ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVI, № 1, 1963 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. М. Мхитарян, М. Г. Дагестанян

О температуре водоемов

Введение

По вопросу о температуре водоемов, необходимости ее расчета, разработке практических методов ее определения и предвычисления, а также организации соответствующих наблюдений имеются большие литературные данные. Здесь нет возможности останавливаться на этих работах. Некоторые из них приведены в списке литературы.

Знание температуры воды в водоемах, а также ее вертикального и горизонтального распределения очень важно для решения ряда прикладных задач, связанных с расчетами теплообмена в воде, характеристик турбулентности, течений и других вопросов их термики и термического режима.

Особо важное значение имеет формирование температуры поверхности воды, определяющей, наряду с другими факторами, испарение с поверхности водоема, конвективный теплообмен с атмосферой, собственное излучение и др.

Вопросу формирования температурного режима морей посвящена работа [19]. Вопрос этот в целом или некоторые его аспекты рассмотрены [3, 4, 13, 14, 18, 20, 23, 24] и др. Очень интересна работа [23], причем вопрос о температуре на границе раздела вода—воздух сейчас все еще остается в центре внимания исследователей, создаются специальные приборы для измерения температуры поверхности раздела, для измерения длинноволнового излучения и т. д.

Изучению термического режима озер и водохранилищ и некоторых его особенностей, таких как развитие и исчезновение слоев скачка температуры и т. д. посвящены частично или полностью работы [1, 7, 8, 14, 16, 17, 22, 23, 24] и др. В некоторых из них рассматриваются экспериментальные [4, 7, 8, 16, 22] и теоретические методы [13, 20, 21, 22] расчета этой температуры.

Следует отметить, что температура воды в водоемах зависит как от приходной, так и от расходной частей теплового баланса, зависит она также от глубины и площади водоема, его географического расположения, прозрачности воды и т. д.

В работе [8] температура поверхности воды определяется в виде функции от температуры воздуха. Для больших и глубоких водоемов эта функция имеет две ветви в виде вытянутого эллипса. Для малых и неглубоких водоемов обе ветви сливаются в одну прямую.

Б. Д. Зайков [8] картировал параметры этой прямой.

В работе [4] построена указанная зависимость и, кроме того, использованы два других метода.

Наиболее универсальным является метод теплового баланса. Однако, с использованием этого метода [4, 21] и др., связан ряд затруднений. Заключаются эти трудности в отсутствии данных о составляющих теплового баланса, в сложности и трудоемкости производства расчетов. Кроме того, по методу определения теплозапасов легко определяется средняя температура воды, а переход от последней к температуре поверхности требует принятия дополнительных гипотез, что также затрудняет практические применения этого метода. Следует, однако, отметить, что метод теплового баланса физически наиболее обоснованный и в настоящее время находит все большее применение.

Проблема определения температуры подстилающей поверхности вообще, и водной поверхности в частности, из условия теплового баланса в настоящее время все еще недостаточно разработана, хотя и имеется ряд работ, в которых она успешно разрешена.

В [4] разработаны и приведены специальные графики и формулы, по которым довольно быстро и с достаточной для практических целей точностью эта температура может быть вычислена.

В работах [20, 21] предложен интересный способ определения температуры поверхности воды, основанный на совместном использовании уравнений теплового баланса и турбулентной теплопроводности.

В работе [16] температура поверхности воды оз. Севан определена на основании использования данных рейдовых наблюдений на озере, на разных вертикалях и на берегу в одной точке, где тщательно изучался суточный ход этой температуры круглый год.

За недостатком места эти данные здесь не приводятся, но мы ими воспользуемся ниже.

§ 1. Распределение температуры воды по вертикали при переменном по глубине коэффициенте обмена

Рассмотрим уравнение турбулентной теплопроводности в водоеме при наличии течений и объемных источников тепла. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + k_1\Delta T + \varepsilon. \tag{1.1}$$

Здесь: начало координат расположено на поверхности воды, z направлено вертикально вниз, x — по направлению скорости течения, u, w — составляющие скорости течения по осям x и z, T — температура воды, k и k_1 — коэффициенты обмена по вертикали и горизонтали, Δ — оператор Лапласа, ε — приток тепла.

В качестве источника тепла в воде мы рассмотрим проникающую радиацию [2, 11, 17, 25]. На поверхность воды приходит суммарная радиация S_0. Альбедо водной поверхности обозначим через A [5, 6, 10, 11], коэффициент поглощения через α; тогда можно написать

$$\varepsilon = S_0 (1 - A) \frac{\alpha e^{-\alpha z}}{c^* \rho^*}. \tag{1.2}$$

Наблюдения показывают, что α зависит в основном от прозрачности воды и несколько от глубины. Для данного водоема мы будем считать $\alpha = \text{const}$, причем для такого прозрачного водоема, каким является оз. Севан $\alpha \cong 0{,}5$ $м^{-1}$, в то время, как для Цимлянского водохранилища этот коэффициент равен 2,2, для оз. Красавица — 4,6 и т. д.

Произведем оценку членов уравнения (1.1) на примере условий оз. Севан.

Характерное среднее годовое значение суммарной радиации на оз. Севан имеет порядок $S_0 = 0{,}3 \cdot 10^{-2}$ *кал. см*$^{-2}$ *сек*$^{-1}$, альбедо порядка 0,1, причем в зависимости от степени волнения несколько меняется. Тогда легко убедиться, что в условиях оз. Севан последний справа член уравнения (1.1), согласно (1.2), имеет порядок 10^{-6} *град сек*$^{-1}$. Такого же порядка оказываются первые члены справа и слева, если рассматривать годовой ход темпеpетуры [17]. Остальные члены малы, поэтому вместо (1.1) приближенно можно взять

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \frac{S_0 (1 - A) \alpha e^{-\alpha z}}{c^* \rho^*}. \tag{1.3}$$

В этом параграфе мы рассмотрим задачу для случая, когда k зависит лишь от глубины. Пусть

$$\begin{aligned} k &= k_1 - \frac{k_1 - k_0}{h} z, \quad && z \leqslant h, \\ k &= k_0, && z > h. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь: k_1 — значение k на поверхности воды, k_0 — молекулярный коэффициент, h — некоторая глубина, имеющая порядок мощности слоя скачка.

