ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVI, № 2, 1963 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Об одном способе решения задачи кручения стержня с цилиндрической анизотропией

Исследованию задачи о кручении анизотропных стержней посвящено много работ, среди которых особое место занимают работы Сен-Венана [1], В. Фойгта [2], Л. С. Лейбензона [3], С. Г. Лехницкого [4—6] и др. [7, 8].

Решениям задач кручения неортотропного стержня методом малого параметра (геометрический параметр) посвящены некоторые работы автора (см. [9]).

В работах [10, 11] решены задачи о кручении и об изгибе призматических стержней, обладающих прямолинейной анизотропией частного вида (неортотропные стержни).

В настоящей статье предлагается способ решения задачи о кручении цилиндрического или призматического стержня, обладающего цилиндрической анизотропией такого вида, что в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к его оси. Введением новых переменных, решение задачи представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ (физический параметр). Показано, что решение дифференциального уравнения в частных производных с неразделяющимися переменными сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

В качестве примера решена задача о кручении анизотропного стержня с поперечным сечением в виде криволинейного четырехугольника, ограниченного двумя дугами концентрических окружностей и двумя радиусами. Отметим, что решению задачи кручения стержня, изготовленного из изотропного и ортотропного материала, с поперечным сечением в виде криволинейного четырехугольника (или кругового сектора) посвящены многие работы [12—17].

§ 1. Способ решения задачи

Пусть цилиндрический или призматический стержень, обладающий цилиндрической анизотропией, деформируется скручивающими моментами M_z, приложенными на концах. Предположим, что ось анизотропии параллельна образующей цилиндра и проходит внутри стержня, вне его или по поверхности.

Примем ось анизотропии за ось z цилиндрической системы координат. Далее предположим, что стержень обладает цилиндрической анизотропией такого вида, что в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, нормальная к его оси (т. е. стержень—неортотропный). Тогда задача о кручении цилиндрического или призматического стержня с анизотропией указанного вида, как показано С. Г. Лехницким [4], сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных с неразделяющимися переменными

$$a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2a_{45}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}+a_{55}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=-2\vartheta \tag{1.1}$$

с граничным условием на контуре сечения

$$\psi\Big|_{\Gamma}=0. \tag{1.2}$$

Здесь $\psi(r, \theta)$ — функция напряжений, a_{ik} — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{44}>0,\quad a_{55}>0,\quad a_{44}a_{55}-a_{45}^2>0, \tag{1.3}$$

ϑ — относительный угол закручивания.

При этом составляющие напряжения определяются из формул

$$\begin{gathered}\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=\tau_{r\theta}=0,\\ \tau_{rz}=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad \tau_{\theta z}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Введем новые переменные t и φ, связанные со старыми зависимостями

$$t=\ln r,\qquad \varphi=\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}\,\theta. \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-2\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial\varphi}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=-2e^{2t}, \tag{1.6}$$

где

$$U(t, \varphi)=\frac{a_{44}}{\vartheta}\psi(r, \theta),\qquad \mu=\frac{a_{45}}{\sqrt{a_{44}a_{55}}}<1^{*}. \tag{1.7}$$

Представим решение дифференциального уравнения с частными производными (1.6) в виде ряда по степеням малого параметра μ**

$$U=U_0(t, \varphi)+\sum_{i=1}^{\infty}U_i(t, \varphi)\mu^i. \tag{1.8}$$

Подставляя значение $U(t, \varphi)$ из выражения (1.8) в дифференциальное уравнение (1.6), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, находим

---

* Отметим, что для ортотропного стержня $\mu=0$.

** О доказательстве сходимости ряда (1.8) здесь мы не останавливаемся.

$$\Delta U_0 = -2e^{2t}, \tag{1.9}$$

$$\Delta U_i = \psi_i(t, \varphi) \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1.10}$$

где

$$\psi_i(t, \varphi) = 2\frac{\partial^2 U_{i-1}}{\partial t \partial \varphi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Из (1.2) при помощи (1.7) и (1.8) легко получается

$$U_i \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.11}$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (1.6) сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.9) и (1.10) при условии (1.11).

При этом неизвестный угол кручения ϑ определяется из соотношения

$$\vartheta = \frac{M_t}{C_t}, \tag{1.12}$$

где

$$C_t = \frac{1}{\vartheta}\iint \tau_{\theta z}\, r\, ds, \tag{1.13}$$

— жесткость при кручении.

