

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. Мовсисян

О нестационарных вынужденных колебаниях
цилиндрических оболочек

Наипростейшей задачей нестационарных вынужденных колебаний (или перехода через резонанс) является случай, когда «частота» возмущающей силы является линейной функцией времени. Расчет вынужденных колебаний в этом случае сводится к неопределенному интегралу. Впервые А. П. Филиппов [1] вычислил этот интеграл для линейной упругой системы с одной степенью свободы путем сведения его к известным табулированным функциям, с учетом затухания колебаний в материале. В дальнейшем А. П. Филипповым и Е. Г. Голоскоковым были получены решения для систем со многими и бесконечными (стержни, пластинки) степенями свободы [2,3]. Имеются также решения других авторов [4,5], где расчет колебаний приведен к иным функциям.

В нашей работе [6], используя идею А. П. Филиппова, расчет вынужденных колебаний ортотропных круговых цилиндрических оболочек сводится к известной табулированной функции [7] для случая, когда «частота» возмущающей силы есть линейная функция времени. В работе [6] рассеяние энергии в материале при колебаниях учитывается на основании гипотезы Фохта.

В настоящей работе внутреннее трение при колебаниях учитывается на основании гипотезы Е. С. Сорокина [8]. Расчет вынужденных колебаний сводится к другой табулированной функции [9] (между функциями [7] и [9] существует простая зависимость). Получены условия, при которых учет затухания по обоим гипотезам дает одинаковые результаты.

Приведены некоторые результаты экспериментального исследования.

§ 1. Уравнение колебаний оболочки

Пусть имеется тонкая круговая цилиндрическая оболочка толщиной h и радиусом r . Будем принимать, что материал оболочки ортотропен и главные направления упругости материала совпадают с главными линиями кривизны оболочки, которые принимаются в качестве координатных линий. За координатные параметры берутся от-

ношение длины дуги образующей к радиусу оболочки (x) и центральный угол, отсчитываемый от некоторой образующей (y). Будем пользоваться теорией пологих оболочек [10, 11]. Наряду с общими предположениями теории пологих оболочек, принимаются еще следующие:

а) в уравнениях движения пренебрегаются инерционные члены, соответствующие перемещениям вдоль образующей (u) и по дуге (v) оболочки;

б) в соотношениях упругости затухание учитывается в членах с радиальным перемещением (w).

Ввиду принятых предположений будем иметь следующие уравнения движения и соотношения упругости соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial M_2}{\partial y} + r N_2 &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} - r N_1 &= 0, \\ T_2 + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + r \left(Z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) &= 0, \\ T_1 &= \frac{1}{r} \left[c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - c_{12} \left(1 \pm \frac{i\psi_{12}}{2\pi} \right) w \right], \\ T_2 &= \frac{1}{r} \left[c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - c_{22} \left(1 \pm \frac{i\psi_{22}}{2\pi} \right) w \right], \\ S &= \frac{c_{40}}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{r^2} \left[D_{11} \left(1 \pm \frac{i\psi_{11}}{2\pi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \left(1 \pm \frac{i\psi_{12}}{2\pi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ M_2 &= -\frac{1}{r^2} \left[D_{12} \left(1 \pm \frac{i\psi_{12}}{2\pi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \left(1 \pm \frac{i\psi_{22}}{2\pi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ H &= \frac{2D_{00}}{r^2} \left(1 \pm \frac{i\psi_{00}}{2\pi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В (1.1) и (1.2) сохраняются обозначения [11], кроме того приняты еще следующие обозначения: t — время, ρ — плотность материала оболочки, i — мнимая единица, ψ_{ij} — коэффициенты поглощения энергии в соответствующих направлениях (численные значения ψ_{ij} — учетверенные отношения поглощенной энергии за один цикл колебания к полной энергии деформации за тот же цикл), знак плюс перед ψ_{ij} соответствует нагружающей ветви кривой напряжение—деформация, знак минус — разгрузке.

