_k^{(2)}}{2\gamma_k^2 \operatorname{ch} \gamma_k l}.$$

Подставляя (1.11) и (1.12) в первое условие (1.4) и в условие (1.7), на основании (1.14) находим

$$A_k^{(1)} - A_k^{(2)} = r_k,$$

$$(A_k^{(1)} - D_k^{(1)}) \operatorname{sh} \alpha_k h_1 + \alpha_k h_1 (C_k^{(1)} \operatorname{sh} \alpha_k h_1 + D_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k h_1) = \frac{1}{\alpha_k^2} (b_k^{(1)} - s_k^{(1)}), \quad (1.15)$$

$$(A_k^{(2)} + D_k^{(2)}) \operatorname{sh} \alpha_k h_2 - \alpha_k h_2 (C_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k h_2 - D_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k h_2) = - \frac{1}{\alpha_k^2} (b_k^{(2)} + s_k^{(2)}),$$

где

$$r_k = (-1)^k \frac{2\alpha_k}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_p^2 + \alpha_k^2)^2} \left[\left(2 + \gamma + \frac{\alpha_k^2}{\alpha_p^2} \right) c_p^{(2)} + E_2 \gamma_p d_p^{(2)} \right] -$$

$$- (-1)^k \frac{2\alpha_k}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2)^2} \left[\left(2 + \gamma + \frac{\alpha_k^2}{\beta_p^2} \right) c_p^{(1)} + E_1 \beta_p d_p^{(1)} \right],$$

$$s_k^{(1)} = (-1)^k \frac{2\alpha_k}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_p}{(\beta_p^2 - \alpha_k^2)^2} \left[\left(\gamma - \frac{\beta_p^2}{\alpha_k^2} \right) c_p^{(1)} + E_1 \beta_p d_p^{(1)} \right], \quad (1.16)$$

$$s_k^{(2)} = (-1)^k \frac{2\alpha_k}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \gamma_p}{(\gamma_p^2 - \alpha_k^2)^2} \left[\left(\gamma - \frac{\gamma_p^2}{\alpha_k^2} \right) c_p^{(2)} + E_2 \gamma_p d_p^{(2)} \right].$$

При этом использованы разложения

$$\operatorname{sh} \beta_p x = \frac{2\beta_p \operatorname{ch} \beta_p l}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin \alpha_k x}{\alpha_k^2 + \beta_p^2},$$

$$x \operatorname{ch} \beta_p x = \frac{2}{l} (\beta_p l \operatorname{sh} \beta_p l - \operatorname{ch} \beta_p l) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} +$$

$$+ \frac{4}{l} \operatorname{ch} \beta_p l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_k \sin \alpha_k x}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2},$$

(0 < x < l)

$$\operatorname{ch} \beta_p x = \frac{2}{l} \operatorname{ch} \beta_p l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \alpha_k \cos \alpha_k x}{\alpha_k^2 + \beta_p^2}, \quad (1.17)$$

$$x \operatorname{sh} \beta_p x = 2 \operatorname{sh} \beta_p l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z_k \cos z_k x}{z_k^2 + \beta_p^2}$$

$$- \frac{4\beta_p \operatorname{ch} \beta_p l}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z_k \cos z_k x}{(z_k^2 + \beta_p^2)^2}$$

а также аналогичные разложения для функций $\operatorname{sh} \gamma_p x$, $\operatorname{ch} \gamma_p x$, $x \operatorname{sh} \gamma_p x$ и $x \operatorname{ch} \gamma_p x$ в интервале $(0, l)$.

Таким образом, коэффициенты $F_k^{(i)}$, $F_k^{(j)}$ ($i=1, 2$, $k=1, 2, \dots$) определяются при помощи контурных условий соотношениями (1.14) непосредственно. Для остальных коэффициентов имеем систему уравнений (1.13) и (1.15).

Выражения коэффициентов $A_k^{(i)}$, $B_k^{(i)}$, $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$ ($i=1, 2$) получаются громоздкими. При решении конкретных задач целесообразно для различных распределений внешней нагрузки, отношений модулей упругости и размеров прямоугольников решить систему уравнений (1.13)–(1.15) с числовыми коэффициентами.

