

Н. О. Гулканян

О вычислении сумм некоторых рядов

В настоящей заметке дан способ вычисления сумм рядов

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2}}{(2k-1)^{2n-1}}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n-1}} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} k\pi}{k^{2n-1}} \quad (n=1,2,\dots),$$

встречающихся [1, 2, 3] при решении некоторых задач теории упругости. В качестве иллюстрации вычислены значения сумм этих рядов для $n=1$ и $n=2$.

Вычислены также суммы рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2}}.$$

§ 1. Рассмотрим выражение

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{(-1)^{k+p}}{b^2 p^2 + k^2 a^2} \sin \frac{p\pi y}{a} \right) \sin \frac{k\pi x}{b}. \quad (1.1)$$

Произведя суммирование, получим

$$F(x, y) = \frac{\pi^2}{4a^3 b} xy - \frac{\pi}{2a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi x}{b} \\ (0 < x < +b, \quad 0 < y < +a). \quad (1.2)$$

Здесь были использованы значения рядов [4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\sin kx}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} \left[x - \pi \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi} \right] \quad (-\pi < x < +\pi). \quad (1.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < +\pi). \quad (1.4)$$

С другой стороны, меняя порядок суммирования в повторном ряде выражения (1.1) и используя значение ряда [4]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1} \sin kx}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi} \quad (-\pi < x < +\pi) \quad (1.5)$$

будем иметь

$$F(x, y) = \frac{\pi}{2a^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p} \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{a}} \sin \frac{p\pi y}{a}; \quad (0 < x < b; 0 < y < a). \quad (1.6)$$

Приравнявая (1.1) и (1.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2ab} xy = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} \sin \frac{k\pi x}{b} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \sin \frac{k\pi y}{a} \quad (0 < x < b; 0 < y < a). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Непосредственной подстановкой значения $x=b$ в соотношение (1.7) убеждаемся, что оно имеет место и при этом значении x , за исключением одной точки ($x=b, y=a$).

Покажем, что перестановка порядка суммирования в повторном ряде (1.1) не меняет его величину.

Ряд (1.1) рассмотрим как ряд Фурье функции $F(x, y)$ по $\sin \frac{k\pi x}{b}$.

Проинтегрируем (1.1) по x от нуля до x

$$\begin{aligned} \frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+p+1}}{p} \frac{1}{b^2 p^2 + a^2 k^2} \sin \frac{p\pi y}{a} \right) \cos \frac{k\pi x}{b} = \\ = \int_0^x F(x, y) dx = \Phi(x, y). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Поменяем порядок суммирования в повторном ряде (1.8), что допустимо в силу его абсолютной сходимости

$$\frac{b}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+p+1}}{b^2 p^2 + a^2 k^2} \cos \frac{k\pi x}{b} \right) \sin \frac{p\pi y}{a} = \Phi(x, y). \quad (1.9)$$

Продифференцируем теперь ряд (1.9) по x

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+p}}{b^2 p^2 + a^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{b} \right) \sin \frac{p\pi y}{a} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = F(x, y). \quad (1.10)$$

Ряд (1.9) можно было дифференцировать по x почленно в интервале $0 \leq x < b$, поскольку в этом интервале повторный ряд (1.10) равномерно сходится по x (см. 1.5), а также равномерно сходится [5] ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+p}}{b^2 p^2 + a^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{b}.$$

Приравнявая выражения (1.1) и (1.10), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{(-1)^{k+p}}{b^2 p^2 + a^2 k^2} \sin \frac{p\pi y}{a} \right) \sin \frac{k\pi x}{b} = \\ & = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(-1)^{k+p}}{b^2 p^2 + a^2 k^2} \sin \frac{k\pi x}{b} \right) \sin \frac{p\pi y}{a}, \end{aligned}$$

что и доказывает возможность изменения порядка суммирования в повторном ряде (1.1).

При $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$ из (1.7) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b}{2a}} = \frac{\pi}{4}. \quad (1.11)$$

Если $a = b$, то из (1.11) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}. \quad (1.12)$$

§ 2. Покажем, что можно вычислить ряды

$$\begin{aligned} S_{4n-1}^{(1)} &= \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2}}{(2k-1)^{4n-1}}, & S_{4n-1}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-1}} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi}, \\ S_{4n-1}^{(3)} &= \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} k\pi}{k^{4n-1}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

для любого n (n —любое целое положительное число).

В дальнейшем примем $a = b = 1$.

