

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. Киракосян

О ползучести сферической безмоментной оболочки

Задачи безмоментных оболочек в условиях ползучести рассматривались в работах Л. М. Качанова [1], И. И. Гольденבלата и Н. А. Николаенко [2], В. И. Розенблюма [3] и других. Целью настоящей заметки является на основе теории старения [1] численным путем показать порядок изменения напряжений в безмоментной сферической оболочке вследствие ползучести и выявить некоторые особенности этих изменений в зависимости от характера нагрузок. В работе, непосредственным вычислением напряжений в установленном режиме, показывается, что в отдельных случаях ползучесть существенным образом изменяет всю картину напряженного состояния.

1. Рассмотрим усеченную с двух сторон сферическую оболочку (сферический пояс) постоянной толщины h радиуса R , оба края которой защемлены. Пусть на оболочку приложены постоянные поверхностные нагрузки — внутреннее давление p и касательные напряжения q по меридианам срединной поверхности оболочки. Положение какого-либо кольцевого круга срединной поверхности оболочки будем определять длиной отрезка по меридиану s , отсчитываемой от начального кольцевого круга $s_0 = 0$ (фиг. 1).

Граничные условия задачи будут:

$$\text{на срединной поверхности } X = q, Y = 0, Z = p, \quad (1.1)$$

$$\text{на краях оболочки } u(0, t) = u(l, t) = 0$$

(u — перемещения срединной поверхности по меридианам, t — координата времени, отсчитываемая от начала деформирования $t_0 = 0$, l — длина оболочки по меридиану).

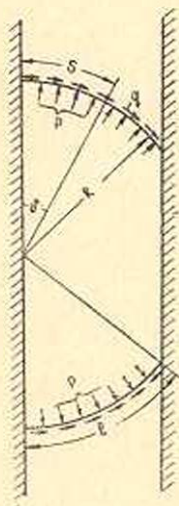
Уравнения равновесия имеют вид [4]

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} + (T_2 - T_1) \frac{\sin \vartheta}{r} = -X, \quad (1.2)$$

$$T_2 = RZ - T_1,$$

где T_1 и T_2 — тангенциальные усилия, ϑ — угол между касательной к меридиану и осью симметрии, r — расстояние от точек срединной поверхности до оси симметрии.

Геометрические соотношения имеют вид [4]



Фиг. 1.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\sin \vartheta}{r} u + \frac{w}{R}.\end{aligned}\quad (1.3)$$

Здесь ε_1 , ε_2 и w — компоненты деформации и прогиб оболочки.

Интегрируя (1.2), для напряжений $\sigma_1 = \frac{T_1}{h}$ и $\sigma_2 = \frac{T_2}{h}$ получим [3]

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \sigma_1 + A_1 C(t), \\ \sigma_2 &= \frac{Rp}{h} - \tau_1,\end{aligned}\quad (1.4)$$

где

$$\tau_1 = -\frac{q\left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta\right)}{2h \cos^2 \vartheta} - \frac{Rp}{2h} \operatorname{tg}^2 \vartheta, \quad A_1 = \frac{1}{Rh \cos^2 \vartheta}, \quad (1.5)$$

$C(t)$ — произвольная функция интегрирования.

Интегрируя (1.3) с учетом условий на краях (1.1), получим [4]

$$\cos \vartheta_1 \int_0^l \frac{1}{\cos \vartheta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) ds = 0, \quad (1.6)$$

где

$$\vartheta_1 = \vartheta \Big|_{s=l} \neq \frac{\pi}{2}. \quad (1.7)$$

Исходя из основных положений теории старения [1], для компонентов деформаций в установленном режиме имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{Bt}{2} T^{m-1} (\tau_1 - \sigma), \\ \varepsilon_2 &= \frac{Bt}{2} T^{m-1} (\tau_2 - \sigma),\end{aligned}\quad (1.8)$$

где B — коэффициент ползучести материала, $T = \frac{1}{V^3} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}$

— интенсивность касательных напряжений, m — показатель ползучести,

$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}$ — среднее давление.

Отметим, что уравнения установившейся ползучести (1.8) пригодны при достаточно больших t , для которых практически установлен период квазивязкого течения.