2. Докажем сходимость рядов, определяющих функции Φ_1 и Φ_2 .

Принимая во внимание (1.14), замечаем, что общие члены вторых сумм в (1.11) и (1.12) убывают как $\frac{1}{(2k-1)^2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}(2k-1)(l-x)}$. Поэтому эти ряды и их производные произвольного порядка сходятся внутри областей определения Φ_1 и Φ_2 и на сторонах $y=h_1$, $y=-h_2$, $0 < x < l$. На сторонах прямоугольников $x=l$ первые производные этих рядов сходятся в обычном смысле, а вторые их производные сходятся в среднем.

Докажем сходимость первых сумм, входящих в правые части (1.11) и (1.12).

Исключая из уравнений (1.13) и (1.15) $A_k^{(2)}$, $B_k^{(2)}$, $C_k^{(2)}$ и $D_k^{(1)}$, получаем

$$A_k^{(1)} \operatorname{ch} z_k h_1 - C_k^{(1)} (\operatorname{sh} z_k h_1 - z_k h_1 \operatorname{ch} z_k h_1) + D_k^{(1)} z_k h_1 \operatorname{sh} z_k h_1 = -\frac{a_k^{(1)}}{z_k^2}, \quad (2.1)$$

$$A_k^{(1)} \operatorname{sh} z_k h_1 + C_k^{(1)} z_k h_1 \operatorname{sh} z_k h_1 + D_k^{(1)} (\operatorname{sh} z_k h_1 + z_k h_1 \operatorname{ch} z_k h_1) = \frac{1}{z_k^2} (b_k^{(1)} - s_k^{(1)}), \quad (2.2)$$

$$A_k^{(1)} \operatorname{ch} z_k h_2 + C_k^{(1)} (\operatorname{sh} z_k h_2 - z_k h_2 \operatorname{ch} z_k h_2) \varepsilon_{21} + D_k^{(2)} z_k h_2 \operatorname{sh} z_k h_2 = -\frac{a_k^{(2)}}{z_k^2} + r_k \operatorname{ch} z_k h_2, \quad (2.3)$$

$$A_k^{(1)} \operatorname{sh} z_k h_2 - C_k^{(1)} \varepsilon_{21} z_k h_2 \operatorname{sh} z_k h_2 + D_k^{(2)} (\operatorname{sh} z_k h_2 + z_k h_2 \operatorname{ch} z_k h_2) = -\frac{1}{z_k^2} \times \\ \times (b_k^{(2)} + s_k^{(2)}) + r_k \operatorname{sh} z_k h_2, \quad (2.4)$$

Для определителя системы (2.1)–(2.4) будем иметь

$$\Delta_k = - |(\operatorname{sh}^2 x_k - x_k^2)(\operatorname{sh} y_k \operatorname{ch} y_k + y_k) + z_{21}(\operatorname{sh}^2 y_k - y_k^2)(\operatorname{sh} x_k \operatorname{ch} x_k + x_k)|, \quad (2.5)$$

где

$$x_k = z_k h_1, \quad y_k = z_k h_2.$$

Легко заметить, что при $k \rightarrow \infty$, $|\Delta_k|$ возрастает как $\frac{1 + z_{21}}{16} \cdot e^{2(x_k + y_k)}$

Свободные члены системы (2.1)–(2.4), не содержащие r_k , убывают как $\frac{1}{z_k^3}$. Поэтому решение системы (2.1)–(2.4), соответствующее членам правых частей, не содержащих r_k , при $k \rightarrow \infty$ убывает не медленнее, чем $\frac{1}{z_k^3} e^{-x_k}$ и $\frac{1}{z_k^3} e^{-y_k}$.

Используя эти асимптотические оценки в (1.11) и (1.12), приходим к заключению, что первые суммы правых частей (1.11) и (1.12) и их производные любого порядка, обусловленные свободными членами системы, не содержащими r_k , сходятся внутри соответствующих областей определения Φ_1 и Φ_2 , а на сторонах прямоугольников $y = h_1$, $y = -h_2$ и на линии контакта $y = 0$ сходятся первые и вторые производные этих сумм.