Интегрируя выражение (1.7) $2n-1$ раз по x от нуля до x и $2n-2$ раза по y от нуля до y , найдем

$$\frac{\pi}{2} \frac{x^{2n} y^{2n-1}}{(2n)! (2n-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} \times \\ \times \{M_k(y) N_k(x) + P_k(x) P_k(y)\}, \quad (n=2, 3, \dots) \quad (2.2)$$

где

$$M_k(z) = -\frac{z^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ -\frac{z^{2n-5}}{(2n-5)!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ \times \left[\dots + \frac{1}{(k\pi)^2} \left(-z + \frac{1}{k\pi} \operatorname{sh} k\pi z \right) \right] \Bigg\}, \\ N_k(z) = \frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ \frac{z^{2(n-2)}}{[2(n-2)]!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ \times \left[\dots - \frac{1}{(k\pi)^2} (1 - \cos k\pi z) \right] \Bigg\}, \\ P_k(z) = -\frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ -\frac{z^{2(n-2)}}{[2(n-2)]!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ \times \left[\dots + \frac{1}{(k\pi)^2} (-1 + \operatorname{ch} k\pi z) \right] \Bigg\}, \\ R_k(z) = \frac{z^{2n-3}}{(2n-3)!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ \frac{z^{2n-5}}{(2n-5)!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ \times \left[\dots - \frac{1}{(k\pi)^2} \left(y - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi z \right) \right] \Bigg\}.$$

Для четной степени x у получаем

$$\frac{\pi}{2} \frac{(xy)^{2n}}{[(2n)!]^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} \times \\ \times \{ \Phi_k(y) \Psi_k(x) + \Phi_k(x) \Psi_k(y) \} \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2.3)$$

Здесь

$$\Phi_k(z) = -\frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ -\frac{z^{2(n-2)}}{[2(n-2)]!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ \times \left[\dots + \frac{1}{(k\pi)^2} (-1 + \operatorname{ch} k\pi z) \right] \Bigg\}, \\ \Psi_k(z) = \frac{z^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ \frac{z^{2(n-2)}}{[2(n-2)]!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ \times \left[\dots - \frac{1}{(k\pi)^2} (1 - \cos k\pi z) \right] \Bigg\}.$$

Подобным же образом имеем

$$\frac{\pi}{2} \frac{x^{2n+1} y^{2n}}{(2n+1)! (2n)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ P_k(y) \left[\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{(k\pi)^2} R_k(x) \right] + \right. \\ & \left. + N_k(y) \left[-\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{1}{(k\pi)^2} M_k(x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для нечетной степени x у будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{(xy)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{(k\pi)^2} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} \times \\ &\times \{U_k(y) V_k(x) + U_k(x) V_k(y)\}, \quad (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} U_k(z) &= -\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ -\frac{z^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ &\times \left[\dots + \frac{1}{(k\pi)^2} \left(-z + \frac{\operatorname{sh} k\pi z}{k\pi} \right) \right] \Bigg\}, \\ V_k(z) &= \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \left\{ \frac{z^{2n-3}}{(2n-3)!} - \frac{1}{(k\pi)^2} \times \right. \\ &\times \left[\dots - \frac{1}{(k\pi)^2} \left(z - \frac{\sin k\pi z}{k\pi} \right) \right] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Ряды в (2.2)–(2.5) равномерно сходятся в области $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$.

Подставляя в (2.5) $x=1$, $y=1$, выразим $S_{4n-1}^{(2)}$ через суммы $S_3^{(2)}, \dots, S_{4n-5}^{(2)}$ и через известные ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2n+2}}, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{4n}}$ (коэффициенты при всех суммах вида $S_{4n+1}^{(2)}$ ($n=1, 2, \dots$) обращаются в нуль). Итак, если известны суммы $S_3^{(2)}, \dots, S_{4n-5}^{(2)}$, то из (2.5) при $x=1$, $y=1$ можем определить значения и для $S_{4n-1}^{(2)}$.

Соотношение (2.2) при $x=1$, $y=1$ позволяет определить значение

$$2 \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{4n-3}} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-3}} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2}, \quad (2.6)$$

если уже определены $S_3^{(2)}, \dots, S_{4n-5}^{(2)}$, а также выражения

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{4n-7}} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} + \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-7}} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2}, \\ & 2 \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{4n-5}} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} - \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-5}} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

Выражение (2.6) будет использовано в дальнейшем. Для вычисления рядов типа $S_{4n-1}^{(1)}$ подставим в (2.3) $x=1$, $y=1$. При этом $S_{4n-1}^{(1)}$ выражается через $S_3^{(2)}, \dots, S_{4n-5}^{(2)}$ и через (2.6).

Далее подставим в (2.4) $x=1$, $y=1$, откуда определим выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-1}} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - 2 \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^{4n-1}} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi}. \quad (2.7)$$

Используя определенные ранее значения $S_{4n-1}^{(1)}$ и $S_{4n-1}^{(2)}$, после некоторых преобразований из (2.11) получим значение $S_{4n-1}^{(3)}$. Итак, если уже определены суммы рядов $S_{4n-1}^{(1)}$, $S_{4n-1}^{(2)}$, $S_{4n-1}^{(3)}$ для $n=1, 2, \dots, m-1$, то можно найти значения этих рядов и для $n=m$. Отметим, что если в исходном соотношении (1.7) не принимать $a=b=1$, то таким же образом можно получить значения комбинаций рядов

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi b}{2a}}{(2k-1)^{4n-1}} \text{ и } \sum_{k=1,2}^{\infty} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi a}{(2k-1)^{4n-1}}; \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-1}} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}}$$

$$\text{и } \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-1}} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}}; \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a}}{k^{4n-1}} \text{ и } \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \frac{k\pi a}{b}}{k^{4n-1}}.$$