Пользуясь выражениями для напряжений (1.4) и (1.5) с учетом (1.8), из (1.6) получим следующее алгебраическое уравнение m -ой степени относительно C , — значения функции $C(t)$ для установившегося режима:

$$\int_0^l \frac{1}{\cos^{2m+1}\vartheta} \left[\frac{2}{R} C_y - q \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) - Rp \right] \left[q^2 \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right)^2 + \right. \\ \left. + R^2 p^2 \sin^4 \vartheta + 2Rpq \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) + \frac{R^2 p^2}{2} \sin^2 2\vartheta + \frac{4}{3} R^2 p^2 \cos^4 \vartheta - \right. \\ \left. - 4 \left(p + \frac{q}{R} \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) \right) C_y + \frac{4}{R^2} C_y^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} ds = 0. \quad (1.9)$$

Из этого уравнения видно, что для данной задачи влияние материала обусловлено лишь присутствием показателя его ползучести m , следовательно, коэффициент ползучести B не входит в решение задачи. Дело в том, что уравнение (1.9) получено для установленного режима ползучести. Аналогичное уравнение для неустановленного режима, несомненно, содержит в себе более полный состав характеристик геометрического и физико-механического характера, в том числе и коэффициент ползучести B .

В самом деле, уравнения ползучести в неустановленном режиме будут

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \frac{\Omega(t)}{2} T^{m-1} (z_1 - z) + \frac{1}{2G} \left(z_1 - \frac{3\nu}{1+\nu} z \right), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{\Omega(t)}{2} T^{m-1} (z_2 - z) + \frac{1}{2G} \left(z_2 - \frac{3\nu}{1+\nu} z \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\Omega(t) = \int_0^l B(z) dz, \quad (1.11)$$

G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

С помощью (1.10), (1.6) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\Omega(t)}{2^{m-1} h^{m-1}} \int_0^l \frac{1}{\cos^{2m+1}\vartheta} \left[\frac{2}{R} C(t) - q \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) - Rp \right] \times \\ \times \left[q^2 \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right)^2 + R^2 p^2 \sin^4 \vartheta + 2Rpq \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) + \right. \\ \left. + \frac{R^2 p^2}{2} \sin^2 2\vartheta + \frac{4}{3} R^2 p^2 \cos^4 \vartheta - 4 \left(p + \frac{q}{R} \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) \right) C(t) + \right. \\ \left. + \frac{4}{R^2} C^2(t) \right]^{\frac{m-1}{2}} ds + \frac{1}{G} \int_0^l \frac{1}{\cos^3 \vartheta} \left[\frac{2}{R} C(t) - q \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) - Rp \right] ds = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Нетрудно заметить, что если пренебрегать упругими деформациями, то из (1.12) получится (1.9) — уравнение для установленного режима.

Пользуясь (1.11), при $t=0$ из (1.12) получим следующее линейное уравнение относительно C' — значения функции $C(t)$ для упруго-мгновенного состояния

$$\int_0^l \frac{1}{\cos^3 \vartheta} \left[\frac{2}{R} C' - q \left(s + \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \right) - Rp \right] ds = 0. \quad (1.13)$$

2. Для определенности положим $m=3$, тогда (1.9) можно привести к удобному виду интегрирования

