

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Я. Попов

К решению плоской контактной задачи
теории упругости при наличии сил
сцепления или трения

В настоящей работе предлагается приближенный метод решения плоской задачи о вдавливании штампа в линейно-деформируемое основание общего типа с учетом сил сцепления или трения по участку контакта.

Хотя все построения выполнены для случая одного участка контакта (с целью сократить формулы), они без каких-либо изменений в существе метода могут быть перенесены и на случай нескольких участков контакта.

1. Введем предварительно следующие обозначения. Длину участка контакта, симметрично расположенного относительно начала координат, будем обозначать через $2a$.

Нормальное контактное напряжение обозначим через $p_1(x)$, а касательное — через $p_2(x)$, причем первое считается положительным, если оно сжимающее, а второе, если оно направлено слева направо (считается приложенным к основанию).

Пусть, далее, $v_0^*(x)$ — вертикальные перемещения поверхностных точек основания от воздействия положительной вертикальной единичной силы, приложенной в начале, а $v_1^*(x)$ — горизонтальные перемещения указанных точек. Будем считать вертикальные (горизонтальные) перемещения положительными, если они направлены сверху вниз (слева направо), тогда вертикальные перемещения поверхностных точек основания от воздействия положительной горизонтальной единичной силы, приложенной в начале, на основании закона взаимности перемещений будут $v_1^*(x)$. Горизонтальные перемещения для тех же точек и от той же силы обозначим через $v_2^*(x)$.

Если считать известными горизонтальные $f_2(x)$ и вертикальные $f_1(x)$ перемещения поверхностных точек основания на участке контакта, то для определения контактных напряжений $p_1(x)$ и $p_2(x)$, очевидно, будем иметь такую систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_{-a}^a v_0^*(x-s) p_1(s) ds + \int_{-a}^a v_1^*(x-s) p_2(s) ds = f_1(x), \\ - \int_{-a}^a v_1^*(x-s) p_1(s) ds + \int_{-a}^a v_2^*(x-s) p_2(s) ds = f_2(x). \end{cases} \quad (1.1)$$

Будем решать эту систему уравнений применительно к основанию общего типа, для которого функции $v_m^*(x)$ ($m = 0, 1, 2$) имеют вид:

$$v_m^*(x) = b_1 v_m\left(\frac{x}{h}\right), \quad v_m(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_m(s)}{s} \cos sy ds, \quad m = 0, 2. \quad (1.2)$$

$$v_1^*(x) = b_2 v_1\left(\frac{x}{h}\right), \quad v_1(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau_1(s)}{s} \sin sy ds, \quad (1.3)$$

причем

$$\tau_m(s) = 1 + O(1), \quad s \rightarrow \infty, \quad m = 0, 1, 2. \quad (1.4)$$

Заметим, что в случае упругого основания, представляющего собой однородный слой, приклеенный к абсолютно жесткому основанию, функция $\tau_m(s)$ ($m = 0, 1, 2$) имеет вид (ср. [1])

$$\begin{aligned} \tau_m(s) &= \frac{(3-4\nu_1) \operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - (-1)^{m/2} s}{(3-4\nu_1) \operatorname{ch}^2 s + s^2 + (1-2\nu_1)^2}, \quad m = 0, 2, \\ \tau_1(s) &= \frac{(3-4\nu_1) \operatorname{sh}^2 s - (1-2\nu_1)^{-1} s^2}{(3-4\nu_1) \operatorname{ch}^2 s + s^2 + (1-2\nu_1)^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

а параметры b_1 и b_2 определяются формулами

$$b_1 = \frac{2(1-\nu_1)^2}{E_1}, \quad b_2 = \frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{E_1}, \quad (1.6)$$

где E_1 и ν_1 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона упругого слоя. Роль параметра h здесь играет толщина слоя.

Используя результаты работы [2], можно установить формулы для функций $\tau_m(s)$ и параметров b_m в случае основания, представляющего собой полупространство с переменным по экспоненциальному закону модулем упругости*.

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \alpha = \frac{a}{h}. \quad (1.7)$$

* Попутно отметим опечатку, содержащуюся в формуле (5.3) работы [2]. Там напечатано $\tau_1^2 \tau_2$, а должно быть

$$\tau_1^2 \tau_2.$$

и следующие обозначения

$$\alpha = \frac{h_1}{h_2}, \quad f_m^*(z) = \frac{1}{h_2} f_m(z/h); \quad p_m^*(z) = h p(z/h), \quad m = 1, 2, \quad (1.8)$$

причем функции $p_m^*(z)$ ($m = 1, 2$) будем называть приведенными контактными напряжениями. Тогда, принимая во внимание (1.2) и (1.3), систему (1.1) можем переписать в таком виде:

$$\begin{cases} \alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} v_0(z-\tau) p_1^*(\tau) d\tau - \int_{-\alpha}^{\alpha} v_1(z-\tau) p_2^*(\tau) d\tau = f_1^*(z) & (|z| < \alpha) \\ - \int_{-\alpha}^{\alpha} v_1(z-\tau) p_1^*(\tau) d\tau + \alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} v_2(z-\tau) p_2^*(\tau) d\tau = f_2^*(z). \end{cases} \quad (1.9)$$

2. Ниже будет предложен приближенный способ решения системы (1.9), основанный на выделении в ядрах уравнений этой системы сингулярных (в смысле обращения в бесконечность или разрыва непрерывности) частей и аппроксимации оставшихся регулярных (по крайней мере непрерывных) частей многочленами.