При решении задачи начальных условий ставить не будем, так как ищется периодическое решение. Что касается граничных условий, примем постоянной температуру на больших глубинах, а на поверхности воды зададим годовой ход. Последний возьмем из наблюдений, а ниже покажем как можно определить этот ход из условия баланса.

Прежде чем приступить к решению, положим

$$T(z, x, t) = \bar{T}(x, z) + T'(x, z, t); \quad \frac{S_0 (1 - A) \alpha}{c^* \rho^*} = \bar{S}_0 (x) + S'(x, t). \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.3), получим

$$0=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\right)+\bar{S}_0e^{-\alpha z}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T'}{\partial z}\right)+S'e^{-\alpha z}. \tag{1.7}$$

Стационарная часть (1.6) будет рассмотрена ниже. Введем безразмерные величины

$$z=\zeta h,\qquad t=t_0t_1=\frac{t_1}{\Omega},\qquad T'=\tilde{T}T_1,\qquad S'=\Omega\tilde{T}S_1. \tag{1.8}$$

За характерное время принято $\frac{1}{\Omega}$, где $\Omega=2.10^{-7}$ $сек^{-1}$ — угловая скорость вращения земли вокруг солнца.

Подставляя (1.4) и (1.8) в (1.7), отбрасывая для простоты индексы и обозначая

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}=\alpha h,\qquad \bar{k}=\frac{k}{\Omega h^2},\qquad a=\frac{(k_1-k_0)}{k_1},\\ &\bar{k}=\bar{k}_1(1-a\zeta),\qquad \zeta\leqslant 1,\\ &\bar{k}=\bar{k}_1(1-a)=\bar{k}_0,\qquad \zeta>1, \end{aligned} \tag{1.9}$$

получим

$$\begin{aligned} &\zeta\leqslant 1\qquad \frac{\partial T_1}{\partial t}=\bar{k}_1\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-a\zeta)\frac{\partial T_1}{\partial\zeta}\right]+Se^{-\bar{\alpha}\zeta},\\ &\zeta>1\qquad \frac{\partial T_2}{\partial t}=\bar{k}_0\frac{\partial^2T_2}{\partial\zeta^2}+Se^{-\bar{\alpha}\zeta}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для второго слоя в уравнении (1.10) последний член можно отбросить без больших погрешностей.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} &1.\ \text{При}\ \zeta=0\qquad T_1=T_0(x,\ t),\\ &2.\ \text{При}\ \zeta\to\infty\qquad T_2=0,\\ &3.\ \text{При}\ \zeta=1\qquad T_1=T_2\ \ \text{и}\ \ \frac{\partial T_1}{\partial\zeta}=\frac{\partial T_2}{\partial\zeta}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Так как температуру поверхности воды считаем известной, целесообразно представить ее в виде ряда

$$T_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n(x)\cos nt+T_n'(x)\sin nt\right]. \tag{1.12}$$

Кроме того, можно в таком же виде представить известную функцию S.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\beta_n(x)\cos nt+\beta_n'(x)\sin nt\right]. \tag{1.13}$$

Представим решение наших уравнений в таком же виде

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(x, \zeta)\cos nt + B_n(x, \zeta)\sin nt],$$
$$T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n(x, \zeta)\cos nt + D_n(x, \zeta)\sin nt]. \qquad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.10), вводя обозначения $A_n + iB_n = u_n$, $C_n + iD_n = v_n$, $\beta_n + i\beta_n' = L_n$, получим

$$\bar{k}_1(1 - a\zeta)\frac{\partial^2 u_n}{\partial\zeta^2} - a\bar{k}_1\frac{\partial u_n}{\partial\zeta} + inu_n = -L_n e^{-\bar{\alpha}\zeta}, \qquad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial\zeta^2} + \frac{in}{\bar{k}_0}v_n = -\frac{L_n}{\bar{k}_0}e^{-\bar{\alpha}\zeta}. \qquad (1.16)$$

В уравнении (1.15) сделаем замену переменной

$$y_n = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{in}{\bar{k}_1}(1 - a\zeta)}. \qquad (1.17)$$

Тогда легко убедиться, что наши уравнения имеют следующие решения

$$u_n = c_{1,n}I_0(y_n) + c_{2,n}H_0(y_n) + \frac{i\pi L_n}{a\bar{k}_1}I_0(y_n)\int_0^{\zeta} H_0(y_n)e^{-\bar{\alpha}\zeta}d\zeta +$$
$$+ \frac{i\pi L_n}{a\bar{k}_1}H_0(y_n)\int_{\zeta}^{1} I_0(y_n)e^{-\bar{\alpha}\zeta}d\zeta, \qquad (1.18)$$

$$v_n = c_{3,n}e^{-\sigma_n(1-i)(\zeta-1)} - \frac{L_n e^{-\bar{\alpha}\zeta}}{\bar{k}_0(\bar{\alpha}^2 + 2i\sigma_n^2)}. \qquad (1.19)$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{n}{2\bar{k}_0}}. \qquad (1.20)$$

Здесь: I_0 и H_0 — функции Бесселя и Ханкеля [26].

Как видно из (1.19), условие на больших глубинах удовлетворено. Постоянные интегрирования $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ и $c_{3,n}$, зависящие в общем случае от x, должны быть определены из условий

1. При $\zeta = 0$ $\quad u_n = T_n + iT_n'$.
2. При $\zeta = 1$ $\quad u_n = v_n$ и $\dfrac{\partial u_n}{\partial\zeta} = \dfrac{\partial v_n}{\partial\zeta}$. (1.21)

Если обозначить

$$D_n^{-1} = H_0(y_n^0)[I_0(y_n') + iI_1(y_n')] - I_0(y_n^0)[H_0(y_n') + iH_1(y_n')], \qquad (1.22)$$

$$y_n^0 = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{in}{\bar{k}_1}}, \qquad y_n' = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{in}{\bar{k}_1}(1 - a)}, \qquad (1.23)$$

для $c_{i,n}$ получим следующие выражения

$$c_{1,n}=D_n\{N_n[H_0(y'_n)+iH_1(y'_n)-M_nH_0(y_n^0)]\},$$

$$c_{2,n}=-D_n\{N_n[I_0(y'_n)+iI_1(y'_n)-M_nI_0(y_n^0)]\},$$

$$c_{3,n}=c_{1,n}I_0(y'_n)+c_{2,n}H_0(y'_n)+\frac{i\pi L_n}{a\bar{k}_1}I_0(y'_n)\int_0^1 H_0e^{-\bar{\alpha}\zeta}d\zeta. \tag{1.24}$$

$$N_n=\frac{i\pi L_n}{a\bar{k}_1}H_0(y_n^0)\int_0^1 I_0(y_n)e^{-\bar{\alpha}\zeta}d\zeta-(T_n+iT'_n).$$

$$M_n=\frac{i\pi L_n}{a\bar{k}_1}[I_0(y'_n)+iI_1(y'_n)]\int_0^1 H_0e^{-\bar{\alpha}\zeta}d\zeta. \tag{1.25}$$

Отделяя теперь действительные и мнимые части (1.18) и (1.19), легко определить коэффициенты A_n, B_n, C_n и D_n, а по (1.14) — определить температуру. В дальнейшем для расчета необходимо знать градиент температуры, в частности при $\zeta=0$. Его легко определить, продифференцировав (1.18) по ζ. Эти выкладки здесь не приводятся за недостатком места.