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left(\frac{3q^2 C_y}{2R} \frac{s^2}{\cos^2 \vartheta} + 3q^2 C_y \frac{s \sin \vartheta}{\cos^4 \vartheta} + \frac{3RC_y (q^2 + 2p^2)}{2} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^5 \vartheta} + \right. \\ & + \frac{3Rp^2 C_y}{2} \frac{\sin^4 \vartheta}{\cos^7 \vartheta} + 3pq C_y \frac{s \sin^2 \vartheta}{\cos^7 \vartheta} + 3pqRC_y \frac{\sin^3 \vartheta}{\cos^6 \vartheta} + 3pq C_y \frac{s}{\cos^5 \vartheta} + \\ & + 3pqRC_y \frac{\sin \vartheta}{\cos^4 \vartheta} + \frac{5p^2 RC_y}{3} \frac{1}{\cos^3 \vartheta} - \frac{3qC_y^2}{R^2} \frac{s}{\cos^7 \vartheta} - \frac{3qC_y^2}{R} \frac{\sin \vartheta}{\cos^6 \vartheta} - \\ & - \frac{3pC_y^2}{R} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^7 \vartheta} - \frac{3pC_y^2}{R} \frac{1}{\cos^5 \vartheta} + \frac{2C_y^3}{R^3} \frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \frac{q^3}{4} \frac{s^2}{\cos^7 \vartheta} - \frac{3q^3 R}{4} \frac{s^2 \sin \vartheta}{\cos^6 \vartheta} - \\ & - \frac{3qR^2 (2p^2 + q^2)}{4} \frac{s \sin^2 \vartheta}{\cos^5 \vartheta} - \frac{3qp^2 R^2}{4} \frac{s \sin^4 \vartheta}{\cos^7 \vartheta} - \frac{5p^2 q R^2}{6} \frac{s}{\cos^3 \vartheta} - \\ & - \frac{3q^2 p R}{4} \frac{s^2 \sin^2 \vartheta}{\cos^7 \vartheta} - \frac{3q^2 p R}{4} \frac{s^2}{\cos^5 \vartheta} - \frac{3q^2 p R^2}{2} \frac{s \sin \vartheta}{\cos^4 \vartheta} - \\ & - \frac{3q^2 p R^2}{2} \frac{s \sin \vartheta}{\cos^4 \vartheta} - \frac{q(q^2 + 6p^2) R^3}{4} \frac{\sin^3 \vartheta}{\cos^4 \vartheta} - \frac{3p^2 q R^3}{4} \frac{\sin^5 \vartheta}{\cos^6 \vartheta} - \\ & - \frac{3p(p^2 + q^2) R^3}{4} \frac{\sin^4 \vartheta}{\cos^5 \vartheta} - \frac{p(10p^2 + 9q^2) R^3}{12} \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^3 \vartheta} - \\ & \left. - \frac{5p^2 q R^3}{6} \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} - \frac{p^3 R^3}{4} \frac{\sin^6 \vartheta}{\cos^7 \vartheta} - \frac{p^3 R^3}{3} \frac{1}{\cos \vartheta} \right) ds = 0, \quad (2.1) \end{aligned}$$

где

$$\vartheta = \frac{s}{R}.$$

Пусть

$$l = R = 100 \text{ см} \text{ и } p = nq. \quad (2.2)$$

После интегрирования (2.1)* с учетом (2.2) получим следующее алгебраическое уравнение третьей степени относительно C_y

$$\begin{aligned} & \frac{23.34}{R^2} C_y^3 - (46.56 + 34.80n) q C_y^2 + (31.98 + 46.29n + 17.67n^2) q^2 R^2 C_y - \\ & - (7.43 + 15.94n + 11.72n^2 + 2.96n^3) q^3 R^4 = 0. \quad (2.3) \end{aligned}$$

* Некоторые интегралы подсчитаны приближенно.

Уравнение (2.3) решим для следующих пяти частных случаев

$$1) p = 0, q = 50 \text{ кг/см}^2, \quad 2) p = q = 30 \text{ кг/см}^2, \\ n = 0, \quad n = 1, \quad (2.4)$$

$$3) p = 2q = 30 \text{ кг/см}^2, \quad 4) p = 3q = 30 \text{ кг/см}^2, \quad 5) p = 60 \text{ кг/см}^2, q = 0. \\ n = 2 \quad n = 3 \quad n = \infty$$

Внося (2.4) в (2.3), получим соответственно:

$$\begin{aligned} 2.334 x_1^3 - 23.280 x_1^2 + 79.950 x_1 - 92.875 &= 0, \\ 2.334 x_2^3 - 24.410 x_2^2 + 86.346 x_2 - 102.735 &= 0, \\ 2.334 x_3^3 - 17.424 x_3^2 + 43.929 x_3 - 37.181 &= 0, \\ 2.334 x_4^3 - 15.096 x_4^2 + 32.980 x_4 - 24.065 &= 0, \\ 2.334 x_5^3 - 20.880 x_5^2 + 63.612 x_5 - 63.936 &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$x_i = 10^5 C_{yi} \text{ кг}. \quad (2.6)$$

Каждое из этих уравнений имеет одно действительное решение (дискриминанты положительны).

Разрешая (2.5), с учетом (2.6) получим

$$\begin{aligned} C_{y1} &= 2.869 \cdot 10^5 \text{ кг}, \quad C_{y2} = 3.150 \cdot 10^5 \text{ кг}, \quad C_{y3} = 2.150 \cdot 10^5 \text{ кг}, \\ C_{y4} &= 1.800 \cdot 10^5 \text{ кг}, \quad C_{y5} = 2.235 \cdot 10^5 \text{ кг}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для того, чтобы иметь представление о величинах изменений напряженных состояний по сравнению с мгновенными (упругими) состояниями, разрешим (1.13) для тех же случаев.