Применяя, например, способ выделения особенности и аппроксимации регулярной части, описанный в работе [3], к функциям (1.2), а также к функции (1.3) с учетом формулы 3.522(2) из [4], будем иметь

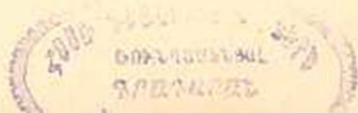
$$\pi v_m(y) \approx \ln \frac{1}{|y|} + l_m(y), \quad m = 0, 2; \quad \pi v_1(y) \approx \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y + l_1(y), \quad (2.1)$$

где

$$l_m(y) = \sum_{r=0}^{2N} \frac{C_r^{(m)}}{r!} y^r; \quad m = 0, 1, 2; \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

При этом

$$\begin{cases} C_r^{(m)} = -(-1)^{r-2} \int_0^{A_m^*} [1 - \tau_m(s)] s^{r-1} ds, & r = 2j; \quad C_r^{(m)} = 0, \\ & r = 2j-1; \quad m = 0, 2; \quad j = 1, 2, 3, \dots, \\ C_0^{(m)} = \int_0^{A_m^*} \frac{\tau_m(s)}{s} ds - C_0 - \ln A_m^*, & m = 0, 2; \quad C_0^{(1)} = 0; \\ C_r^{(1)} = -(-1)^{\frac{r-1}{2}} \int_0^{A_1^*} [1 - \tau_1(s)] s^{r-1} ds, & r = 2j-1; \quad C_r^{(1)} = 0, \\ & r = 2j; \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.3)$$



Числа A_m^* ($m=0, 1, 2$) представляют собой те наименьшие значения аргумента s , при которых функции $\varepsilon_m(s)$ практически не отличаются в силу (1.4) от единицы. Как показывают вычисления, например, в случае основания в виде упругого однородного слоя (при $\nu=0,3$), когда справедливы формулы (1.5), достаточно взять $A_0^*=A_2^*=3,6$ и $A_1^*=4,2$, чтобы отклонение упомянутых функций от единицы было порядка 3% и меньше.

Подставив полученные выше приближенные представления (2.1) для ядер в систему (1.9), получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\kappa}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi - \tau|} p_1^*(\tau) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi - \tau) p_2^*(\tau) \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\kappa l_0(\xi - \tau) p_1^*(\tau) + l_1(\xi - \tau) p_2^*(\tau)] d\tau = f_1^*(\xi), \quad (2.4) \\ & \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi - \tau) p_1^*(\tau) + \frac{\kappa}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi - \tau|} p_2^*(\tau) \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-l_1(\xi - \tau) p_1^*(\tau) + \kappa l_2(\xi - \tau) p_2^*(\tau)] d\tau = f_2^*(\xi). \end{aligned}$$

Полученная система, как ниже будет показано, допускает точное решение.

Если ввести комплекснозначную функцию

$$\chi = p_1^* + i p_2^*, \quad (2.5)$$

то систему (2.4) можно записать компактнее:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi - \tau) + \frac{i\kappa}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi - \tau|} \right] \chi(\tau) d\tau = F(\xi), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} F(\xi) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [-i\kappa l_0(\xi - \tau) p_1^*(\tau) + \kappa l_2(\xi - \tau) p_2^*(\tau) - l_1(\xi - \tau) \chi(\tau)] d\tau + \\ & + i f_1^*(\xi) - f_2^*(\xi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если считать теперь правую часть соотношения (2.6) функцией заданной, то оно будет представлять собой интегральное уравнение (с точностью до постоянных), решенное* И. Я. Штаерманом ([5], стр. 77). Решение этого уравнения содержится также и у С. Г. Михлина

* Как было сообщено Я. Л. Нудельманом на семинаре по механике сплошных сред при Одесском инженерно-строительном институте (1955 г.) к интегральному уравнению (2.6) сводится разбираемая здесь задача в случае основания в виде упру-

([7], стр. 153). Правда, этот автор решает не непосредственно уравнение (2.6), а то сингулярное интегральное уравнение, которое получается из него в результате формального дифференцирования обеих частей по $\bar{z}$.

Используя результаты, полученные упомянутыми авторами, можем записать:

$$\chi(\bar{z}) = \frac{F'(\bar{z})}{1-z^2} + \frac{z}{i\pi(1-z^2)\varphi_1(\bar{z})} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi_1(t) F'(t) dt}{t-\bar{z}} + \frac{Cz\varphi_1^{-1}(\bar{z})}{\pi(1-z^2-1)}, \quad (2.8)$$

где

$$\varphi_1(t) = (x+t)^{\frac{1}{2}+\gamma} (x-t)^{\frac{1}{2}-\gamma}; \quad (2.9)$$

$$C = \text{const}; \quad \gamma = -i\mu, \quad \mu = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{z+1}{z-1}; \quad (-\pi < \text{Im} \ln z < \pi). \quad (2.10)$$

Заметим попутно, что из (2.10) вытекает следующее:

$$\text{ctg} \pi\gamma = ix; \quad \cos \pi\gamma = \frac{z}{1-z^2-1}; \quad \sin \pi\gamma = -\frac{i}{1-z^2-1}. \quad (2.11)$$

3. На этом мы прервем рассмотрение системы (2.4) и приступим к доказательству необходимых для дальнейшего соотношений, которые могут представлять и самостоятельный математический интерес:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s^m \varphi_1(s)}{s-x} ds = \frac{x^m \varphi_1(x)}{\text{ctg} \pi\gamma} - \frac{P_{m+1}^+(x)}{\cos \pi\gamma}, \quad |x| < z; \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s^m}{\varphi_1(s)} \frac{ds}{s-x} = -\frac{\text{tg} \pi\gamma x^m}{\varphi_1(x)} + \frac{P_{m-1}^-(x)}{\cos \pi\gamma}, \quad [P_{-1}^-(x) = 0]; \quad |x| < z. \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s^n}{\varphi_1(s)} ds = \frac{z^n a_n^-(\gamma)}{\cos \pi\gamma}; \quad (3.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} \text{sgn}(x-s) + \frac{\text{ctg} \pi\gamma}{\pi} \ln \frac{1}{x-s} \right] \frac{ds}{\varphi_1(s)} = C_1, \quad |x| < z, \quad (3.4)$$

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \sec \pi\gamma - \text{cosec} \pi\gamma \left[\ln 2z + \psi_3\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) - \psi_3(1) \right]; \quad (3.5)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \psi_3\left(\frac{1}{2} + i\mu\right) = \frac{\pi}{2} \text{th} \pi\mu, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu = 0. \quad (3.6)$$

того однородного и изотропного полупространства. М. Г. Крейн сообщил мне, что он получил решение этого уравнения, опираясь на результат, полученный им в работе [6]. Однако, я не имел возможности познакомиться с этим неопубликованным его решением.