Далее, подставляя значения $\tau_{\theta z}$ из (1.4) в (1.13), интегрируя затем по частям по r и учитывая (1.2), для определения жесткости стержня будем иметь

$$C_t = \frac{2}{\vartheta}\iint \varphi(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta$$

или, принимая во внимание соотношения (1.5) и (1.7), получим

$$C_t = \frac{2}{a_{44}}\sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}\iint U(t, \varphi)\, e^{2t}\, dt\, d\varphi. \tag{1.14}$$

Теперь рассмотрим задачу о кручении призматического неортотропного стержня с поперечным сечением в виде криволинейного четырехугольника, ограниченного двумя дугами концентрических окружностей и двумя радиусами.

§ 2. Кручение призматического анизотропного стержня криволинейного четырехугольного сечения (фиг. 1)

Рассмотрим задачу о кручении указанного стержня, обладающего цилиндрической анизотропией такого типа, что в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к его оси. Предположим, что радиус внутренней дуги есть $a = e^{t_1}$, радиус внешней дуги — $b = e^{t_2}$, а два радиуса, ограничивающие криволинейный четырехугольник, пусть будут $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$.

Для определения $U_0(t, \varphi)$ нужно решить уравнение (1.9) при условиях

$$U_0(t, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1, \quad t = t_2, \qquad (2.1)$$
$$U_0(t, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0,$$

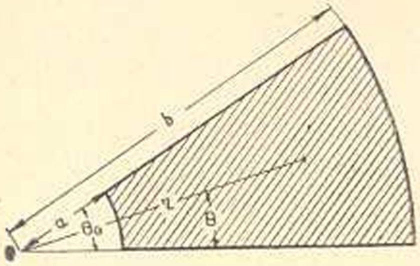
где

$$\varphi_0 = \theta_0 \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}.$$

Произведя преобразование

$$\xi = \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi), \qquad (2.2)$$

из (1.9) придем к следующему дифференциальному уравнению для функции $U_0(t, \varphi)$:



Фиг. 1.

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} = -2e^{2t}, \qquad (2.3)$$

где

$$\lambda = \frac{\pi}{\varphi_0} = \frac{\pi}{\theta_0} \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}.$$

Для решения дифференциального уравнения (2.3) при соответственных граничных условиях (2.1) воспользуемся конечным синус-преобразованием Фурье [18]

$$\overline{U}_0(t, p) = \int_0^\pi U_0(t, \xi) \sin p\xi d\xi, \qquad (2.4)$$

где p — целое положительное число. Формула обращения для преобразования (2.4) имеет вид

$$U_0(t, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \overline{U}_0(t, p) \sin p\xi. \qquad (2.5)$$

Умножим уравнение (2.3) на ядро $\sin p\xi$ и проинтегрируем по частям полученное выражение по ξ в пределах от 0 до π. Принимая во внимание (2.4), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \overline{U}_0}{dt^2} - \lambda^2 p^2 \overline{U}_0 = -\frac{4e^{2t}}{p} \quad (p = 1, 3, 5, \ldots). \qquad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что общее решение уравнения (2.6) можно записать в виде

$$\overline{U}_0 = A_p \operatorname{sh} \lambda pt + B_p \operatorname{ch} \lambda pt + C_p e^{2t}, \qquad (2.7)$$

где

$$C_p = -\frac{4}{p(4 - \lambda^2 p^2)}.$$

Для определения A_p и B_p воспользуемся первым из граничных условий (2.1). Тогда

$$A_p = \frac{e^{2t_1}\operatorname{ch}\lambda p t_2 - e^{2t_2}\operatorname{ch}\lambda p t_1}{\operatorname{sh}\lambda p\,(t_2 - t_1)}\,C_p, \qquad B_p = \frac{e^{2t_2}\operatorname{sh}\lambda p t_1 - e^{2t_1}\operatorname{sh}\lambda p t_2}{\operatorname{sh}\lambda p\,(t_2 - t_1)}\,C_p. \tag{2.8}$$

Итак, при помощи (2.5), (2.7) и (2.8) можно записать

$$U_0(t, \xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\left[e^{2t_1}\operatorname{sh}\lambda p\,(t - t_2) - e^{2t_2}\operatorname{sh}\lambda p\,(t - t_1) + \right.$$
$$\left. + e^{2t}\operatorname{sh}\lambda p\,(t_2 - t_1)\right]\frac{C_p \sin p\xi}{\operatorname{sh}\lambda p\,(t_2 - t_1)}. \tag{2.9}$$