Решая систему (2.1)–(2.4) с правыми частями, содержащими только r_k , и принимая во внимание (1.13) и (1.15), получаем

$$A_k^{(1)} = A_k^{(2)} - r_k = -\frac{r_k}{\Delta_k} (\operatorname{sh}^2 x_k - x_k^2) (\operatorname{sh} y_k \operatorname{ch} y_k + y_k), \quad (2.6)$$

$$C_k^{(1)} = z_{12} C_k^{(2)} = -B_k^{(1)} = -z_{12} B_k^{(2)} = -\frac{r_k}{\Delta_k} (\operatorname{sh} x_k \operatorname{ch} x_k + x_k) (\operatorname{sh} y_k \operatorname{ch} y_k + y_k), \quad (2.7)$$

$$D_k^{(1)} = \frac{r_k}{\Delta_k} (\operatorname{sh} y_k \operatorname{ch} y_k + y_k) \operatorname{sh}^2 x_k, \quad (2.8)$$

$$D_k^{(2)} = -z_{21} \frac{r_k}{\Delta_k} (\operatorname{sh} x_k \operatorname{ch} x_k + x_k) \operatorname{sh}^2 y_k. \quad (2.9)$$

Подставляя значения коэффициентов из (2.6)–(2.9) в первые суммы (1.11) и (1.12), после некоторых преобразований находим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{ch} z_k y + B_k^{(1)} \operatorname{sh} z_k y + z_k y (C_k^{(1)} \operatorname{ch} z_k y + D_k^{(1)} \operatorname{sh} z_k y)] \cos z_k x = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{\Delta_k} (\operatorname{sh} y_k \operatorname{ch} y_k + y_k) \operatorname{sh} x_k \left\{ \operatorname{sh} z_k (y - h_1) - z_k y \operatorname{ch} z_k (y - h_1) + \right. \\ & \left. + z_k h_1 \frac{\operatorname{ch} z_k y}{\operatorname{sh} z_k h_1} [\operatorname{th} z_k y - z_k (y - h_1)] \right\} \cos z_k x, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq x \leq l \\ 0 \leq y \leq h_1 \end{array} \right) \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y (C_k^{(2)} \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k^{(2)} \operatorname{sh} \alpha_k y)] \cos \alpha_k x =$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{\Delta_k} (\operatorname{sh} \alpha_k \operatorname{ch} \alpha_k + \alpha_k) \operatorname{sh} y_k \left\{ \operatorname{sh} \alpha_k (y + h_2) - \alpha_k y \operatorname{ch} \alpha_k (y + h_2) + \right.$$

$$\left. - \alpha_k h_2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k h_2} [\operatorname{th} \alpha_k y - \alpha_k (y + h_2)] \right\} \cos \alpha_k x, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq x < l \\ -h_2 < y < 0 \end{array} \right). \quad (2.11)$$

Теперь очевидно, что выражения под знаком сумм (2.10) и (2.11) убывают, соответственно, при $k \rightarrow \infty$ как $\frac{1}{\alpha_k^3} \cdot e^{-\alpha_k(h_1 - y)}$ и $\frac{1}{\alpha_k^3} \cdot e^{-\alpha_k(h_2 + y)}$ при $0 < y < h_1$ и $-h_2 < y < 0$.

Таким образом, ряды, определяющие Φ_1 и Φ_2 и их производные, сходятся внутри областей определения Φ_1 и Φ_2 . На контурах же этих областей сходятся эти ряды и их первые и вторые производные.

3. В качестве конкретной задачи рассмотрим напряженное состояние двухслойного прямоугольника, находящегося под действием симметрично распределенной относительно оси y нормальной внешней нагрузки, приложенной только на сторонах $y = \pm h$, при условии $v(\pm l, y) = 0$, т. е.

$$b_k^{(1)} = c_k^{(1)} = d_k^{(1)} = 0. \quad (3.1)$$

Для размеров прямоугольников и коэффициента Пуассона принимаем

$$h_1 = h_2 = h, \quad l = 10h, \quad \nu = 0.3. \quad (3.2)$$

l берется значительно больше h , чтобы уменьшить влияние условия $v(\pm l, y)$ на напряженное состояние составного прямоугольника.