Здесь функция $\varphi_{\gamma}(x)$ определяется формулой (2.9), а $\psi_{\gamma}(x)$ означает пси-функцию Эйлера [4]. Многочлены $P_k^{\pm}(x)$ определяются следующей формулой:

$$P_k^{\pm}(x) = \sum_{j=0}^k a_j^{\pm}(\gamma) x^j x^{k-j}. \quad (3.7)$$

Коэффициенты $a_j^{\pm}(\gamma)$ входят в разложение в степенные ряды в окрестности нуля следующих функций:

$$\varphi^{+}(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{+}(\gamma) x^j, \quad (3.8)$$

$$\varphi^{-}(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}+\gamma} (1-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{-}(\gamma) x^j \quad (3.9)$$

и представляются соответственно формулами

$$a_m^{-}(\gamma) = \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)_r \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)_{m-r}}{(m-r)! r!},$$

$$a_m^{+}(\gamma) = \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^r \left(-\frac{1}{2} - \gamma\right)_r \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)_{m-r}}{(m-r)! r!}, \quad (3.10)$$

где под символом $(z)_n$ понимается следующее:

$$(z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1), \quad (z)_0 = 1. \quad (3.11)$$

Доказательство записанных соотношений начнем с (3.2). Предварительно условимся выбирать ту ветвь функции

$$\varphi_{\gamma}(z) = (z+z)^{\frac{1}{2}+\gamma} (z-z)^{\frac{1}{2}-\gamma},$$

которая определена в плоскости с выключенным отрезком $(-z, z)$ и принимает на верхнем берегу разреза $(-z, z)$ вещественные значения, а на нижнем те же значения, помноженные на $-e^{2\pi i \gamma}$.

В окрестности точки ∞ имеем разложение

$$\frac{1}{\varphi_{\gamma}(z)} = \frac{ie^{-\pi i \gamma}}{z} \left(1 + a_1^{-}(\gamma) \frac{z}{z} + a_2^{-}(\gamma) \frac{z^2}{z^2} + \cdots \right). \quad (3.12)$$

Учитывая предыдущее, нетрудно убедиться (см., например, [8], стр. 262) в справедливости следующего равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{s^m}{\varphi_{\gamma}(s)} \frac{ds}{s-z} = -\frac{z^m}{\varphi_{\gamma}(z)} + ie^{-\pi i \gamma} P_{m-1}^{-}(z). \quad (3.13)$$

Контур L ограничивает область, содержащую отрезок $(-z, z)$. Точка z лежит вне указанной области.

Стягивая, далее, контур L к отрезку $(-z, z)$, получим из (3.13) следующее выражение для интеграла $I(z)$ типа Коши:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^m ds}{\varphi_+(s)(s-z)} = \frac{e^{i\pi\gamma}}{2 \cos \pi\gamma} \frac{z^m}{\varphi_+(z)} - \frac{i}{2 \cos \pi\gamma} P_{m-1}^-(z), \quad (3.14)$$

Пользуясь этой формулой, легко найти значения интеграла $I(z)$ при $z \rightarrow x \in (-x, x)$ [сверху $I^+(x)$ и снизу $I^-(x)$]. Воспользовавшись затем формулой Сохоцкого:

$$I^+(x) - I^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^m}{\varphi_+(s)} \frac{ds}{s-x},$$

нетрудно убедиться в справедливости формулы (3.2).

Формула (3.1) доказывается аналогично. Соотношение (3.3) получим из (3.2), положив там

$$m = n + 1, \quad x = 0.$$

При доказательстве соотношения (3.4) будем исходить из формулы (3.14). Нетрудно убедиться, что при $m=0$ последнюю можно представить в таком виде

$$\frac{ie^{-i\pi\gamma} \cos \pi\gamma}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{\varphi_+(s)(z-s)} = \frac{1}{\varphi_+(z)}. \quad (3.15)$$

Обе части полученного соотношения проинтегрируем сперва по линии, соединяющей точку $-x$ и некоторую точку z , а затем по линии (z, z) и результаты сложим.

Выполнение указанных операций приводит к следующему соотношению

$$\frac{2ie^{-i\pi\gamma} \cos \pi\gamma}{z} \int_{-x}^z \frac{\ln(z-s)}{\varphi_+(s)} ds = F_-(z), \quad (3.16)$$

$$F_-(z) = \left(\int_{-x}^z + \int_z^z \right) \frac{1}{\varphi_+(s)} ds + C_-, \quad (3.17)$$

Здесь C_- — произвольная постоянная. Знак „+“ относится к случаю, когда линии интегрирования вместе с точкой z лежат в верхней полуплоскости, а минус — когда в нижней полуплоскости (верхний берег разреза $[-x, x]$ причисляем к верхней полуплоскости, а нижний — к нижней). Необходимость различать эти два случая диктуется наличием точки ветвления на бесконечности у функции, стоящей в левой части соотношения (3.16).