Из (1.13), после интегрирования, получим

$$C' = \frac{2.35 + 2.16 n}{4.34} R q^2, \quad (2.8)$$

откуда для случаев (2.4) находим

$$\begin{aligned} C'_1 &= 2.707 \cdot 10^5 \text{ кг}, \quad C'_2 = 3.118 \cdot 10^5 \text{ кг}, \quad C'_3 = 2.305 \cdot 10^5 \text{ кг}, \\ C'_4 &= 2.035 \cdot 10^5 \text{ кг}, \quad C'_5 = 2.986 \cdot 10^5 \text{ кг}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

На основе полученных данных составлена таблица.

Таблица 1

№ пп.	n	$p \text{ кг/см}^2$	$q \text{ кг/см}^2$	$C' \cdot 10^{-5} \text{ кг}$	$C_y \cdot 10^{-5} \text{ кг}$	C'/C_y
1	0	0	50	2.707	2.869	1.0598
2	1	30	30	3.118	3.150	1.0103
3	2	30	15	2.305	2.150	0.9327
4	3	30	10	2.035	1.800	0.8845
5	∞	60	0	2.986	2.235	0.7495

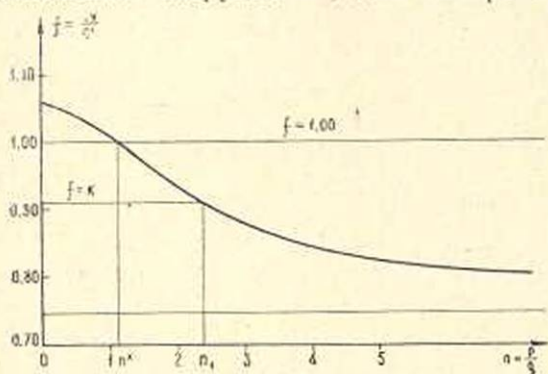
Как нетрудно заметить, напряженное состояние оболочки в зависимости от характера нагрузок (n) вследствие ползучести изменяется в достаточно широком интервале.

Например, в установленном режиме ползучести напряжения в сечении $s = 0$ отличаются от соответствующих мгновенных (упругих) напряжений в отдельных случаях (например, при $n = \infty$) на 25%.

Зависимость изменений напряженного состояния от характера нагрузок должна быть непрерывной и монотонной, следовательно, по данным вышеприведенной таблицы можно построить приближенный график функции

$$\frac{C_y}{C'} = f\left(\frac{p}{q} i\right). \quad (2.10)$$

Из графика видно, что для данной задачи существует такое соотношение нагрузок n^* , для которого установленное напряженное



Фиг. 2.

состояние совпадает с мгновенным напряженным состоянием. Но состояние ползучести с течением времени *монотонно* изменяется от начального упругого состояния к состоянию установившейся ползучести ([1], стр. 165), следовательно, при $n = n^*$ напряженное состояние будет совпадать с упругим при любом t . Это

означает, что ползучесть всегда компенсируется релаксацией.

Имея график функции (2.10), можно, по заданной величине изменений напряжений вследствие ползучести, определить интервал допускаемых соотношений внешних нагрузок. Например, для заданного значения функции f

$$f = k \quad (2.11)$$

интервал допускаемых соотношений нагрузок по графику будет

$$0 \leq n_{\text{доп}} \leq n_1. \quad (2.12)$$

Аналогичные рассуждения будут уместными и для других случаев оболочек двойной кривизны, находящихся в условиях ползучести.

Вычисление перемещений u и w не представляет особого труда, и мы на этом не останавливаемся.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

ԱՆՄՈՍԵՆՏ ՍՖԵՐԻԿ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍՈՂՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության նպատակն է սողքի ձեռացման տեսության [1] հիման վրա թվային եղանակով ցույց տալ սողքի հետեանքով սֆերիկ անմոմենտ թաղանթում լարումների փոփոխման կարգը և ի հայտ բերել այդ փոփոխությունների մի քանի առանձնահատկություններ՝ կախված արտաքին բեռների բնույթից: Կայունացված վիճակում լարումների անմիջական հաշվառմամբ ցույց է տրվում, որ տաանձին դեպքերում սողքն էապես փոխում է լարվածալին վիճակի ամբողջ պատկերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Ползучесть и несущая способность оболочек. Научные сообщения «ЦНИИСК», № 13.
3. Розенблюм В. И. О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек. ПМТФ, № 4, 1960.
4. Новожилов В. В. Теория тонких безмоментных оболочек. Судпромгиз, 1951. *