Принимая во внимание (3.1) и (3.2), из (1.13)–(1.15) находим

$$A_k^{(1)} = A_k^{(2)} = - \frac{\alpha_k^{(2)} + \varepsilon_{21} \alpha_k^{(1)}}{(1 + \varepsilon_{21}) \alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h}{\operatorname{sh} \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h + \alpha_k h},$$

$$B_k^{(1)} = \varepsilon_{12} B_k^{(2)} = - C_k^{(1)} = - \varepsilon_{12} C_k^{(2)} = \frac{\alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)}}{(1 + \varepsilon_{21}) \alpha_k^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k h - \alpha_k^2 h^2},$$

$$D_k^{(1)} = - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k h}{\operatorname{sh} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h} (A_k^{(1)} - B_k^{(1)} \varepsilon_{21} \alpha_k h), \quad (3.3)$$

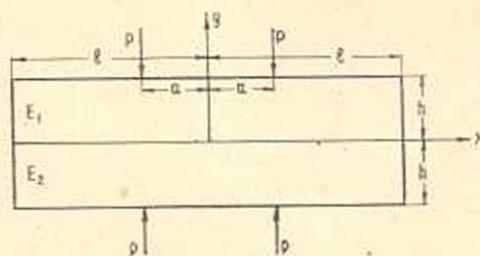
$$D_k^{(2)} = - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k h}{\operatorname{sh} \alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h} (A_k^{(1)} + B_k^{(1)} \varepsilon_{21} \alpha_k h),$$

$$E_k^{(1)} = E_k^{(2)} = F_k^{(1)} = F_k^{(2)} = 0.$$

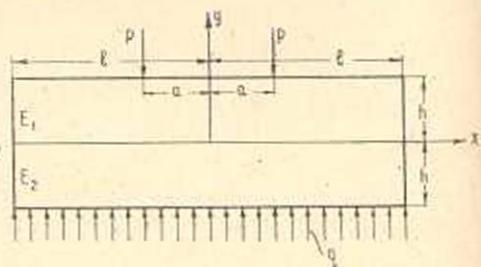
При помощи (1.2), (1.3), (1.11), (1.12) и (3.3) можно определить напряженное и деформированное состояния составного прямоугольника при любом отношении ε_{12} модулей упругости и при произволь-

ном распределении внешней нормальной нагрузки, приложенной на сторонах $y = \pm h$. Отметим, что ряды, определяющие нормальные напряжения на контакте, сходятся медленно.

Вычисления проведены с десятью членами рядов (1.11) и (1.12) для двух случаев распределения внешней нагрузки: а) на сторонах $y = \pm h$ симметрично относительно осей x и y приложены четыре сосредоточенные нормальные силы (фиг. 2) и б) на одной стороне ($y = h$) приложены две сосредоточенные силы, а на другой стороне ($y = -h$) приложена равномерно распределенная нагрузка (фиг. 3).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