Функцию (3.17) можно представить и в таком виде:

$$F_-(z) = C_- + \int_{\Gamma} \frac{ds}{\varphi_+(s)} + 2J(z), \quad (3.18)$$

где

$$J(z) = \int_a^z (z+s)^{-2} (z-s)^{2-1} ds, \quad \left(z = \frac{1}{2} + \gamma\right). \quad (3.19)$$

Приняв во внимание, что $\int$ означает интегрирование соответственно по верхнему, по нижнему берегу разреза $(-x, x)$ в направлении от $-x$ к x , а также формулу (3.3) при $n=0$, вместо (3.18) будем иметь

$$F_+(z) = C_+ + \frac{\pi}{\cos \pi \gamma} + 2J(z), \quad F_-(z) = C_- - \frac{\pi e^{i\pi \gamma}}{\cos \pi \gamma} + 2J(z). \quad (3.20)$$

Неизвестные пока постоянные $C_{\pm}$ найдем ниже, сравнив поведение левой и правой части соотношения (3.16) при $z \rightarrow \infty$. Что касается поведения при $z \rightarrow \infty$ левой части, то оно определяется следующим соотношением

$$\ln(z-s) = \ln z + O(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Чтобы выяснить поведение правой части при $z \rightarrow \infty$, необходимо выполнить некоторые преобразования над функцией (3.19), которую запишем предварительно в таком виде

$$J(z) = ie^{-i\pi \gamma} \int_a^z (z+s)^{-2} (s-z)^{2-1} ds.$$

В результате выполнения замены

$$s = z \left(1 + 2 \frac{\tau^{1/2}}{1 - \tau^{1/2}}\right)$$

будем иметь

$$J(z) = \frac{ie^{-i\pi \gamma}}{z} \int_0^1 \frac{d\tau}{1 - \tau^{1/2}}, \quad \left(\tau = \frac{z-x}{z+x}\right). \quad (3.22)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{1 - \tau^{1/2}} = \frac{\tau^{1/2-1}}{1 - \tau^{1/2}} + \frac{1 - \tau^{1/2-1}}{1 - \tau^{1/2}},$$

получим

$$J(z) = ie^{-i\pi \gamma} [\ln(z+x) - \ln 2x + \Phi(z)], \quad (3.23)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{1 - \tau^{1/2-1}}{1 - \tau^{1/2}} d\tau.$$

Откуда

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{1 - \tau^{1/2-1}}{1 - \tau^{1/2}} d\tau.$$

Сделав в последнем интеграле замену $\tau = t^2$ и воспользовавшись известными представлениями пси-функции Эйлера ([4], стр. 336 и 338), найдем

$$\Phi(\infty) = ie^{-i\pi\gamma} \left[\psi_s(1) - \psi_s\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \right]. \quad (3.24)$$

Из формул (3.23) и (3.24) вытекает следующая асимптотика:

$$J(z) = ie^{-i\pi\gamma} \left[\ln z - \ln 2\alpha + \psi_s(1) - \psi_s\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) + o(1) \right], \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.25)$$

Принимая во внимание последнее, а также (3.18), (3.20) и (3.21), нетрудно сравнить поведение обеих частей равенства (3.16), когда $z \rightarrow \infty$, оставаясь все время в верхней (нижней) полуплоскости. В результате указанного сравнения получим формулы

$$\left. \begin{aligned} C_+ &= 2ie^{-i\pi\gamma} \left[\ln 2\alpha + \psi_s\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) - \psi_s(1) \right] - \pi \sec \pi\gamma, \\ C_- &= 2ie^{-i\pi\gamma} \left[\ln 2\alpha + \psi_s\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) - \psi_s(1) \right] + \pi \sec \pi\gamma e^{-2i\pi\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Условившись, далее, выбирать такую ветвь логарифма, что

$$\ln(z-s) \rightarrow \ln|x-s|, \quad z \rightarrow x \pm i0, \quad x > s,$$

$$\ln(z-s) \rightarrow \ln|x-s| \pm i\pi, \quad z \rightarrow x \pm i0, \quad x < s,$$

будем устремлять в (3.16) z к верхнему (нижнему) берегу разреза $(-\alpha, \alpha)$, в результате обнаружим

$$2e^{-i\pi\gamma} \cos \pi\gamma \frac{i}{\pi} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\ln(x-s)}{\varphi_{\gamma}(s)} ds + i\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{ds}{\varphi_{\gamma}(s)} \right] = \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\infty} \right) \frac{ds}{\varphi_{\gamma}(s)} + C_+, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} 2e^{-i\pi\gamma} \cos \pi\gamma \frac{i}{\pi} \left[\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\ln(x-s)}{\varphi_{\gamma}(s)} ds - i\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{ds}{\varphi_{\gamma}(s)} \right] = \\ = -e^{-2i\pi\gamma} \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\infty} \right) \frac{ds}{\varphi_{\gamma}(s)} + C_-. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Наконец, сложив (3.27) с (3.28) и приняв во внимание (3.26), получим нужные соотношения (3.4) и (3.5).

Чтобы доказать соотношение (3.6), воспользуемся разложением 6.352(1) из [4]. В результате замены в нем x на $0.5 + i\mu$ и отделения мнимой части обнаружим, что

$$\operatorname{Im} \psi_s\left(\frac{1}{2} + i\mu\right) = \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \mu^2}.$$

В справедливости соотношения (3.6) легко теперь убедиться, если принять во внимание известное ([4], стр. 50) разложение $\operatorname{th} z$ на простые дроби.

Попутно отметим, что использование тех же разложений позволяет вывести формулу

$$\operatorname{Re} \psi_p \left(\frac{1}{2} + i\mu \right) = -C_3 - \frac{1}{0.5^2 + \mu^2} + \frac{0.5^2}{\mu} \operatorname{th} \pi \mu + (0.5^2 + \mu^2) \psi_p(\mu). \quad (3.29)$$

Отметим попутно, что для вычисления $\psi_p(\mu)$ оказывается удобным разложение

$$\psi_p(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k [(k+0.5)^2 + \mu^2]}, \quad \operatorname{Im} \mu = 0. \quad (3.30)$$

4. Возвратимся теперь к решению системы (2.4).