§ 2. Распределение температуры воды по вертикали при переменном по глубине и времени коэффициенте обмена

В этом случае будет рассмотрено уравнение (1.3), но для k положим

$$\begin{aligned} k&=k_1\left(1-a\frac{z}{h}\right)(1+\delta\cos\Omega t), \quad z\leqslant h,\\ k&=k_0(1+\delta\cos\Omega t), \qquad z>h. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь δ характеризует амплитуду колебаний k.

Переходя к тем же безразмерным величинам, получим

$$\begin{aligned} \zeta\leqslant 1 \quad & \frac{\partial T_1}{\partial\zeta}=\bar{k}_1(1+\delta\cos t)\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-a\zeta)\frac{\partial T_1}{\partial\zeta}\right]+Se^{-\bar{\alpha}\zeta},\\ \zeta>1 \quad & \frac{\partial T_2}{\partial\zeta}=\bar{k}_0(1+\delta\cos t)\frac{\partial^2 T_2}{\partial\zeta^2}+Se^{-\bar{\alpha}\zeta}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Введем вместо t новую переменную

$$\tau=t+\delta\sin t. \tag{2.3}$$

Тогда вместо (1.10) получим

$$\begin{aligned} \zeta\leqslant 1 \quad & \frac{\partial T_1}{\partial\tau}=\bar{k}_1\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-a\zeta)\frac{\partial T_1}{\partial\zeta}\right]+f(\tau)e^{-\bar{\alpha}\zeta},\\ \zeta>1 \quad & \frac{\partial T_2}{\partial\tau}=\bar{k}_0\frac{\partial^2 T_2}{\partial\zeta^2}+f(\tau)e^{-\bar{\alpha}\zeta}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Таким образом, наши уравнения в этом случае (2.4) по виду полностью совпадают с (1.10), только теперь вместо переменной t входит τ.

Обратимся к граничным условиям (1.11). Из них три (2 и 3) остаются без изменений. Изменяется лишь первое.

Это условие следует переписать по новой переменной τ. Сделать это можно двумя способами.

Согласно определению, из (1.12) имеем

$$T_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_0(x, t)\cos mt dt, \qquad T_m' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} T_0(x, t)\sin mt dt. \tag{2.5}$$

Теперь, если положить для фиксированного m

$$T_m \cos mt(\tau) + T_m' \sin mt(\tau) = F_m(\tau), \tag{2.6}$$

$$F_m(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}(F_n^m \cos n\tau + F_n'^m \sin n\tau), \tag{2.7}$$

подставить (2.6) в (1.12), воспользуясь при этом (2.7), и переменить порядок суммирования, получим

$$T_0(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty}[\overline{T}_n(x)\cos n\tau + \overline{T}_n'(x)\sin n\tau]. \tag{2.8}$$

$$\overline{T}_n = \sum_{m=1}^{\infty} F_n^m; \qquad \overline{T}_n' = \sum_{m=1}^{\infty} F_n'^m. \tag{2.9}$$

Точно также можно переразложить $f(\tau)$. Обозначим коэффициенты через $\overline{\beta}_n$, $\overline{\beta}_n'$.

Указанное переразложение можно выполнить и графически. Ниже будет показан такой пример.

Решения для стационарных частей можно написать без труда. Опуская выкладки, выпишем результаты

$$\overline{T}_1 = \overline{T}_0 - \frac{c_1}{ak_1}\ln\frac{1}{1-a\zeta} + \frac{\overline{S}И}{k_1\alpha}, \qquad \overline{T}_2 = T_H + \frac{c_1}{k_2}(\zeta_H - \zeta), \quad И = \int_0^{\zeta}\frac{e^{-\alpha\zeta}d\zeta}{1-a\zeta}. \tag{2.10}$$

Отметим, что в случае мутных водоемов, когда суммарная солнечная радиация в основном поглощается в тонком приповерхностном слое ($\alpha \to \infty$), решения значительно упрощаются. В этом случае надо лишь полагать $S = 0$ или $\beta_n = \beta_n' = 0$.

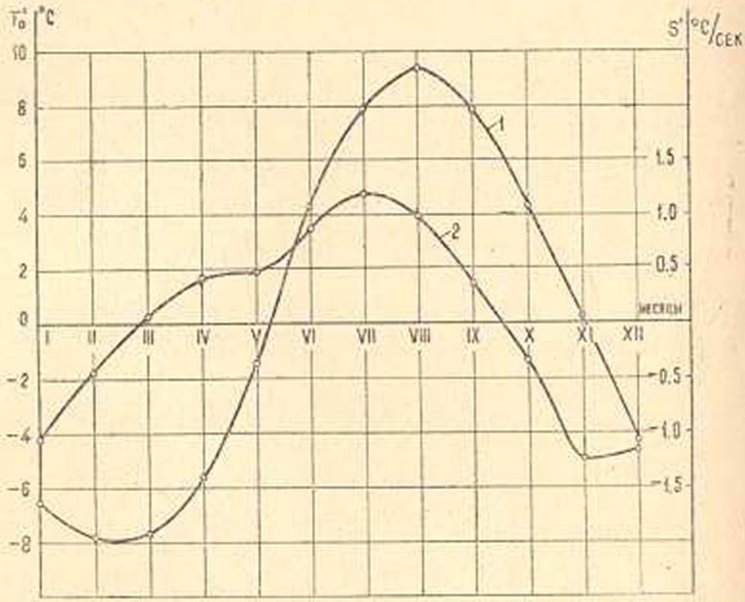
§ 3. Расчет примеров и сравнение полученных результатов с данными наблюдений

В качестве примера расчета рассмотрим вертикаль оз. Севан при глубине $H = 50$ *м*.