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Подставляя выражение $U_0(t, \xi)$ из (2.9) в (1.10) и учитывая (2.2), получим

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \lambda^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} = \varphi_1(t, \xi), \tag{2.10}$$

где

$$\varphi_1(t, \xi) = \frac{4\pi}{\varphi_0^2}\sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{C_p p^2 \cos p\xi}{\operatorname{sh}\lambda p\,(t_2 - t_1)}\left[e^{2t_1}\operatorname{ch}\lambda p\,(t - t_2) - e^{2t_2}\operatorname{ch}\lambda p\,(t - t_1) + \right.$$
$$\left. + \frac{2e^{2t}\operatorname{sh}\lambda p\,(t_2 - t_1)}{\lambda p}\right]. \tag{2.11}$$

Для решения уравнения (2.10) при соответственных граничных условиях (1.11) опять воспользуемся конечным синус-преобразованием Фурье

$$\overline{U_1}(t, q) = \int_0^{\pi} U_1(t, \xi)\sin q\xi\, d\xi. \tag{2.12}$$

При этом формула обращения для преобразования (2.12) будет иметь вид

$$U_1(t, \xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{q}^{\infty}\overline{U_1}(t, q)\sin q\xi. \tag{2.13}$$

Умножим уравнение (2.10) на ядро $\sin q\xi$. Интегрируя по частям полученное выражение по ξ в пределах от 0 до π и принимая во внимание (2.12), находим

$$\frac{d^2\overline{U_1}}{dt^2} - 4\lambda^2 n^2\overline{U_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_{kn}\operatorname{ch}\lambda(2k+1)\,t + B_{kn}\operatorname{sh}\lambda(2k+1)\,t + C_{kn}e^{2t}\right]$$
$$(n = 1, 2, \ldots). \tag{2.14}$$

где

$$A_{kn} = \frac{16\pi n\,(2k+1)^2 C_{2k+1}}{\varphi_0^2\left[4n^2 - (2k+1)^2\right]\operatorname{sh}\lambda(2k+1)(t_2 - t_1)}\times$$
$$\times\left[e^{2t_1}\operatorname{ch}\lambda(2k+1)\,t_2 - e^{2t_2}\operatorname{sh}\lambda(2k+1)\,t_1\right],$$

$$B_{kn} = \frac{16\pi n\,(2k+1)^2 C_{2k+1}}{\varphi_0^2\left[4n^2 - (2k+1)^2\right]\operatorname{sh}\lambda(2k+1)(t_2 - t_1)}\times$$

$$\times \left[e^{2\lambda t_2}\operatorname{sh}\lambda(2k+1)t_2 - e^{2\lambda t_1}\operatorname{ch}\lambda(2k+1)t_1\right], \tag{2.15}$$

$$C_{kn} = \frac{32}{\pi}\,\frac{n(2k+1)C_{2k+1}}{4n^2-(2k+1)^2}, \quad p = 2k+1, \quad q = 2n.$$

Общее решение (2.14) при соответственных граничных условиях можно представить в виде

$$\overline{U}_1 = \sum_{n}^{\infty}\left[P_{kn}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_2) + Q_{kn}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_1) + E_{kn}\operatorname{ch}\lambda(2k+1)t + \right.$$

$$\left. + F_{kn}\operatorname{sh}\lambda(2k+1)t + R_{kn}e^{2\lambda t}\right], \tag{2.16}$$

где

$$P_{kn} = \frac{1}{\operatorname{sh}2\lambda n(t_2-t_1)}\left[E_{kn}\operatorname{ch}\lambda(2k+1)t_1 + F_{kn}\operatorname{sh}\lambda(2k+1)t_1 + R_{kn}e^{2\lambda t_1}\right],$$

$$Q_{kn} = -\frac{1}{\operatorname{sh}2\lambda n(t_2-t_1)}\left[E_{kn}\operatorname{ch}\lambda(2k+1)t_2 + F_{kn}\operatorname{sh}\lambda(2k+1)t_2 + \right.$$

$$\left. + R_{kn}e^{2\lambda t_2}\right], \tag{2.17}$$

$$E_{kn} = \frac{A_{kn}}{\lambda^2\left[(2k+1)^2-4n^2\right]}, \qquad F_{kn} = \frac{B_{kn}}{\lambda^2\left[(2k+1)^2-4n^2\right]},$$

$$R_{kn} = \frac{C_{kn}}{4(1-\lambda n^2)}.$$

Учитывая (2.13), для второго приближения $U_1(t, \xi)$ находим следующее выражение

$$U_1(t,\xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[P_{kn}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_2) + Q_{kn}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_1) + \right.$$

$$\left. + E_{kn}\operatorname{ch}\lambda(2k+1)t + F_{kn}\operatorname{sh}\lambda(2k+1)t + R_{kn}e^{2\lambda t}\right]\sin 2n\xi. \tag{2.18}$$