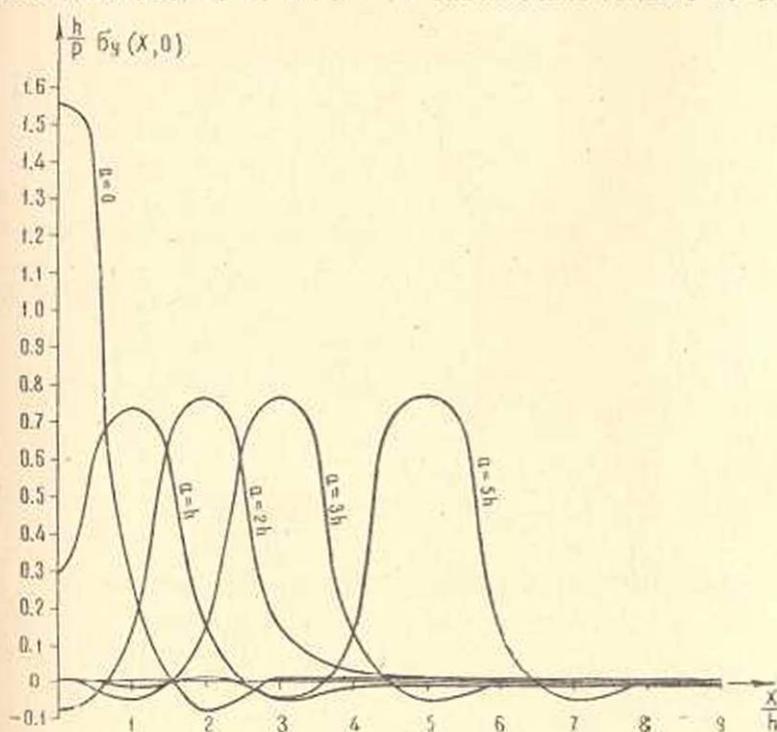
Значения $-\frac{h}{\rho} z_y(0, 0)$

Таблица 1

$\frac{a}{h}$	$\frac{E_2}{E_1}$	С л у ч а й б)						Случай а)
		0,5	1	2	5	10	∞	симметричный
0		0,58442	0,82782	1,0712	1,3146	1,4252	1,5580	1,5582
0,5		0,44252	0,61308	0,78365	0,95420	1,0317	1,1248	1,1248
1		0,16837	0,20000	0,23163	0,26326	0,27764	0,29467	0,29489
1,25		0,06736	0,04902	0,03059	0,01236	0,00403	-0,00613	-0,00598
1,5		0,01674	-0,02563	0,06784	0,11012	-0,12934	-0,15241	-0,15241
1,75		0,01336	-0,02929	-0,07171	-0,11457	-0,15767	-0,15705	-0,15721
2		0,03893	0,00965	-0,01962	-0,04879	-0,06220	-0,07794	-0,07817
3		0,07399	0,05820	0,04242	0,02663	0,01946	0,01060	0,01065
5		0,07337	0,05675	0,04012	0,02349	0,01602	0,00655	0,00686
7		0,07407	0,05637	0,03857	0,02087	0,01293	0,00281	0,00328
9		0,08215	0,06208	0,04201	0,02194	0,01282	0,00058	0,00187

В таблице приведены значения нормального напряжения z_y в начале координат в зависимости от отношения расстояния a между точками приложения сосредоточенных сил к ширине полос h и от отношения $\frac{E_2}{E_1}$ модулей упругости материалов этих полос. Последний столбец таблицы относится к случаю а). Вычисления показывают, что распределение нормальных напряжений на контакте $y = 0$ в этом случае, а следовательно, и в общем случае симметрично относительно

осей x и y распределения внешней нормальной нагрузки на сторонах $y = \pm h$ не зависит от ε_{21} . Это распределение для различных значений отношения $\frac{a}{h}$ графически изображено на фиг. 4. Данные вычисления, приведенные в таблице и на фиг. 4, показывают, что в случае а) на контакте двух прямоугольников всегда возникает отрицательное давление, если, конечно, l значительно больше h . Следова-

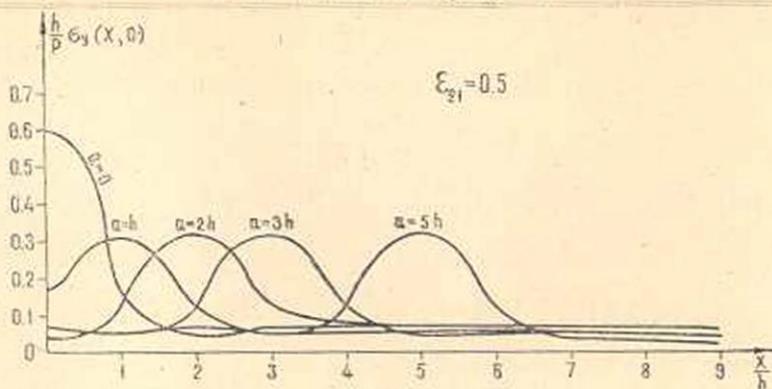


Фиг. 4.