Из (1.1) и (1.2) получаем следующую систему уравнений колебаний в перемещениях

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - c_{12} \left(1 \pm \frac{i\psi_{12}}{2\pi} \right) \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - c_{22} \left(1 \pm \frac{i\psi_{22}}{2\pi} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\
c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - c_{22} \left(1 \pm \frac{i\psi_{22}}{2\pi} \right) w - \frac{1}{r^2} \left\{ D_{11} \left(1 \pm \frac{i\psi_{11}}{2\pi} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \right. \\
+ 2 \left[D_{12} \left(1 \pm \frac{i\psi_{12}}{2\pi} \right) + 2D_{66} \left(1 \pm \frac{i\psi_{66}}{2\pi} \right) \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\
\left. + D_{22} \left(1 \pm \frac{i\psi_{22}}{2\pi} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} - \rho h r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + r^2 Z = 0.
\end{aligned} \quad (1.3)$$

Принимая

$$\begin{aligned}
u &= -c_{22}(c_{12} + c_{66}) \left(1 \pm \frac{i\psi_{22}}{2\pi} \right) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + c_{12} \left(1 \pm \frac{i\psi_{12}}{2\pi} \right) \left(c_{22} \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + c_{66} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right), \\
v &= -c_{12}(c_{12} + c_{66}) \left(1 \pm \frac{i\psi_{12}}{2\pi} \right) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \\
&+ c_{22} \left(1 \pm \frac{i\psi_{22}}{2\pi} \right) \left(c_{11} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + c_{66} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right), \\
w &= c_{11}c_{66} \frac{\partial^3 F}{\partial x^4} + (c_{11}c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + c_{22}c_{66} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4},
\end{aligned} \quad (1.4)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям (1.3), а из третьего для неизвестной F получим

$$\begin{aligned}
\left(K_1 \pm L_1' \frac{i}{2\pi} \right) \frac{\partial^8 F}{\partial x^8} + \left(K_2 \pm L_2' \frac{i}{2\pi} \right) \frac{\partial^8 F}{\partial x^6 \partial y^2} + \left(K_3 \pm L_3' \frac{i}{2\pi} \right) \frac{\partial^8 F}{\partial x^4 \partial y^4} + \\
+ \left(K_4 \pm L_4' \frac{i}{2\pi} \right) \frac{\partial^8 F}{\partial x^2 \partial y^6} + \left(K_5 \pm L_5' \frac{i}{2\pi} \right) \frac{\partial^8 F}{\partial y^8} + r^2 \left(P_1 \pm Q_1 \frac{i}{2\pi} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \\
+ \frac{i}{2\pi} r^2 Q_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + r^4 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(P_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + P_3 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
\left. + P_4 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) = r^4 Z(x, y, t),
\end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned}
K_1 &= D_{11}P_2, \quad K_2 = D_{11}P_3 + 2(D_{12} + 2D_{66})P_2, \\
K_3 &= D_{11}P_4 + D_{22}P_2 + 2(D_{12} + 2D_{66})P_3, \quad K_4 = D_{22}P_3 + 2(D_{12} + 2D_{66})P_4, \\
K_5 &= D_{22}P_1, \quad L_1' = \psi_{11}K_1, \quad L_2' = \psi_{11}D_{11}P_3 + 2(D_{12}\psi_{12} + 2D_{66}\psi_{66})P_2, \\
L_3' &= \psi_{11}D_{11}P_4 + \psi_{22}D_{22}P_2 + 2(\psi_{12}D_{12} + 2\psi_{66}D_{66})P_3, \\
L_4' &= \psi_{22}D_{22}P_3 + 2(\psi_{12}D_{22} + 2\psi_{66}D_{66})P_4, \quad L_5' = \psi_{22}K_5,
\end{aligned} \quad (1.6)$$

$$Q_1 = c_{00}(c_{11}c_{22}\psi_{22} - c_{12}^2\psi_{12}), \quad Q_2 = c_{12}c_{22}c_{00}(\psi_{12} - \psi_{22}),$$

$$P_1 = c_{00}(c_{11}c_{22} - c_{12}^2), \quad P_2 = c_{11}c_{00}, \quad P_3 = c_{11}c_{00} - c_{12}^2 - 2c_{12}c_{00}, \quad P_4 = c_{00}c_{00}.$$

Уравнение (1.5) есть уравнение вынужденных колебаний цилиндрической оболочки с учетом внутреннего сопротивления в материале по Сорокину.