Начнем с преобразования выражения (2.2). С этой целью подставим туда $\xi - \tau$ вместо y . Последующее разложение правой части в ряд Маклорена по τ приводит к формуле:

$$I_m(\xi - \tau) = \sum_{j=0}^{2N} P_{2N-j}^{(m)}(\xi) \tau^j, \quad P_{2N-j}^{(m)}(\xi) = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{r=0}^{2N-j} \frac{C_{j+r}^{(m)}}{r!} \xi^r, \quad (4.1)$$

$$m = 0, 1, 2.$$

Введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} z_k &= \int_{-a}^a \chi(\tau) \tau^k d\tau = x_k + iy_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ x_k, y_k &= \int_{-a}^a \rho_{1,2}^*(\tau) \tau^k d\tau \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

и подставив (4.1) в (2.7), получим

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{2N} [-i P_{2N-j}^{(0)}(\xi) x_j + P_{2N-j}^{(1)}(\xi) y_j - z^{-1} P_{2N-j}^{(1)}(\xi) z_j] + \\ &\quad + if_1^*(\xi) - f_2^*(\xi). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Учтем, далее, следующее обстоятельство.

Рассматриваемая контактная задача с силами сцепления может представить практический интерес, пожалуй, только для штампа с плоским основанием. Поэтому, чтобы излишне не загромождать формулы, в дальнейшем ограничимся именно этим случаем.

Если на штамп действует произвольная система сил, то он может получить осадку δ_1 , горизонтальное перемещение δ_2 и поворот на угол β . Следовательно, в этом случае

$$f_1(x) = \delta_1 + \beta x, \quad f_2(x) = \delta_2$$

и потому на основании (1.8)

$$f_1^*(z) = \frac{z}{\pi} (\bar{z}_1^* + \bar{z}_2^*), \quad f_2^*(z) = \frac{z}{\pi} \bar{z}_2^*, \quad (4.4)$$

где

$$\bar{z}_1^* = \frac{\pi \delta_1}{h_1}, \quad \bar{z}_2^* = \frac{\pi \delta_2}{h_1}, \quad \bar{z}_3^* = \frac{\pi}{h_1} h_2^*, \quad (4.5)$$

Взяв производную по z от функции, определяемой формулой (4.3), с учетом (4.4) и подставив ее в правую часть формулы (2.8), в результате выполнения интегрирования с использованием формул (3.1) и (2.11) будем иметь

$$Z(z) = -\frac{z(z^2-1)^{-1/2}}{\pi \varphi_1(z)} \left\{ \sum_{j=0}^{2N-1} [x_j R_j^{(0)}(z) + i y_j R_j^{(2)}(z)] - \bar{z}^* P_1^+(z) - C \right\}, \quad (4.6)$$

$$R_j^{(m)}(z) = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{r=1}^{2N-1} \frac{P_r^+(z)}{(r-1)!} \left(C_{j+r}^{(m)} - \frac{i}{z} C_{j+1}^{(1)} \right), \quad m=0, 2, \quad (4.7)$$

Если известны числа z_j ($j=0, 1, 2, \dots, 2N-1$), то формула (4.6) согласно (2.5) и (1.8) определяет искомые напряжения. При неизвестных z_j уравнение (4.6) представляет собой систему двух интегральных уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами.

В сущности переход от системы (2.6) к системе (4.6) представляет собой применение идеи метода регуляризации Карлемана-Векуа [8], стр. 162).

Для отыскания неизвестных чисел z_n ($n=0, 1, 2, \dots$) следует обе части соотношения (4.6) помножить на z^n ($n=0, 1, \dots$) и проинтегрировать по z в интервале $(-z, z)$ с учетом полученных ранее соотношений (3.2) и (2.11) и обозначений (4.2), (4.7) и (3.7). В результате будем иметь

$$z_n = -z^n \left\{ \sum_{j=0}^{2N-1} [B_{j,n}^{(0)} x_j + B_{j,n}^{(2)} i y_j] - [C a_n^-(\gamma) + z A_1^{(n)} \bar{z}^*] \right\}, \quad (4.8)$$

$$n=0, 1, 2, \dots, 2N-1,$$

где

$$B_{j,n}^{(m)} = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{r=1}^{2N-1} \frac{r!}{(r-1)!} A_r^{(n)} \left(C_{j+r}^{(m)} - \frac{i}{z} C_{j+1}^{(1)} \right), \quad m=0, 2, \quad (4.9)$$

$$A_r^{(n)} = \sum_{k=0}^r a_k^-(\gamma) a_{r-k-2}^-(\gamma). \quad (4.10)$$

Из полученной системы уравнений можно исключить произвольную постоянную C , а также x_0 и y_0 .

Действительно, пусть P означает центральную приложенную к штампу вертикальную силу, а T —горизонтальную силу. Тогда из рассмотрения равновесия штампа с учетом (4.2) и (1.8) нетрудно обнаружить, что

$$x_0 = P, \quad y_0 = T. \quad (4.11)$$

Отметим еще следующее

$$A_r^{(0)} = \sum_{k=0}^r a_k^+ a_{m-k}^- = 0, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.12)$$

Чтобы убедиться в последнем соотношении следует обратить внимание на то, что числа $A_r^{(0)}$ представляют собой коэффициенты степенного ряда, получаемого перемножением ([9], стр. 372) ряда (3.8) на ряд (3.9). С другой стороны, упомянутый ряд представляет собой разложение в окрестности нуля функции $\varphi^+(x)\varphi^-(x)$, тождественно равной единице.

Положив в формуле (4.8) $n=0$ и приняв во внимание (3.10), (4.12) и (4.9), обнаружим, что

$$z_0 = C = P + iT. \quad (4.13)$$

Учитывая (4.2) и (4.13) и отделяя в (4.8) мнимую часть от вещественной, получим полную систему алгебраических уравнений для определения x_n и y_n при заданных P , T и β^* .

Оказывается, что указанную систему можно разбить на две независимо решаемые системы, состоящие из уравнений количеством в 2 раза меньшем, чем первая.