Ограничиваясь первыми двумя приближениями, учитывая (1.8), (2.9) и (2.18), для функции напряжений $U(t, \xi)$ получим следующее выражение

$$U(t,\xi) = \frac{2}{\pi}\sum_{p}^{\infty}\left[e^{2\lambda t_1}\operatorname{sh}\lambda p(t-t_2) - e^{2\lambda t_2}\operatorname{sh}\lambda p(t-t_1) + \right.$$

$$\left. + e^{2\lambda t}\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)\right]\frac{C_p\sin p\xi}{\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)} +$$

$$+ \frac{2\mu}{\pi}\sum_{n}^{\infty}\sum_{p}^{\infty}\left[P_{pn}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_2) + Q_{pn}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_1) + \right.$$

$$\left. + E_{pn}\operatorname{ch}\lambda pt + F_{pn}\operatorname{sh}\lambda pt + R_{pn}e^{2\lambda t}\right]\sin 2n\xi. \tag{2.19}$$

Далее, при помощи (1.14), (1.12) и (1.4) определены жесткость стержня, угол кручения и компоненты касательных напряжений:

$$C_t = \frac{32\theta_0}{\pi^2 a_{44}}\sum_{p}^{\infty}\frac{1}{p^2(4-\lambda^2p^2)^2\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)}\left[2\lambda p e^{2(t_1+t_2)} + \right.$$

$$+\frac{7}{4}(e^{4t_2}-e^{4t_1})\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)-\lambda p(e^{4t_1}+e^{4t_2})\operatorname{ch}\lambda p(t_1-t_2)\Big|,$$

$$\theta=\frac{\pi^2 a_{44}M_t}{32\theta_0}\Bigg|\sum_p^{\infty}\frac{1}{p^2(4-\lambda^2p^2)^2\operatorname{sh}p\lambda(t_2-t_1)}\left[2\lambda pe^{2(t_1+t_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{7}{4}(e^{4t_1}-e^{4t_2})\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)-\lambda p(e^{4t_1}+e^{4t_2})\operatorname{ch}\lambda p(t_1-t_2)\right]\Bigg|^{-1},$$

$$\tau_{rz}=\frac{2\theta e^{-t}}{\theta_0 a_{44}}\sum_p^{\infty}\left[e^{2t_1}\operatorname{sh}\lambda p(t-t_2)-e^{2t_2}\operatorname{sh}\lambda p(t-t_1)+\right.$$

$$\left.+e^{2t}\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)\right]\frac{pC_p\cos p\xi}{\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)}+$$

$$+\frac{4\theta e^{-t}a_{45}}{\theta_0 a_{44}\sqrt{a_{44}a_{55}}}\sum_n^{\infty}\sum_p^{\infty}n\left[P_{pn}^{*}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_2)+Q_{pn}\operatorname{sh}2\lambda n(t-t_1)+\right.$$

$$\left.+E_{pn}\operatorname{ch}\lambda pt+F_{pn}\operatorname{sh}\lambda pt+R_{pn}e^{2t}\right]\cos 2n\xi,$$

$$\tau_{\theta z}=-\frac{2\theta e^{-t}}{\pi a_{44}}\sum_p^{\infty}\left\{\lambda p\left[e^{2t_1}\operatorname{ch}\lambda p(t-t_2)-e^{2t_2}\operatorname{ch}\lambda p(t-t_1)\right]+\right.$$

$$\left.+2e^{2t}\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)\right\}\frac{C_p\sin p\xi}{\operatorname{sh}\lambda p(t_2-t_1)}-$$

$$-\frac{4\theta e^{-t}a_{45}}{\pi a_{44}\sqrt{a_{44}a_{55}}}\sum_n^{\infty}\sum_p^{\infty}\left\{2\lambda n\left[P_{pn}\operatorname{ch}2\lambda n(t-t_2)+Q_{pn}\operatorname{ch}2\lambda n(t-t_1)\right]+\right.$$

$$\left.+\lambda p\left[E_{pn}\operatorname{sh}\lambda pt+F_{pn}\operatorname{ch}\lambda pt\right]+2R_{pn}e^{2t}\right\}\sin 2n\xi. \tag{2.20}$$

Поскольку нашей целью являлось определение функции напряжений при кручении, то мы отыскивали решение (1.1) при граничных условиях (1.2).