§ 3. В качестве примера вычислим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2}}{(2k-1)^3}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} k\pi}{k^3},$$

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2}}{(2k-1)^7}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^7} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} k\pi}{k^7}.$$

Из выражения (2.2) при $x=1$, $y=1$ непосредственно найдем

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}. \quad (3.1)$$

Подставляя в (2.5) $x=1$, $y=1$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} = \frac{\pi^3}{360}. \quad (3.2)$$

Далее, из выражения (2.4) при $x=1$, $y=1$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - 2 \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} = \frac{\pi^3}{48}. \quad (3.3)$$

Учитывая (3.1) и (3.2), из (3.3) после некоторых преобразований будем иметь

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{cth} k\pi = \frac{7\pi^3}{180}. \quad (3.4)$$

Если не принимать в соотношении (1.7) $a = b = 1$, то, помимо (3.1), (3.2) и (3.4), таким же способом можно получить еще и равенства

$$\begin{aligned} & \frac{b}{a} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi a}{2b} + \\ & + \frac{a}{b} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi b}{2a} = \frac{\pi^3}{16}, \\ & \frac{b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi a}{b}} + \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} = \\ & = -\frac{\pi^3}{72} + \frac{7\pi^3}{720} \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right), \\ & \frac{b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi a}{2b} - 2 \frac{a}{b} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b}{a}} = \\ & = \frac{\pi^3}{24} - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{\pi^3}{48}, \\ & \frac{b}{a} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{cth} \frac{k\pi a}{b} + \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi^3}{90} \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \right). \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.2), из выражения (2.5) при $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$ для $n = 1$ получим

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^4 \operatorname{sh} (2k-1)\pi} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} = \frac{67\pi^4}{23040}. \quad (3.5)$$

Подставляя в (2.5) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ и преобразуя полученное выражение, будет иметь

$$\frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} \sin \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi^3}{72 \cdot 128} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^4 \operatorname{sh} (2k-1)\pi} \quad (3.6)$$

С помощью выражений (3.2) и (3.5) из (3.6) окончательно получим

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^5} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2}} = \frac{\pi^5}{768} \quad (3.7)$$

Заметим, что об этом ряде упомянуто в работе [6], где его значение приведено с опечаткой.

В качестве второго примера вычислим значения рядов $S_{4n-1}^{(1)}$, $S_{4n-1}^{(2)}$, $S_{4n-1}^{(3)}$ для $n=2$.

Для вычисления суммы $S_7^{(1)}$ надо сначала в (2.2) подставить $x=1$, $y=1$, откуда найдем выражение

$$2 \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} - \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi^5}{288} \quad (3.8)$$

При этом было использовано (3.2). Далее необходимо подставить $x=1$, $y=1$ в (2.3). Тогда, учитывая (3.2), найдем

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^4} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^7} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2} &= \frac{1}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} = \frac{13\pi^3}{11520} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Принимая во внимание (3.8), окончательно получим

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^7} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2} = \frac{7\pi^7}{23040} \quad (3.10)$$

При $x=1$, $y=1$ из выражения (2.5) непосредственно находим значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^7} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi} = \frac{13\pi^7}{453600} \quad (3.11)$$

Для нахождения суммы $S_7^{(3)}$ используем выражение (2.4). Подставляя в (2.4) $x=1$, $y=1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^7} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \frac{2}{\pi^4} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^7} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} - \\ - \frac{1}{6\pi^2} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{3\pi^2} \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \frac{1}{\operatorname{sh} (2k-1)\pi} = \frac{3\pi^3}{8960} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Согласно (3.8), (3.10) и (3.11), после некоторых преобразований, получим значение ряда Рамануджана

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} k\pi}{k^2} = \frac{19\pi^2}{56700}, \quad (3.13)$$

которое приводится в работах Р. О. Кузьмина [6] и Н. Ф. Сандхэма [7].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 IV 1962

Ն. Օ. Գուլկանյան

ՄԻ ՔԱՆԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս նախնական արվում է հետևյալ շարքերի

$$\sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2}}{(2k-1)^{4n-1}}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4n-1}} \frac{1}{\operatorname{sh} k\pi}, \quad \sum_{k=1,2}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} k\pi}{k^{4n-1}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

գումարման մի կողմնակ:

Որպես իլլուստրացիա հաշվված են աղ շարքերի գումարները
 $n=1; 2$ դեպքերում:

Հաշվված են նաև (1.12) և (3. 7) շարքերի գումարները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гулканян Н. О. О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **10**, № 5, 1957.
2. Гулканян Н. О. О центре изгиба призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 2, 1959.
3. Гулканян Н. О. О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с двумя симметричными прямоугольными полостями. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 1, 1960.
4. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, НКТП СССР, М.—Л., 1939, стр. 9—10.
6. Кузьмин Р. О некоторых приложениях рядов Дирихле. Известия Ленинградского Политехнического института им. М. И. Калинина, отдел техники, естествознания и математики, **32**, 1929, 11—25.
7. Sandham H. F. Three summations due to Ramanujan. Quarterly Journ. of Math. (Oxford II ser), **1**, 1950, 238—240.