Как исходные данные необходимо задать годовой ход температуры поверхности, температуру на дне, приток суммарной радиации к поверхности, альбедо водной поверхности и коэффициент поглощения.

Данные о $T_0(t)$, $\bar{T}_0$ и $T_0'(t)$, а также $\bar{S}_0$ и $S'(t)$ приведены в [16, 17].

Данные о T_0' и S' представлены на фиг. 1.



Фиг. 1. Годовой ход величин: 1 — T_0'; 2 — S'.

Эти величины разложены в ряды (1.12) и (1.13) и определены коэффициенты разложения, которые далее будут использованы.

Рассмотрим следующие восемь различных случаев, соответствующих $k = k(z)$, которые пометим как I, далее будут рассмотрены эти же восемь случаев при $k = k(z, t)$, пометим их как II. Необходимые данные соберем в табл 1.

Таблица 1

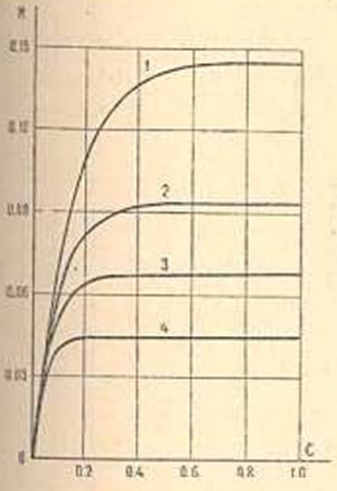
Случаи	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
k_1 *см² сек*$^{-1}$	1.0	4.0	1.0	4.0	1.0	4.0	1.0	4.0
a, *м*$^{-1}$	0.4	0.4	0.8	0.8	0.4	0.4	0.8	0.8
h, *м*	20	20	20	20	30	30	30	30
$c_1 \cdot 10^3$	1.08	0.90	0.87	0.84	1.02	0.88	0.84	0.83

Во всех случаях принято $k_0 = 10^{-6}$ *м² сек*$^{-1}$.

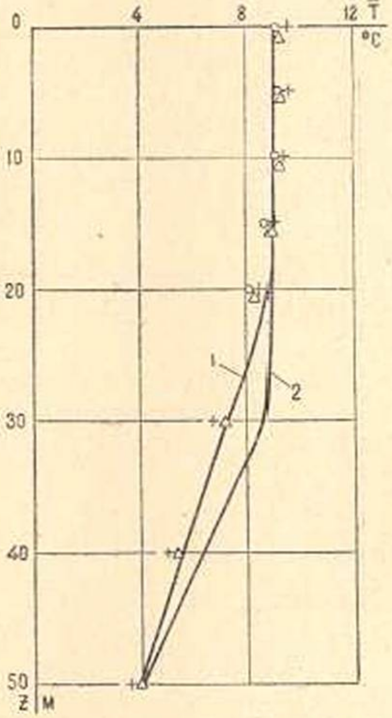
Результаты расчета интеграла (2.10) приведены на фиг. 2.

Имея эти данные, легко построить профили стационарного распределения температуры. Эти результаты представлены на фиг. 3.

На этот же рисунок нанесены результаты фактических наблюдений за 1956—60 гг., проведенных Севанской гидрометеорологической обсерваторией на трех вертикалях озера. В точке № 1 (кружки) глубина порядка 18, в точке № 2 (крестики) — 55 и № 3 (треугольнички) — 75 *м*. Совпадение рассчитанного и наблюденного профилей температуры следует признать удовлетворительным для случая $h=20$ *м*. Перейдем к результатам расчета нестационарных отклонений температуры по схеме 1. За недостатком места приведем лишь некоторые результаты.



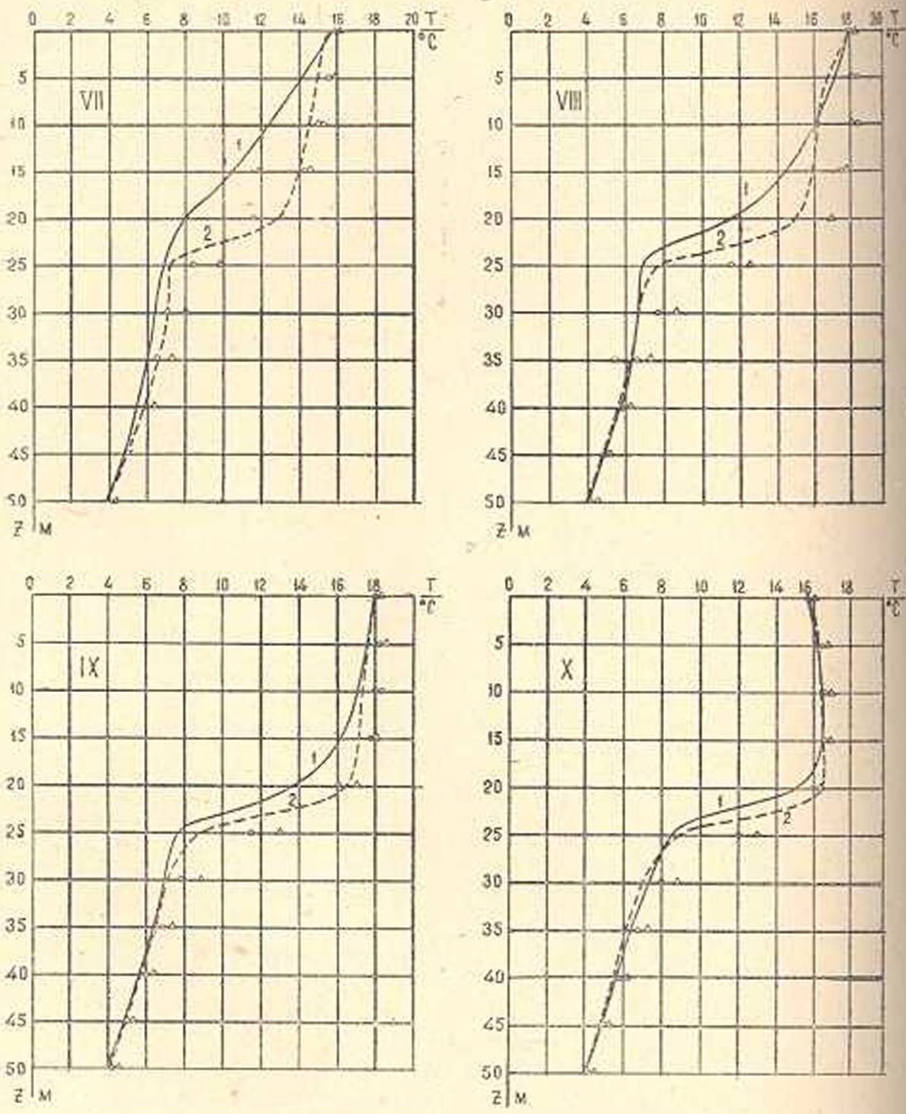
Фиг. 2. Интеграл И для случаев: $1-I_{1-2}$; $2-I_{3-4}$; $3-I_{5-6}$; $4-I_{7-8}$.