Для доказательства этого будем считать, что $z > 1$ (например, в случае упругого слоя $2 < z < \infty$), тогда согласно (2.10) $\operatorname{Im} z = 0$, а

$$\operatorname{Re} \gamma = 0. \quad (4.14)$$

Далее, элементарный анализ формул (3.10) показывает, что $a_m^{\pm}(\gamma)$ при четных значениях m представляют собой четные полиномы от γ , и наоборот. Следовательно, в силу (4.14) справедливо следующее:

$$\operatorname{Re} a_m^{\pm}(\gamma) = 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots; \quad \operatorname{Im} a_m^{\pm}(\gamma) = 0, \quad m = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (4.15)$$

Следствием последнего является такое правило для коэффициентов, определяемых формулой (4.10)

$$\operatorname{Re} A_r^{(k)} = 0, \quad r+k=1, 3, 5, \dots; \quad \operatorname{Im} A_r^{(k)} = 0, \quad r+k=0, 2, 4, 6, \dots \quad (4.16)$$

Если учесть (4.16), а также (2.3), то можно обнаружить, что для коэффициентов (4.9) справедливо аналогичное правило:

$$\operatorname{Re} B_{j,n}^{(m)} = 0, \quad j+n=1, 3, 5, \dots; \quad \operatorname{Im} B_{j,n}^{(m)} = 0, \quad j+n=0, 2, 4, 6, \dots \quad (4.17)$$

Приняв во внимание (4.15–4.17), произведем отделение в уравнениях (4.8) вещественной части от мнимой. В результате обнаружим, что неизвестные x_{2n-1} ($n=1, 2, \dots, N$) и y_{2n} ($n=1, 2, \dots, N-1$) образуют одну систему уравнений (в правые части которых входят β^* , T), а остальные неизвестные x_{2n} ($n=1, 2, \dots, N-1$) и y_{2n-1} ($n=1, 2, \dots, N$) образуют другую, независимую от первой систему уравнений (в правых частях которых фигурирует P).

Если принять во внимание структуру правых частей указанных систем, то станет ясной целесообразность разыскивать неизвестные в следующем виде:

$$\begin{cases} x_{2n-1} = X_{2n-1}^{(0)}T + X_{2n-1}^{(1)}\beta^*, & y_{2n} = X_{2n}^{(0)}T + X_{2n}^{(1)}\beta^*, \\ x_{2n} = Y_{2n}P, & y_{2n-1} = Y_{2n-1}P. \end{cases} \quad (4.18)$$

Приняв во внимание последнее, можем упомянутые выше независимые системы уравнений представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_{2n-1}^{(m)} = -x^{2n-1} \left(\sum_{k=1}^N B_{2k-1, 2n-1}^{(0)} X_{2k-1}^{(m)} - \sum_{k=1}^{N-1} B_{2k, 2n-1}^{(2)} X_{2k}^{(m)} + f_{2n-1}^{(m)} \right), \\ n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} X_{2n}^{(m)} = -x^{2n} \left(\sum_{k=1}^N B_{2k-1, 2n}^{(0)} X_{2k-1}^{(m)} + \sum_{k=1}^{N-1} B_{2k, 2n}^{(2)} X_{2k}^{(m)} + f_{2n}^{(m)} \right), \\ n = 1, 2, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{2n-1} = -x^{2n-1} \left(\sum_{k=1}^{N-1} B_{2k, 2n-1}^{(0)} Y_{2k} + \sum_{k=1}^N B_{2k-1, 2n-1}^{(2)} Y_{2k-1} + f_{2n-1}^{(2)} \right), \\ n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} Y_{2n} = -x^{2n} \left(\sum_{k=1}^{N-1} B_{2k, 2n}^{(0)} Y_{2k} - \sum_{k=1}^N B_{2k-1, 2n}^{(2)} Y_{2k-1} + f_{2n}^{(2)} \right), \\ n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где для свободных членов введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} f_{2n-1}^{(0)} &= - (B_{0, 2n-1}^{(0)} - a_{2n-1}), & f_{2n}^{(0)} &= B_{0, 2n}^{(2)} - a_{2n}, \\ f_{2n-1}^{(1)} &= -x A_1^{(2n-1)}, & f_{2n}^{(1)} &= -x A_1^{(2n)}, \\ f_{2n-1}^{(2)} &= B_{0, 2n-1}^{(0)} - a_{2n-1}, & f_{2n}^{(2)} &= B_{0, 2n}^{(0)} - a_{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Здесь и ниже точки над буквами a , A , B означают, что вычисленные соответственно по формулам (3.10), (4.10), (4.9) величины получаются в этом случае мнимыми и что нужно брать только число, стоящее коэффициентом у мнимой единицы.

Найдя $X_n^{(m)}$ и Y_n путем решения систем (4.19), (4.20) и подставив их в (4.18), получим значения коэффициентов x_n и y_n , содержащихся в формуле (4.6). Отделив там мнимую от вещественной части, что нетрудно сделать, если учесть вещественность числа a_n ($-i\mu$) при четных n и мнимость при нечетных, а также

$$|z^{-1}(\xi)|_{\xi=i\mu} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \left[\cos \left(\mu \ln \frac{x+\xi}{x-\xi} \right) + i \sin \left(\mu \ln \frac{x+\xi}{x-\xi} \right) \right], \quad (4.22)$$

найдем приведенные (нормальное и касательное) контактные напряжения.

Поскольку контактные напряжения будут выражаться через функции вида (4.22), то, очевидно, что в малых окрестностях концов участка контакта упомянутые напряжения, стремясь к бесконечности,

будут сколь угодно раз менять знак. Это обстоятельство выявлено впервые в работах Н. И. Мусхелишвили [10] и В. М. Абрамова [11] на аналогичной контактной задаче для упругого однородного полупространства.

Результат этих авторов следует из (4.6), если положить там все коэффициенты $C_n^{(m)}$ равными нулю.