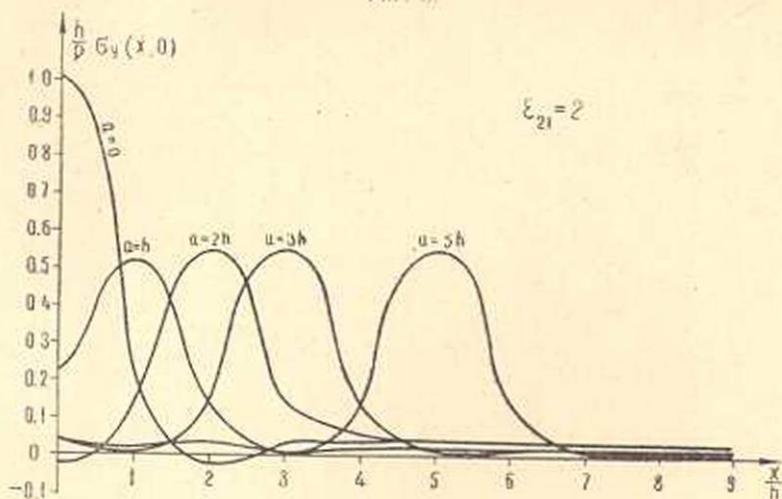
тельно, при свободном упираии прямоугольников без трения контакт не может быть осуществлен по всей длине отрезка $y = 0$, $-l < x < l$, каким бы то ни было отношение ε_{21} модулей упругости полос. После нагружения на некоторых участках линии $y = 0$ прямоугольники отходят друг от друга.

На фигурах 5–7 графически изображено распределение нормальных напряжений на контакте $y = 0$ для случая б) при различных значениях отношений $\frac{a}{h}$ и $\varepsilon_{21} = \frac{E_2}{E_1}$.

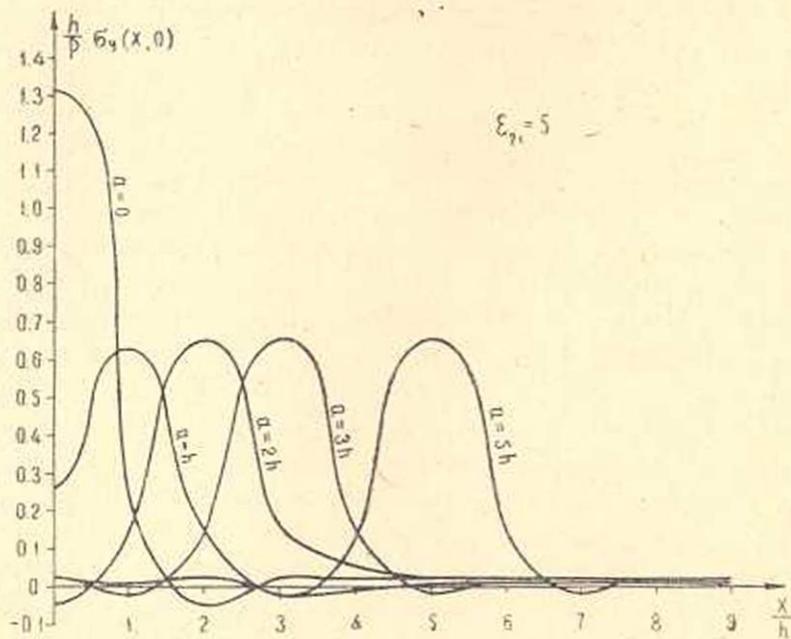
На основании результатов вычислений, приведенных в таблице и на фигурах 5–7, заключаем, что в этом случае распределения внешней нагрузки максимальные нормальные напряжения на контакте $y = 0$, возникающие под сосредоточенными силами, увеличиваются с возрастанием отношения $\varepsilon_{21} = \frac{E_2}{E_1}$. Если ε_{21} меньше половины, т. е.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