Фиг. 3. Профиль стационарной температуры при $S=0$. $1-h=20$ *м*; $2-h=30$ *м*. Опытные точки для вертикалей: Δ - 3; + — 2; ○ — 1.

На фиг. 4 и 5 приведены для сравнения профили температуры, рассчитанные и наблюденные для четырех месяцев. Так, на фиг. 4 для $S=0$ и $h=20$ *м* сплошные кривые соответствуют расчету для случаев I_1 и I_3, пунктирная — I_2 и I_4. Здесь же нанесены разультаты наблюдений за 1956—60 гг. на оз. Севан на вертикали № 2 кружками и на вертикали № 3 треугольничками. На фиг. 5 приводятся такие же данные для тех же месяцев, но результаты расчета здесь представлены для случая, когда учитывалась проникающая радиация.

Подобные же расчеты проводились и для II случая, но здесь они не приводятся за недостатком места. Приведем лишь пример (фиг. 6) перестроения величин T_0 и f с „нормального" времени t на „деформированное" τ.



Фиг. 4. Профили температуры, рассчитанные при $S = 0$ и $h = 20$ *м*: 1—I_1; 2—I_2; 3—I_3; 4—I_4, наблюденные на вертикалях: ● —2; ▲ —3.

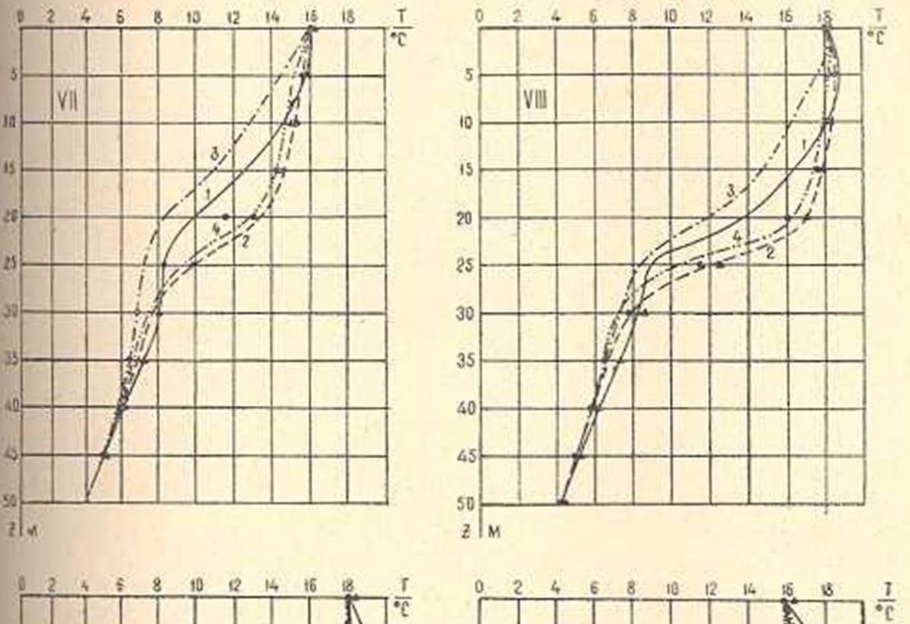
Осредним температуру воды по вертикали

$$T_{cp}(t) = \frac{1}{H}\int_0^H T(z,\ t)\,dz \tag{3.1}$$

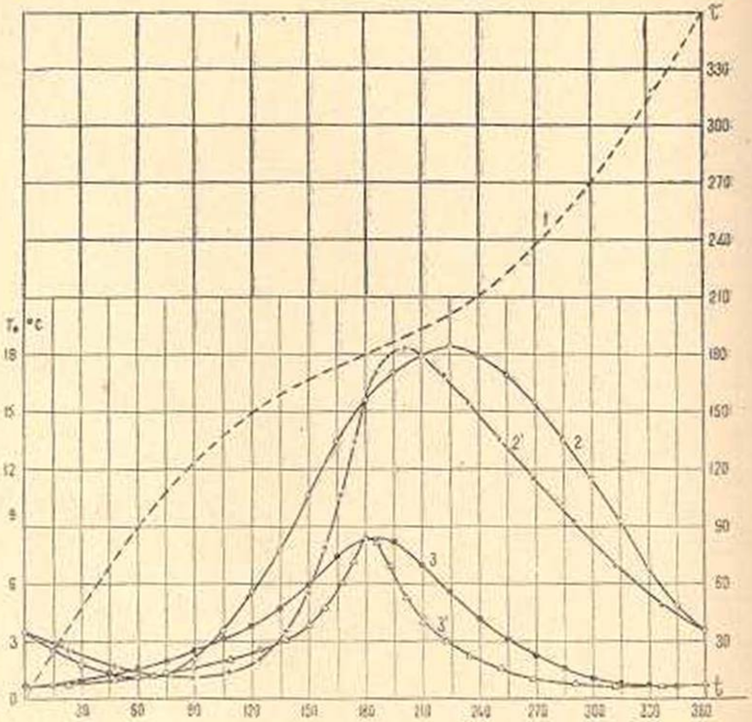
и введем величину

$$\mu(t) = \frac{T_{cp}(t)}{T_0(t)}, \tag{3.2}$$

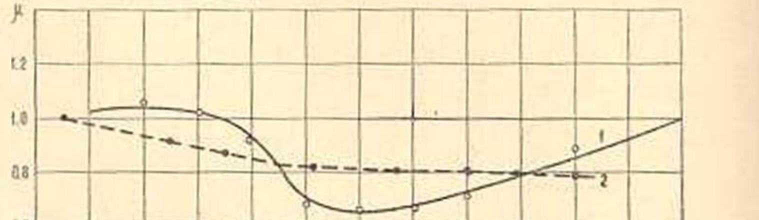
где $T_0(t)$ — годовой ход температуры поверхности воды.