Однако, следует отметить, что этим методом можно решить более общее уравнение (например, задачу об изгибе цилиндрических или призматических стержней, обладающих цилиндрической анизотропией, и т. д.)

$$a_{44}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-2a_{45}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}+a_{55}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+a_{44}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=f(r,\ \theta,\ a_{ij})$$

при более общих граничных условиях

$$\varphi\Big|_{\Gamma}=\varphi(s).$$

Ереванский государственный университет
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 XI 1962.

Վ. Ս. Սարգսյան

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Անիզոտրոպ ձողերի ոլորման խնդրի լուծմանը նվիրված են շատ աշխատություններ, որոնց մեջ կարևոր տեղ են գրավում Սեն-Վենանի [1], Վ. Ֆոյխտի [2], Լ. Ս. Լեյբենզոնի [3], Ս. Գ. Լեխնիցկու [4—6] և ուրիշների [7, 8] աշխատությունները։

Հեղինակը փոքր պարամետրի (երկրաչափական պարամետր) օգնությամբ լուծել է ոչ օրթոտրոպ պրիզմայաձև ձողերի ոլորման և ծռման խնդիրները (տե՛ս [9])։

[10] և [11] աշխատություններում լուծված են ուղղագիծ անիզոտրոպիա (ոչ օրթոտրոպ) ունեցող պրիզմայաձև ձողերի ոլորման և ծռման խնդիրները։

Ներկա աշխատության մեջ տրվում է գլանային անիզոտրոպիա (ոչ օրթոտրոպ) ունեցող ձողերի ոլորման խնդրի լուծման եղանակ։ Լուծումը ներկայացված է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի (ֆիզիկական պարամետր)։ Այդ եղանակով՝ չանջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման։

Որպես կիրառություն լուծված է գլանային անիզոտրոպիա ունեցող կորացած ուղղանկյուն կտրվածքով ձողի ոլորման խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saint-Venant B.* Mémoire sur la torsion des prismes. „Mémoires présentés par divers savants a l'academie des Sciences", Sciences math. et phys., **14**, 1856, Paris.
2. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig-Berlin (Teubner), 1928.
3. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов, т. I. Изд. АН СССР, М., 1951.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М—Л, 1950.
5. *Лехницкий С. Г.* Кручение многослойного прямоугольного стержня. „Инженерный сборник", **23**, 1956.
6. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропного кривого бруса. ПММ, **24**, № 3, 1960.
7. *Локшин А. Ш.* К кручению анизотропных призм. Труды Всероссийского съезда математиков в Москве, М—Л, 1928.
8. *Вантории В. Д.* О кручении анизотропных призм, сечение которых ограничено кривой $y^2=k^2x(1-x)^2$. ПММ, **3**, вып. 3, 1939.
9. *Саркисян В. С.* Кручение и изгиб анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. Кандидатская диссертация. МГУ НИИ мех., 1962.
10. *Саркисян В. С.* К решению задачи изгиба анизотропных призматических стержней симметричных профилей. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 5, 1962.
11. *Саркисян В. С.* К решению задачи кручения анизотропных призматических стержней. Известия АН СССР, ОТН (в печати).
12. *Арутюнян Н. Х.* и *Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз (в печати).
13. *Greenhill A. G.* Messenger of Math., vol. 9, 1879, p. 35.
14. *Föppl A.* und *Föppl L.* Drang und Zwang, Bd. II, 1928, s. 96.
15. *Saint-Venant B.* Compt. rend., **87**, 1878, pp. 849 et 893.

16. *Динник А.* Известия Донского политехнического института, Новочеркасск, т. I, стр. 309.

17. *Chakravorti A.* Torsion and bending of an aeolotropic beam having a curtate section. Indian Journ. Theoret. Phys., **7**, 1959, № 1, 17—24.

18. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. Гостехиздат, М., 1956.