модуль упругости нижнего слоя (фиг. 3) значительно меньше модуля упругости верхнего слоя, на линии контакта возникают только сжимающие напряжения σ_y . Следовательно, при свободном упираии прямоугольных слоев и при рассматриваемом распределении внешней нагрузки контакт будет обеспечен по всей длине $2l$. Когда увеличиваем модуль упругости нижнего слоя, распределение контактных напряжений приближается к распределению, которое получается для этих напряжений в случае а) (фиг. 4). Как и следовало ожидать, чем больше модуль упругости нижнего слоя E_2 , тем меньше влияет характер распределения внешней нагрузки, приложенной к стороне $y = -h$, на распределение контактных напряжений. В случае абсолютно жесткого нижнего слоя этого влияния совсем не будет.

Результаты расчетов показывают, что разность между значениями $\sigma_y(x, 0)$, вычисленными при сохранении первых десяти и девяти членов рядов, не превышает 5% вышеприведенных значений контактных напряжений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 X 1962

Կ. Ս. ՉՈՐԱՆԻՐԱՆ, Պ. Լ. ԳՎԻՋԱՐԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌՍՁԳՍԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս. Ս՝ Փ Ո Փ Ո Ւ Ս՝

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ լարվածային վիճակը երկշերտ (բաղադրյալ) ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան շերտերը միմյանց հետ միացված են $y = 0$, $-l < x < l$ կողմերով: Ուղղանկյուն շերտերի $y = h_1$ և $y = -h_2$ կողմեր կամավոր կերպով բեռնավորված են նորմալ և շոշափող լարումներով սիմետրիայի y առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ ձևով, իսկ $x = -l$ կողմերում արված են նորմալ լարումները և շոշափող տեղափոխումները, սիմետրիայի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ ձևով: Շերտերի միջև շփման շոշափող լարումները արձամարմվում են [1]: Շերտերի նյութերն ունեն ասարկեր առաձգականության մոդուլներ, բայց Պասսանի գործակիցը երկու շերտերի համար էլ միևնույնն է:

Նման խնդիր համասեռ ուղղանկյան համար դիտարկված է [2] աշխատության մեջ: [3] և [4] աշխատություններում դիտարկված են բաղադրյալ ուղղանկյան ասարկեր լարվածային վիճակները:

Դիտարկվող ուղղանկյուն շերտերում էրիի լարումների ֆունկցիան ներկայացվում է Գուրյեի շարքով, որի վերլուծության գործակիցները գրավում են արված արտաքին բեռն ու տեղափոխումները բնութագրող հայտնի մեծությունների անվերջ շարքերով: Կենտրոնացված արտաքին բեռով և հավասարաչափ բաշխված բեռով բեռնավորման դեպքերը հասցված են մինչև ինչպիսի

արդյունքների: *Ստատիստիկական է նորմալ բարձրների բաշխման օրենքը հան-
սակաբ գծի վրա, շերտերի աստղազանգվածային մոդուլների տարրեր հարաբե-
րաբաշխումների և $\frac{\alpha}{H}$ հարաբերության տարրեր արժեքների համար: Պատճառ
ևն է, բարձրների բաշխման էպլուրները:*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Margurec K.* Ingentieur-Archiv, **2** (1931), s. 108.
2. *Валов Г. М.* К задаче о равновесии прямоугольника при смешанных граничных условиях. Исследования по теории сооружений, в. VII, 1957, 401—411.
3. *Ерохин И. П.* Исследование напряженного состояния в балках, составленных из материалов с разными модулями упругости. Труды ЛИИИС, № 5, 1938.
4. *Раппопорт Р. М.* Расчет балок, составленных из материалов с различными механическими характеристиками. Труды Лен. политех. ин-та им. М. И. Калинина, № 5, 1948, 52—74.
5. *ТимOSHENKO С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
6. *Абрамян Б. Л.* Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. ДАН АрмССР, **21**, № 5, 1955, 193—198.
7. *Чобанян К. С.* О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составных тел. ДАН АрмССР, **32**, № 2, 1961, 69—77.