Фиг. 5. Профили температуры, рассчитанные при $S \neq 0$ и $h = 20$ *м*: 1—I_1; 2—I_2; 3—I_3; 4—I_4, наблюденные на вертикалях: ●—2; ▲—3.



Фиг. 6. „Нормальный" (t) и „деформированный" годовой ход величин T_0 и f: 1 — $\tau(t)$; 2 — $T_0(t)$; 2' — $T_0(\tau)$; 3 — $f(t)$; 3' — $f(\tau)$.



Фиг. 7. Зависимость μ от времени (1) и глубины (2). ○ — вертикаль 9.

Тогда по фактическим наблюдениям за 1956—60 гг. на различных вертикалях оз. Севан получаем для μ картину, представленную на фиг. 7 для всего озера. На этом рисунке сплошной кривой представлен годовой ход среднего по всему озеру значения μ. Здесь же светлыми кружками нанесены значения μ для тех вертикалей, которые имеют глубину 35—37 *м*. Пунктирной кривой представлена зависимость среднего годового значения μ на данной вертикали от глубины.

§ 4. Выводы

Анализ полученных результатов и сравнение с данными фактических наблюдений позволяют сделать ряд важных теоретических и практических выводов. Приведем некоторые из них.

1. В случае стационарного распределения температуры воды по глубине (которое имело бы место, если бы приток тепла от солнца и его поглощение водными массами оставались постоянными и равными их среднему годовому значению, тепловое перемешивание происходило бы с одинаковой интенсивностью, а температура поверхности воды оставалась бы постоянной и равной ее фактическому среднему годовому значению) градиент температуры у поверхности воды был бы постоянной отрицательной величиной для случая $S=0$ и, наоборот, постоянной положительной величиной при $S \neq 0$. Это означает, что в случае без учета проникающей радиации имеет место падение температуры по глубине, в то время, как при учете указанного фактора температура с глубиной несколько растет, достигая своего максимального значения на определенной глубине, далее уменьшается до своего постоянного значения на дне водоема. Как показывают расчеты, увеличение коэффициента поглощения приводит к уменьшению положительного температурного градиента у поверхности воды, а при очень большом α; т. е. когда вся солнечная радиация, за исключением отраженной ее части, целиком поглощается в тонком приповерхностном слое воды, что имеет место в „мутных" водоемах, профиль температуры приближается к таковому для случая $S=0$. Отметим также, что в последнем случае профиль температуры дается не прямой линией, как это было в [17], а кривой (2.10), благодаря тому, что здесь принято $k=k(z)$. Поэтому в этом случае, в отличие от [17], и температура и ее градиент зависят как от коэффициента перемешивания, так и от глубины водоема, температуры воды у дна и др.

2. Уменьшение коэффициента поглощения приводит к увеличению положительного температурного градиента, если коэффициент перемешивания остается неизменным. С ростом же любого из двух коэффициентов α и k этот градиент уменьшается. Дальнейшее их совместное увеличение уже играет значительно меньшую роль. Это легко объяснить тем, что увеличение коэффициента обмена приводит к более интенсивному турбулентному перемешиванию, а следовательно, к выравниванию температур на разных глубинах. Увеличение же коэффициента поглощения равносильно уменьшению проникновения солнечной радиации, что также способствует уменьшению градиента, особенно у приповерхностных слоев.

3. Переходя к нестационарному распределению температуры воды, обусловленному нестационарным перемешиванием и поглощением солнечной радиации, зависящими от глубины и времени, отметим, что самый главный вывод здесь заключается в том, что учет зависимости

коэффициента турбулентного перемешивания от времени по II схеме, наряду с зависимостью от глубины, почти не улучшает полученные результаты по сравнению с I схемой, в которой учитывается зависимость этого коэффициента от одной лишь глубины. Указанный учет несколько улучшает результаты расчета турбулентного теплообмена в воде. Исходя из этого, в дальнейшем сравнение с фактическими данными проводится лишь для I схемы.

4. Влияние поглощенной солнечной радиации на распределение температуры воды зависит от величины самой радиации и от коэффициента поглощения. Это влияние сказывается до глубины 15—18 *м* для прозрачных водоемов, у которых $\alpha < 0{,}5\ м^{-1}$ и до очень небольших глубин для мутных водоемов, у которых $\alpha > 2\ м^{-1}$. Для первых водоемов учет этого фактора необходим. В частности, для оз. Севан с $\alpha \approx 0{,}4\ м^{-1}$ проникающая радиация сказывается до глубин порядка мощности слоя турбулентного перемешивания и учет этого фактора приводит к значительно лучшим результатам. Указанное влияние увеличивается при увеличении притока солнечной радиации к поверхности воды и при уменьшении коэффициента поглощения.

Непосредственные наблюдения на оз. Севан и на значительно более мутном Артанишском реликтовом озере подтверждают этот вывод.

5. При одном и том же коэффициенте турбулентного перемешивания увеличение коэффициента поглощения приводит к увеличению отрицательных градиентов температуры, что соответствует усилению прогрева водных масс летом, и к уменьшению положительных градиентов температуры, что соответствует ослаблению охлаждения водных масс зимой. Такое „сглаживание" происходит в значительно меньшей степени, чем в случае, когда $k = \text{const}$ [17]. При одном и том же коэффициенте поглощения, как и в случае отсутствия проникающей радиации, увеличение коэффициента перемешивания (k_1 или k) приводит к уменьшению градиента температуры.

6. Амплитуда температурных колебаний с глубиной затухает, а наступление ее максимального и минимального значений запаздывает, причем влияние коэффициента поглощения при одном и том же коэффициенте перемешивания сказывается в основном на амплитуде волны. Это влияние сначала несколько увеличивается до некоторой глубины, зависящей от α, а затем затухает. Что касается фазы запаздывания, она полностью определяется коэффициентом перемешивания. Этот очень важный вывод дает физическое объяснение известному факту, полученному в [25], в полном согласии с которым значения коэффициента перемешивания, рассчитанные по амплитуде и фазе температурной волны, не совпадают. В известной степени теперь это становится понятным. Подчеркнем еще раз, это является следствием того, что фаза волны полностью определяется турбулентным перемешиванием, в то время, как амплитуда волны определяется как турбулентным перемешиванием, так и проникающей солнечной радиацией, точнее, законом поглощения этой радиации.