§ 2. Свободно опертая замкнутая оболочка

Рассмотрим оболочку, которая свободно оперта на концах, т. е.

$$\bar{w} = v = T_1 = M_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{l}{r}, \quad (2.1)$$

где l — длина оболочки.

Пусть действующая на оболочку нагрузка имеет вид

$$Z = z(x, y) \cos\left(\frac{\delta t^2}{2} + \varepsilon_0\right), \quad (2.2)$$

где δ — скорость мгновенной частоты возмущающей силы, ε_0 — начальная фаза.

Будем искать решение (1.5) в виде ряда по собственным формам свободных колебаний шарнирно опертой оболочки, т. е.

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}(t) \sin i_m x \cos ny, \quad (2.3)$$

где

$$i_m = \frac{m\pi r}{l}.$$

Разлагая (2.2) в ряд по тем же функциям, из (1.5), (2.2) и (2.3) имеем следующую систему уравнений для неизвестных

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \left(\omega_{mn}^2 - \chi_{mn} \frac{i}{2\pi}\right) f_{mn} = z_{mn} \cos\left(\frac{\delta t^2}{2} + \varepsilon_0\right), \quad (2.4)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{K_1 i_m^8 + K_2 i_m^6 n^2 + K_3 i_m^4 n^4 + K_4 i_m^2 n^6 + K_5 n^8 + r^2 P_1 i_m^4}{\Delta_{mn}}, \quad (2.5)$$

$$\chi_{mn} = \frac{L_1 i_m^8 + L_2 i_m^6 n^2 + L_3 i_m^4 n^4 + L_4 i_m^2 n^6 + L_5 n^8 + r^2 Q_1 i_m^4 + r^2 Q_2 i_m^2 n^2}{\Delta_{mn}}, \quad (2.6)$$

$$z_{mn} = \frac{2r^5}{\pi l \Delta_{mn}} \int_0^{\frac{l}{r}} \int_0^{2\pi} z \sin i_m x \cos ny dx dy, \quad (2.7)$$

$$z_{m0} = \frac{r^5}{\pi l \Delta_{m0}} \int_0^{\frac{l}{r}} \int_0^{2\pi} z \sin i_m x dx dy,$$

$$\Delta_{mn} = h\rho r^4 [P_2 \lambda_m^4 + P_3 i_m^2 n^2 + P_4 n^4]. \quad (2.8)$$

Для краткости, опуская индексы, (2.4) можно представить в виде

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 \left(1 \pm \frac{i_1}{2\pi} \right) f = z \cos \left(\frac{\delta t^2}{2} + z_0 \right), \quad (2.9)$$

где

$$\gamma = \frac{\lambda'}{\omega^2}.$$

Характеристическому уравнению однородной части уравнения (2.9) соответствуют следующие четыре корня

$$p_{1,2} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}} \pm i \right] \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}}, \quad (2.10)$$

$$p_{3,4} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}} \pm i \right] \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}}.$$

Решения (2.9), соответствующие корням $p_{3,4}$, будем отбрасывать, потому что они противоречат физической сущности затухания. Двум оставшимся корням соответствует следующее решение однородного уравнения

$$f^{(0)} = C_1 e^{-\alpha t} \sin \beta t + C_2 e^{-\alpha t} \cos \beta t, \quad (2.11)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}} \right], \quad \beta = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}}}. \quad (2.12)$$