5. Следует заметить, что в приложениях рассматриваемой задачи гораздо больше интересуются не контактными напряжениями, а перемещениями $\hat{z}_1$ и $\hat{z}_2$ и поворотом штампа β при действии заданной нагрузки.

Поэтому займемся выводом формул для определения указанных величин. При этом в наших построениях решающую роль будет играть доказанное в п. 3 соотношение (3.4).

Интегрирование обеих частей уравнения (2.6) по $\bar{z}$ в интервале $(-\alpha, \alpha)$ с весом $\varphi_{-1}(\bar{z})$ дает

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \chi(\tau) d\tau \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\tau - \bar{z}) - \frac{i\tau}{\pi} \ln \frac{1}{|\tau - \bar{z}|} \right] \frac{d\bar{z}}{\varphi_{-1}(\bar{z})} = - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\bar{z})}{\varphi_{-1}(\bar{z})} d\bar{z}. \quad (5.1)$$

Левая часть (5.1), если учесть (3.4), (4.2) и (4.11), принимает вид $(P + iT) C_{-1}$. Для преобразования правой части следует подставить туда (4.3) с учетом (4.4) и выполнить интегрирование, воспользовавшись формулами (3.3), (2.11).

Таким образом, вместо (5.1) будем иметь

$$(P + iT) C_{-1} = \frac{ix^2}{1 - x^2} \left\{ \sum_{j=0}^{2N-1} (K_j^{(0)} x_j + i K_j^{(2)} y_j) - \hat{z}_1^* + i \hat{z}_2^* + 2i \beta^* x_2 + K_{2N}^{(0)} x_{2N} + i K_{2N}^{(2)} y_{2N} \right\}. \quad (5.2)$$

$$K_j^{(m)} = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{r=0}^{2N-j} \frac{a_r(-\gamma)}{r!} \left(C_{j+r}^{(m)} - \frac{i}{x} C_{j+r}^{(1)} \right). \quad (5.3)$$

Чтобы найти x_{2N} и y_{2N} , обратимся к системе (4.8). Полагая там $n = 2N$, найдем

$$z_{2N} = -x^{2N} \left\{ \sum_{j=0}^{2N-1} [B_{j, 2N}^{(0)} x_j + B_{j, 2N}^{(2)} i y_j] - [z_0 a_{2N}(\gamma) + x A_1^{(2N)} \beta^*] \right\}.$$

Отделяя здесь мнимую от вещественной части, пользуясь при этом (4.16) и (4.17), получим

$$x_{2N} = -x^{2N} \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} B_{2n, 2N}^{(0)} x_{2n} - \sum_{n=1}^N B_{2n-1, 2N}^{(2)} y_{2n-1} - P[a_{2N}(\gamma) - B_{0, 2N}^{(0)}] \right\},$$

$$y_{2N} = -x^{2N} \left\{ \sum_{n=1}^N B_{2n-1, 2N}^{(0)} x_{2n-1} + \sum_{n=1}^{N-1} B_{2n, 2N}^{(2)} y_{2n} - \right.$$

$$- \left[T(a_{2N}(\gamma) - B_{0,2N}^{(2)}) + \alpha \beta^2 A_1^{(2N)} \right] \Bigg\}. \quad (5.4)$$

Пользуясь формулой (3.5) и принимая во внимание $\gamma = -i\mu$, а также (2.11), (3.6) и (3.19), нетрудно обнаружить, что

$$C_{-1} = C_{\beta} = \frac{iC_0}{\sinh \pi \mu} = -\frac{i\alpha^2}{1 - \alpha^2} C_0, \quad (5.5)$$

где

$$\alpha^2 C_0 = \ln 2\alpha - \frac{1}{0.5^2 + \mu^2} + \frac{0.5^2}{\mu} \operatorname{th} \pi \mu + (0.5^2 + \mu^2) \zeta_2(\mu). \quad (5.6)$$

Отметим еще, что согласно (5.3), (3.10) и (2.3)

$$K_{2N}^{(m)} = \frac{C_{2N}^{(m)}}{(2N)!}, \quad m = 0, 2, \quad (5.7)$$

а также

$$\operatorname{Im} K_j^{(m)} = 0, \quad j = 2n; \quad \operatorname{Re} K_j^{(m)} = 0, \quad j = 2n + 1, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.8)$$

Подставим теперь (5.5), (5.7) и (5.4) в соотношение (5.2), после чего, приняв во внимание (4.5), (5.8), отделим там мнимую часть от вещественной. В результате получим два уравнения, из которых найдем δ_1 и δ_2 :

$$\delta_1 = \frac{b_1 P}{\pi} \left\{ K_0^{(0)} - C_0 + \frac{\alpha^{2N} C_{2N}^{(0)}}{(2N)!} \left[a_{2N}(\gamma) - B_{0,2N}^{(0)} \right] + \sum_{n=1}^{N-1} \left[K_{2n}^{(0)} - \frac{\alpha^{2N} C_{2N}^{(0)}}{(2N)!} B_{2n,2N}^{(0)} \right] Y_{2n} - \sum_{n=1}^N \left[K_{2n-1}^{(2)} - \frac{\alpha^{2N} C_{2N}^{(0)}}{(2N)!} B_{2n-1,2N}^{(2)} \right] Y_{2n-1} \right\}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = \frac{b_1 T}{\pi} & \left\{ K_0^{(2)} - C_0 + \frac{\alpha^{2N} C_{2N}^{(2)}}{(2N)!} [a_{2N}(\gamma) - B_{0,2N}^{(2)}] + \right. \\ & + \sum_{n=1}^N \left[K_{2n}^{(0)} - \frac{\alpha^{2N} C_{2N}^{(2)}}{(2N)!} B_{2n,2N}^{(0)} \right] X_{2n-1} + \\ & \left. + \sum_{n=1}^{N-1} \left[K_{2n}^{(0)} - \frac{\alpha^{2N} C_{2N}^{(2)}}{(2N)!} B_{2n,2N}^{(2)} \right] X_{2n}^{(0)} \right\}. \quad (5.10) \end{aligned}$$