7. Результаты расчета по I схеме, при $k = k(z)$ и $S \neq 0$, значительно лучше совпадают с данными фактических наблюдений, чем результаты расчета по схеме $k = \text{const}$ и $S = 0$ [15] или $k = \text{const}$, $S \neq 0$ [17]. Выводы, полученные в [17], подтверждаются, но в данном случае получен ряд новых выводов, которые не могли быть получены ни по схеме [15], ни — [17], и, кроме того, ряд выводов из [17] улучшается количественно в сторону лучшего совпадения теории с данными наблюдений. Таким образом, приходим к важному выводу о том, что при расчетах для прозрачных водоемов необходимо учесть проникающую радиацию и, кроме того, весьма существенно ввести зависимость коэффициента перемешивания от глубины.

8. В зимние месяцы устанавливается гомотермия и даже обратная стратификация, температура с глубиной несколько увеличивается. Наблюдения подтверждают этот вывод. Здесь также в количественном отношении имеет место значительно лучшее согласие теории с данными наблюдений, чем это было по схемам из [15, 17].

Учет изменения коэффициента перемешивания с глубиной в большой степени сглаживает большие положительные градиенты, особенно в приповерхностных слоях воды.

9. Весной и в начале лета начинается и далее развивается слой скачка температуры, который к началу осени ослабевает и постепенно исчезает. Этот вывод также подтверждается наблюдениями и здесь также имеет место хорошее количественное согласие по сравнению со схемой $k = \text{const}$. Таким образом, совместный учет переменности коэффициента обмена с глубиной и проникающей радиации уже в значительной степени обуславливает образование и разрушение слоя температурного скачка.

10. Подтверждается также известный факт [22, 17] о том, что вследствие совместного действия всевозможных форм теплообмена у поверхности воды здесь имеет место охлаждение почти круглый год для незамерзающих водоемов, испаряющих значительное количество влаги в течение всего года, т. е. температура на самой поверхности несколько ниже, чем в нижележащих слоях, хотя общий поток тепла направлен от поверхности вниз, к более глубоким слоям. Этот важный результат проливает некоторый свет на вопрос о точности определения температуры поверхности воды и должен быть учтен в теплобалансовых расчетах и при сконструировании приборов, в частности, радиометров, для определения этой температуры (на поверхности раздела водоем — воздух), а также для измерения собственного излучения водной поверхности.

11. Наибольший интерес представляют графики на фиг. 4 и 5. На фиг. 4 хорошо видно, что увеличение коэффициента перемешивания (k_1) значительно улучшает результаты (пунктирные кривые), хотя теоретические результаты не очень хорошо согласуются с данными наблюдений, представленными опытными точками (кружки и треугольнички). Сравнивая кривые на фиг. 5 между собой и с опыт-

ными данными, можно усмотреть влияние коэффициента перемешивания при одном и том же коэффициенте поглощения (кривые 1 с 2 и 3 с 4) и, наоборот, влияние закона поглощения при одном и том же коэффициенте перемешивания (кривые 1 с 3 и 2 с 4).

Наилучшее совпадение имеет место для случая 2.

Графики на фиг. 5 показывают развитие слоя скачка температуры и подтверждают вывод о том, что явление значительно лучше описывается схемой I, при совместном учете проникающей радиации с почти постоянным коэффициентом поглощения и турбулентного перемешивания с переменным по глубине коэффициентом обмена.

12. Можно привести и другие менее значительные выводы, но за недостатком места ограничимся приведенными выше. Отметим, что согласие теории с данными фактических наблюдений может быть в известной степени улучшено, если снять допущение о постоянстве температуры воды у дна водоема. Даже в достаточно глубоких водоемах температура воды у дна несколько меняется в течение года (2—6°С), если же глубина имеет порядок мощности слоя скачка, тогда изменения температуры воды у дна значительно большие и должны быть учтены.

13. Как показывают графики на фиг. 7, средняя по вертикали температура воды почти круглый год меньше температуры самой поверхности воды. Исключения составляют лишь зимние месяцы, когда $\mu > 1$. Наибольшее значение μ приходится на февраль почти для всех вертикалей оз. Севан, а минимальное на июнь, иногда на июль. Чем меньше глубина, тем менее изменчив этот коэффициент в годовом разрезе. Так, например, для точки I годовая амплитуда составляет лишь 0,26, в то время, как для точки 3 она составляет 0,48.

Среднее годовое значение μ для всех вертикалей меньше единицы и обнаруживает хорошо выраженную связь с глубиной. Графики на фиг. 7 показывают, во-первых, что вертикаль глубиной 36—37 *м* достаточно хорошо характеризует годовой ход средней по всему озеру величины μ. Отметим, что средняя глубина озера по данным на 1956—60 гг примерно того же порядка.

Это обстоятельство может быть использовано при расчетах теплообмена в воде. Кривая 2 на фиг. 7 показывает, что среднее годовое значение μ с увеличением глубины уменьшается от $\mu = 1{,}0$ для точки I (глубина 18 *м*) до $\mu = 0{,}78$ для точки 3 (глубина 75 *м*). Среднее годовое значение по всему озеру получается равным 0,86.

Институт водных проблем
АН Армянской ССР

Поступила 20 X 1962

Ա. Մ. Մխիթարյան, Մ. Գ. Դաղստանցյան

ՋՐԱՄԲԱՐՆԵՐԻ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ ջերմահաղորդականության ընդհանուր (1.1) հավասարումը որոշ դեպքերում ջրամբարի ջերմաստիճանի ուղղաձիգ բաշխումը որոշելու համար կարելի է բերել (1.3) տեսքին, որտեղ վերջին անդամը հաշվի է առնում արևի ճառագայթային էներգիայի կլանումը ջրի կողմից «թափանցիկ» ջրամբարների համար։ «Պղտոր» ջրամբարների համար այդ էներգիան կլանվում է վերին բարակ շերտերում, ուստի հավասարման մեջ կարող է հաշվի չառնվել։ Ընդունելով տուրբուլենտ փոխանակման գործակցի համար (1.4) արտահայտությունը, ներկայացնելով ջերմաստիճանը (1.5) տեսքով և անցնելով (1.8) չափազուրկ մեծություններին, հավասարումը բերվում է (1.10) տեսքին։ Նախնական պայմանները բավարարվում են, քանի որ որոնվում է ըստ ժամանակի պարբերական լուծում, իսկ սահմանային պայմաններն ունեն (1.11) տեսքը։ Խնդրի լուծումն այս դեպքում ստացվում է (1.18) և (1.19) տեսքով։ Ինտեգրման հաստատունները որոշվում են (1.24)-ից։