Частное решение (2.9) можно найти методом вариаций произвольных постоянных. Опуская все промежуточные выкладки, напомним решение (2.9) после удовлетворения нулевым начальным условиям*

$$f = \frac{z}{\beta} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \cos \left(\frac{\delta \tau^2}{2} + z_0 \right) \sin \beta(t-\tau) d\tau. \quad (2.13)$$

Заметим, что в [6], где затухание учитывалось на основании гипотезы Фохта, для неизвестной f (f имеет одно и то же значение здесь и в [6]) имели

$$f = \frac{z}{k} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2}(t-\tau)} \cos \left(\frac{\delta \tau^2}{2} + z_0 \right) \sin k(t-\tau) d\tau, \quad (2.14)$$

* Нулевые начальные условия $f(0) = f'(0) = 0$ (или $w(t=0) = \frac{\partial w}{\partial t}(t=0) = 0$)

не существенны и принимаются в основном для краткости записи.

где $k^2 = \omega^2 - \frac{\chi^2}{4}$, а χ — функция вида (2.6), где вместо коэффициентов поглощения энергии стоят коэффициенты, характеризующие затухание в материале [6].

Сравнивая (2.13) и (2.14), замечаем, что учет рассеяния энергии в материале по Фохту или по Сорокину дает одинаковые результаты, если

$$\chi = \sqrt{2} \cdot \omega \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{\chi'^2}{4\pi^2 \omega^4}}}, \quad (2.15)$$

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\chi'^2}{4\pi^2 \omega^4}}},$$

т. е. между коэффициентами, характеризующими затухание, и коэффициентами поглощения энергии существуют связи в виде (2.15). Эти условия имеют очень простой вид для случая изотропных оболочек

$$\left(\text{для изотропных оболочек } B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}, \right. \\ \left. B_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{12} = \mu_{66} = \mu, \quad \psi_{11} = \psi_{22} = \psi_{12} = \psi_{66} = \psi \right).$$

Они имеют вид

$$\mu = \frac{\psi}{2\pi\omega}, \\ \omega^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\mu^2 \omega^2}{4} \right). \quad (2.16)$$

При выводе (2.16) использован тот факт, что ψ — малая величина и квадратом ее можно пренебречь по сравнению с единицей.

Первое соотношение (2.16) показывает, что коэффициент, характеризующий затухание в материале, не постоянен для данного материала, а зависит от частоты колебаний. Такой результат подтверждается опытом [8].

Введя новые переменные

$$\xi = \frac{1+i}{2\sqrt{\delta}} (\delta t - \beta - ix), \quad \xi_0 = -\frac{1+i}{2\sqrt{\delta}} (\beta + ix), \quad (2.17)$$

$$\eta = \frac{1+i}{2\sqrt{\delta}} (\delta t + \beta - ix), \quad \eta_0 = \frac{1+i}{2\sqrt{\delta}} (\beta - ix),$$

(2.13) можно представить в виде

$$f(t) = |A(t)| \cos \left(\frac{\delta t^2}{2} + \varepsilon_0 + \varepsilon(t) \right), \quad (2.18)$$

где

$$A(t) = \frac{(1+i) \cdot z}{2\beta \sqrt{\delta}} \left(e^{-\gamma^2} \int_{\gamma_0}^{\gamma} e^{z^2} d\gamma - e^{-z^2} \int_{z_0}^z e^{z^2} dz \right), \quad (2.19)$$

$$\varepsilon(t) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} A(t)}{\operatorname{Re} A(t)}. \quad (2.20)$$

Интегралы в скобках (2.19) выражаются через табулированную функцию [9].

Если обозначить интеграл вероятности

$$W(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{z^2} dz \right), \quad (2.21)$$

то для $A(t)$ получим

$$A(t) = \frac{(1-i)z\sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{\delta}} \left(e^{\frac{z_0^2}{2} - \frac{z^2}{2}} W(z_0) - W(z) + W(\gamma) - e^{\frac{\gamma_0^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}} W(\gamma_0) \right), \quad (2.22)$$

Обозначим

$$f_{mn}^{(st)} = \frac{z_{mn}}{\omega_{mn}}. \quad (2.23)$$

Отношение

$$g_{mn} = \frac{|A_{mn}(t)|}{f_{mn}^{(st)}} \quad (2.24)$$

подобно [1,2] назовем динамическим коэффициентом вынужденных колебаний.