При получении формулы (5.10) было учтено следующее соотношение

$$\begin{aligned} \beta^2 \left\{ \alpha [2n + A_1^{(2N)}] + \sum_{n=1}^N \left[K_{2n-1}^{(0)} - \frac{C_{2N}^{(2)} \alpha^{2N}}{(2N)!} B_{2n-1,2N}^{(0)} \right] X_{2n-1}^{(1)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{N-1} \left[K_{2n}^{(0)} - \frac{C_{2N}^{(2)} \alpha^{2N}}{(2N)!} B_{2n,2N}^{(2)} \right] X_{2n}^{(1)} \right\} = 0. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Чтобы убедиться в его справедливости, следует принять во внимание следующее обстоятельство. Пусть на штамп действует только момент M и, стало быть, $P = T = 0$. В этом случае, очевидно,

$$\delta_1 = \delta_2 = 0, \quad f_2^*(\xi) \equiv 0, \quad f_1^*(\xi) = \frac{\pi}{\pi} \xi^* \xi. \quad (5.12)$$

Принимая во внимание $P=T=0$, вместо (4.18) будем иметь

$$x_{2n-1} = \xi^* X_{2n}^{(1)}, \quad y_{2n} = \xi^* X_{2n}^{(1)}, \quad x_{2n} = y_{2n-1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

Подстановка (5.13) в (5.2) и использование (5.4) приводит к соотношению (5.11).

Формулы для угла наклона штампа получим, воспользовавшись моментным условием равновесия для штампа

$$M = \int_a^b p_1(x) x dx = h \int_{-\pi}^{\pi} p_1^*(\xi) \xi d\xi = h x_1.$$

Откуда, если учесть равенства

$$x_1 = X_1^{(0)} T + X_1^{(1)} \xi^*, \quad \xi^* = \frac{\pi}{b_1} h \xi,$$

вытекающие из (4.18) и (4.5), и следует формула:

$$\xi = \frac{b_1}{\pi h^2 X_1^{(1)}} (M - h X_1^{(0)} T). \quad (5.14)$$

6. В заключение остановимся на учете сил кулоновского трения по участку контакта.

Как это обычно принято, будем считать, что для вдавливаемого в основание тела имеет место предельное состояние в том смысле, что

$$p_2(x) = k_* p_1(x), \quad (6.1)$$

где k_* — коэффициент трения.

Использование (6.1) позволяет согласно (1.1) свести задачу к одному интегральному уравнению:

$$\int_a^b [v_0^*(x-s) + k_* v_1^*(x-s)] p_1(s) ds = f_1(x), \quad |x| \leq a. \quad (6.2)$$

Последующая замена

$$x = h\xi, \quad s = h\tau, \quad p_1^*(\xi) = h p_1(h\xi), \quad f^*(\xi) = \frac{1}{h_1} f_1(h\xi), \quad \alpha_* = \frac{b_1}{h_2 k_*} \quad (6.3)$$

и использование приближенных представлений (2.1) приводит интегральное уравнение (6.2) к виду

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\xi - \tau) + \frac{\alpha_*}{\pi} \ln \frac{1}{|\xi - \tau|} \right] p_1(\tau) d\tau = F(\xi), \quad (6.4)$$

$$F(z) = \frac{z^*}{\pi} \left[f^*(z) - \int_{-\gamma}^{\gamma} l(z-\tau) p_1(\tau) d\tau \right]. \quad (6.5)$$

При этом

$$\left. \begin{aligned} l(y) &= l_0(y) + \frac{1}{z_*} l_1(y) = \sum_{r=0}^{2N} \frac{C_r^*}{r!} y^r, \\ C_r^* &= \begin{cases} C_r^{(0)}, & r = 2n, \\ -z_*^{-1} C_r^{(1)}, & r = 2n+1, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Воспользовавшись формулой (2.8) (положив там предварительно

$$\chi(\tau) = p_1(\tau), \quad z = -iz_*, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} z_*$$

и приняв во внимание (6.5) и (6.6)), также как и в случае задачи со сдвинутым, сведем решение интегрального уравнения (6.2) к системе $2N-1$ алгебраических уравнений аналогичной структуры.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 12-1 1963

Գ. ՅԱՆ ՊԱՐՈՒՄ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ՝ ԿՑՈՐԴՄԱՆ ԿԱՍ ՇՓՄԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Ներկա հոդվածում առաջարկվում է ընդհանուր տիպի զծարհն զեֆորմացիայի ենթարկվող հիմքի մեջ դրոշմային ներճնշման հարթ խնդրի լուծման մոտավոր մեթոդ՝ կոնտակտի տեղամասում կցորդման կամ շփման առկա հաշվառմամբ: Մոտավոր մեթոդի էությունը առաջված լինակցող համասարտմաների կորիզների սինգուլյար մասերի անջատելու և սինգուլյար մասերը բազմանդամներով մոտարկելու մեջ է: Թեև բոլոր կառուցումները կոտարված են մեկ տեղամասով կոնտակտի զեփքի համար, բայց դրանք կարող են ապրամվել նաև մի քանի տեղամասերով կոնտակտի զեփքի վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухаров К. Е. К вопросу деформации основания конечной толщины. Механика грунтов, Сб. тр. НИИОПС, № 34, 1958.
2. Попов Г. Я. К теории изгиба плиты на упругом неоднородном полупространстве. Изв. вузов, Стр.-ио и арх.-ра, № 11, 1959.
3. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 3, 1961.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.

5. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.
6. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, **100**, № 3, 1955.
7. *Михлин С. Г.* Интегральные уравнения. Гостехиздат, 1949.
8. *Мухелишвили Н. И.* Сиггулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1946.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Гостехтеориздат, 1951.
10. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
11. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. ДАН СССР, **17**, № 4, 1937.