Հաջորդ պարագրաֆում բերվում է նույն խնդրի լուծումն այն դեպքում, երբ տուրբուլենտականության գործակիցը կախված է ինչպես խորությունից, այնպես էլ ժամանակից՝ (2.1) տեսքով։ Հավասարումն ունի (2.2) տեսքը։

Անցնելով նոր փոփոխականի ըստ (2.3)-ի, հավասարմանը տրվում է (2.4) տեսքը, որը ճշտությամբ համընկնում է (1.10)-ի հետ, միայն «նորմալ» ժամանակի փոխարեն այստեղ մտնում է «դեֆորմացված» ժամանակը։ Սահմանային պայմանները մնում են նույնը, բացի (1.11)-ի 1-ից, որը (1.12)-ի փոխարեն ընդունում է (2.8) տեսքը։ Այնուհետև բերվում է ջերմաստիճանի ստացիոնար մասի խնդրի լուծումը, որն ունի (2.10) տեսքը։ Հաջորդ պարագրաֆում բերվում են օրինակների հաշվարկներ և արդյունքները համեմատվում են փորձնական տվյալների հետ, վերջում բերվում են եզրակացություններ։ Հաշվարկների համար անհրաժեշտ տվյալները բերվում են աղյուսակ 1-ում։ Ստացիոնար ջերմաստիճանի հաշվարկի արդյունքները գծ. 3-ում ներկայացված են՝ հոծ գծերով տեսական արդյունքները իսկ եռանկյունի, շրջանաձև և խաչաձև կետերով-փորձնական տվյալները։ Գծ. Գծ. 4-ում և 5-ում ներկայացված են ջերմաստիճանի պրոֆիլները տարբեր ամիսների համար։ Տեսական արդյունքները բավարար չափով համընկնում են փորձնական տվյալների հետ։ Հաշվարկների արդյունքները ցույց են տալիս, որ թափանցիկ ջրամբարների համար անհաժեշտ է հաշվի առնել ջրում կլանվող արեգակնային ռադիացիան, կլանման հաստատուն գործակցով և տուրբուլենտ փոխանակման գործակցի փոփոխությունները՝ ըստ խորության։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айнбунд М. М.* К вопросу о термическом режиме оз. Севан. „Результаты комплексных исследований по Севанской проблеме“, т. I. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
2. *Башкирцева В. А.* Проникновение дневного света в глубины моря. Тр. Морск. Научн. Ин-та, т. IV, № 2, 1929.
3. *Браславский А. П., Петровская А. Я.* К вопросу о вертикальном распределении температуры в поверхностных слоях воды. Метеор. и гидр., № 2, 1951.

4. *Браславский А. П., Викулина З. А.* Нормы испарения с поверхности водохранилища. Гидрометеоиздат, 1954.
5. *Гаевский В. Л.* К вопросу о роли альбедо в формировании радиационного режима поверхности. Тр. ГГО, вып. 39, 1953.
6. *Грищенко Д. Л.* Альбедо и радиационный баланс моря. Тр. ГГО, вып. 46, 1955.
7. *Давыдов В. К.* Термика оз. Севан. Материалы по исследованию оз. Севан, ч. II, вып. 1. Гидрометеоиздат, 1933.
8. *Зайков Б. Д.* Испарение с водной поверхности прудов и малых водохранилищ на территории СССР. Тр. ГГИ, вып. 21, 1949.
9. *Иванова З. С.* Влияние изменения коэффициента турбулентного обмена тепла на распространение температурных колебаний в море. Автореферат диссертации. Морск. гидрофиз. ин-т, М., 1954.
10. *Кириллова Т. В.* Радиационный баланс оз. Севан. Тр. ГГО, вып. 78, 1958.
11. *Кириллова Т. В.* и *Бюриг Р. Ф.* О результатах измерения подводной радиации. Тр. ГГО, вып. 78, 1958.
12. *Киткин П. А.* Поперечная циркуляция в ветровом течении и глубина перемешивания в устойчиво стратифицированном море. Тр. ГОИН, вып. II, 1949.
13. *Колесников А. Г.* Вычисление суточного хода температуры поверхности моря. ДАН СССР, **57**, № 5, 1947.
14. *Константинов А. Р.* и *Федоров Т. Г.* Термический режим Валдайского озера и распределение метеоэлементов над его поверхностью. Тр. ГГИ, вып. 76, 1960.
15. *Мхитарян А. М.* К оценке минимальной глубины оз. Севан с точки зрения испарения. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, **11**, № 5, 1958.
16. *Мхитарян А. М.* Испарение с поверхности оз. Севан. „Результаты комплексных исследований по Севанской проблеме", т. I. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
17. *Мхитарян А. М.* О минимальной глубине оз Севан. Там же.
18. *Россолимо Л. Л.* Некоторые особенности температурного режима малых озер. Сб. „Малые водоемы равн. обл. СССР и их использование". Гидрометеоиздат, 1961.
19. *Самойленко В. С.* Формирование температурного режима морей. Гидрометеоиздат, 1959.
20. *Тимофеев М. П.* О методике расчета температуры водоемов. Метеор. и гидр., № 12, 1958.
21. *Тимофеев М. П.* О связи между метеорологическими условиями и температурой поверхности водоемов. Тр. Лабор-рии озероведения АН СССР, **11**, 1959.
22. *Тимофеев М. П.* (ред.). Метеорологический режим оз. Севан. Гидрометеоиздат, 1960.
23. *Товбин Н. В.* О температуре на поверхности раздела водоем—воздух. Тр. ин-та Гидробиологии АН УССР, 1949.
24. *Цикунов В. А.* К теории формирования температурного скачка в море. Тр. ГОИН, вып. 29, 1955.
25. *Штокман В. Б.* Вертикальное распределение тепловых волн в море и косвенные методы определения коэффициента теплопроводности. Тр. ин-та океанологии АН СССР, вып. 1, 1946.
26. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций. ОГИЗ, М.-Л., 1948.