Из (2.3), (2.18) и (2.24) имеем

$$F = \sum_{m,n} g_{mn}(t) f_{mn}^{(st)} \sin \lambda_m x \cos n y \cos \left(\frac{\delta t^2}{2} + z_0 + z_{mn}(t) \right). \quad (2.25)$$

Имея F , по формулам (1.1), (1.2) и (1.4) можно найти все расчетные величины.

Таким образом, нахождение перемещений и динамических напряжений под воздействием поперечной нагрузки с линейной „частотой“ сводится к вычислению ряда по функциям собственных форм колебаний. Коэффициенты ряда определяются через статические коэффициенты (т. е. разложения функции F в ряд по тем же функциям, когда Z действует статически), умноженные на динамические коэффициенты вынужденных колебаний, которые выражаются через табулированную функцию [9].

§ 3. Цилиндрическая панель

Пусть имеется цилиндрическая панель с пролетом l и углом раскрытия φ_0 , которая всеми четырьмя кромками опирается и несет нагрузку (2.2).

Будем искать решение (1.5) в виде

$$F = \sum_{m,n} f_{mn}(t) \sin \lambda_m x \sin \mu_n y, \quad \left(\mu_n = \frac{n\pi}{y_0} \right). \quad (3.1)$$

Разлагая в ряд $Z(x, y, t)$ по функциям $\sin \lambda_m x \sin \mu_n y$, из (1.5), (2.2) и (3.1) для неизвестных $f_{mn}(t)$ получим

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + \left(\omega_{mn}^2 + \frac{i \dot{\lambda}_{mn}}{2\pi} \right) f_{mn} = z_{mn} \cos \left(\frac{it^2}{2} + \varepsilon_0 \right), \quad (3.2)$$

где

$$\omega_{mn}^2 = \frac{K_1 \lambda_m^8 + K_2 \lambda_m^6 \mu_n^2 + K_3 \lambda_m^4 \mu_n^4 + K_4 \lambda_m^2 \mu_n^6 + K_5 \mu_n^8 + r^2 P_1 \lambda_m^4}{\Delta_{mn}}, \quad (3.3)$$

$$z_{mn} = \frac{L_1 \lambda_m^8 + L_2 \lambda_m^6 \mu_n^2 + L_3 \lambda_m^4 \mu_n^4 + L_4 \lambda_m^2 \mu_n^6 + L_5 \mu_n^8 + r^2 Q_1 \lambda_m^4 + r^2 Q_2 \lambda_m^2 \mu_n^2}{\Delta_{mn}}, \quad (3.4)$$

$$z_{mn} = \frac{4r^3}{t y_0 \Delta_{mn}} \int_0^{t y_0} \int_0^y z \sin \lambda_m x \sin \mu_n y dx dy, \quad (3.5)$$

$$\Delta_{mn} = h \varepsilon r^4 [P_2 \lambda_m^4 + P_3 \lambda_m^2 \mu_n^2 + P_4 \mu_n^4]. \quad (3.6)$$

Так как уравнения (3.2) ничем не отличаются от (2.4), то и решения их имеют вид (2.18) с новыми постоянными, поэтому решения (3.2) здесь не приводятся.

В качестве вывода отметим, что с увеличением кривизны панели динамический коэффициент вынужденных колебаний увеличивается.

§ 4. Экспериментальные исследования

Целью экспериментальных исследований была проверка выводов работы [6], а также определение максимального значения относительного динамического коэффициента вынужденных колебаний при переходе через резонанс для разных частот и различных образцов. Относительный динамический коэффициент вынужденных колебаний определяется как отношение динамического коэффициента вынужденных колебаний ((1.19) работы [6])^{*} к динамическому коэффициенту установившихся резонансных колебаний $\left(g_{mn}^0 = \frac{\omega_{mn}}{\lambda_{mn}} \right)$, т. е.

$$q_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^{(0)} \omega_{mn}}{2k_{mn}} \left| \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \right| e^{\frac{\varepsilon_{0mn}^2 - \varepsilon_{mn}^2}{2}} W(\varepsilon_{0mn}) - W(\varepsilon_{mn}) + \\ + W(\varepsilon_{mn}) - e^{\frac{\varepsilon_{0mn}^2 - \varepsilon_{mn}^2}{2}} W(\varepsilon_{0mn}) \Big|, \quad (4.1)$$

* Как станет ясным в дальнейшем, здесь удобно учитывать затухание на основании гипотезы Фохта.

В ходе решения основной задачи определяются собственные частоты и коэффициенты, характеризующие затухание испытываемых образцов.

Испытанию подверглись стальные замкнутые цилиндрические оболочки — изотропные и конструктивно ортотропная (с внешней стороны кольцевая, ребристая). Для упругих характеристик принималось

$$\left| \frac{E}{\rho} = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{сМ}}{\text{гК}} \quad \text{и} \quad \nu = 0,3. \right.$$

Упругие коэффициенты для ребристой оболочки определялись по формулам [11,12].

Свободное опирание оболочки осуществлялось следующим образом: оболочки насаживались на специальные диски, которые обеспечивали внутреннее опирание оболочки по краям, а снаружи обжимались хомутами.

Мы здесь приведем данные только одного образца. Один из образцов (изотропный) имел следующие размеры: $r = 58 \text{ мм}$, $l = 360 \text{ мм}$, $h = 1 \text{ мм}$.

Первые расчетные частоты этого образца следующие:

$$\left(\gamma_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} \right), \quad \gamma_{12} = 763 \text{ гц}, \quad \gamma_{13} = 880 \text{ гц}, \quad \gamma_{14} = 1084 \text{ гц}. \quad (4.2)$$

Экспериментальные значения частот определялись по осциллограммам установившихся резонансных колебаний, а формы колебаний — прощупыванием.

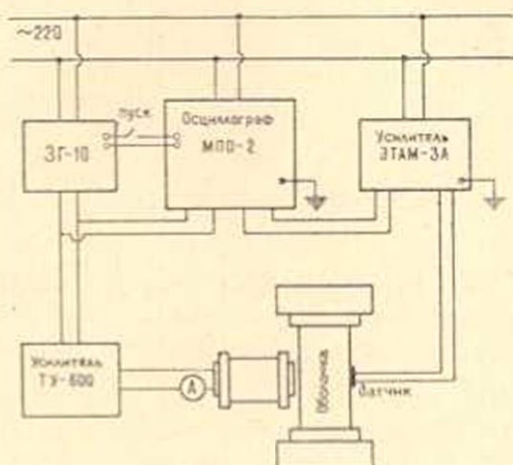
Получены следующие собственные частоты:

$$\gamma_{12} = 760 \text{ гц}, \quad \gamma_{13} = 920 \text{ гц}, \quad \gamma_{14} = 1040 \text{ гц}. \quad (4.3)$$

Принципиальная схема экспериментальной установки воспроизведена на фиг. 1.

Оболочки раскачивались электромагнитом. Сигнал с пьезокристаллического датчика подавался для усиления и электрошно-стабилизированный усилитель, а потом на пидейф.

Переход через резонанс осуществлялся вращением рукоятки звукового генератора в определенном отрезке изменения частоты. Для определения скорости перехода на пленку, помимо основного процесса, записывались колебания отметчика времени и закон изменения вращающа рукоятки ЗГ.



Фиг. 1.

Расчетные значения $q_{mn}^{(max)}$ определялись по (4.1) с той разницей, что вместо коэффициента, характеризующего затухание в материале, пользуемся суммарным коэффициентом затухания, обусловленным, помимо внутреннего трения в материале, еще и граничными условиями. Этот коэффициент определялся по осциллограммам свободных затухающих колебаний.

Время, при котором q_{mn} получает максимальное значение, принималось приближенным, но весьма удачна формула Каца [13], которая в наших обозначениях имеет вид

$$\frac{\lambda t}{k_{mn}} = 1 \pm \frac{2,1708 \sqrt{\delta}}{k_{mn} \left(1 + \frac{0,14 \lambda_{mn}}{\sqrt{\delta}} \right)^2}. \quad (4.4)$$

Экспериментальные значения $q_{mn}^{(max)}$ получаются по осциллограммам установившихся резонансных колебаний и по осциллограммам переходных процессов.

В табл. 1 приведено несколько значений $q_{13}^{(max)}$ (т. е. для наименьшей частоты) для разных скоростей перехода. Суммарный коэффициент затухания ($\lambda_{13}^{(sum)}$) равен $21,55 \text{ сек}^{-1}$.

Таблица 1

δ	$q_{13}^{(эксп)}$	$q_{13}^{(расч)}$	Расхождение в %
299	0,84	0,78	7,7
359	0,78	0,76	2,8
502	0,75	0,70	7,1
739	0,69	0,64	7,3
897	0,66	0,60	10,4
1047	0,65	0,58	13,1
1257	0,60	0,56	7,8
1571	0,53	0,52	1,6

Анализ полученных осциллограмм показывает, что экспериментально найденные величины мало отличаются от расчетных и имеют место выводы работы [6].

Լ. Ս. Մովսիսյան

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում ուսումնասիրվում են օրթոարոդ դրանային թաղանթների տա-
սանումները, որը թաղանթի վրա ազդող ուժի «համախառնությունը» դժա-
շին ֆունկցիա է ժամանակից: Թաղանթի նյութում էներգիայի ցրումը առա-
նումների ժամանակ հաշվի է առնվում բառ [8]: Տատանումների հաշվարկումը
բերվում է հայտնի ֆունկցիայի [9], որի համար կա աղյուսակ: Ստացված են
դաշմաններ, որոնց ղեկարում, անկախ նրանից, բն թաղանթի նյութի ներքին
շփումը հաշվի է առնվում [6], բն [9] աշխատություններում նշված ձևերով,
ստացվում են նույն արդյունքները:

Դիտարկված են ազատ հենված եզրերով փակ և բաց թաղանթների ղեկ-
բերը:

Էրոպերիմենտալ հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ տեսական
եզրակացությունները ճիշտ են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Из-во АН УССР, Киев, 1956.
2. Филиппов А. П., Голодоскоков Е. Г. К вопросу о переходе через резонанс упругих систем. Труды ХПИ им. В. И. Ленина (серия инженерно-физическая), **14**, 1958.
3. Голодоскоков Е. Г. Колебания прямоугольных плит при переходе через резонанс. Труды ХПИ им. В. И. Ленина (серия инженерно-физическая), **15**, 1959.
4. Корчев Б. Г. О пусковом резонансе. Сб. Исследования по динамике сооружений, М., 1957.
5. Шейнин И. С. Прохождение через резонанс линейной системы с несколькими степенями свободы. Строительная механика и расчет сооружений, № 3, 1960.
6. Мовсисян Л. А. О переходе через собственные резонансные частоты цилиндрической оболочки. ДАН АрмССР, **35**, № 3, 1962.
7. Карпов К. А. Таблицы функций $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области. Изд. АН СССР, 1954.
8. Сорокин Е. С. Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебание. Сб. Исследования по динамике сооружений, М., 1951.
9. Фидеева В. Н. и Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. Гостехиздат, М., 1954.
10. Власов В. Э. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М., 1949.
11. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
12. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
13. Кац А. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. Инженерный сборник, **3**, вып. 2, 1947.