

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. В. Михайлов

**Кручение круглого вала с продольной полукруглой
 выточкой, ослабленного продольной
 круговой полостью**

В работе дано приближенное решение задачи о кручении круглого вала с продольной полукруглой выточкой, ослабленного продольной круговой полостью (фиг. 1).

Получены формулы для вычисления жесткости и напряжений. В качестве примера рассмотрен случай, когда граница внутреннего контура близко подходит к наружному контуру. Вычислены жесткость и напряжения с оценкой погрешности. Для сравнения приведены значения жесткости и напряжений для круглого вала с продольной полукруглой выточкой, вычисленные по формулам Вебера К. [1].

Решение задачи о кручении круглого вала с продольной полукруглой выточкой дано в работах [2], [3].

§ 1. Постановка задачи

Обозначим двусвязную область сечения (фиг. 1) через ω , радиус вала — R , радиус отверстия — a , расстояние от центра круга до центра кругового отверстия — b , радиус полукруглой канавки — r .

Примем, что функция напряжений Φ точно удовлетворяет в ω дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \Phi = -2\mu\tau \quad (1.1)$$

и граничному условию $\Phi = 0$ на внешнем контуре сечения L_0 , исключая контур L_1 полукруглой канавки.

Граничное условие $T_n = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$ на контуре полукруглой канавки L_1 и на внутреннем контуре сечения L_2 удовлетворяем приближенно, согласно принципу Сен-Венана [4].

Решение уравнения (1.1) для указанной задачи представим так:

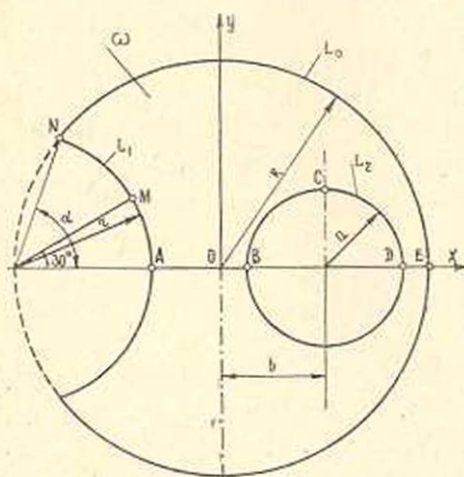
$$\Phi = -\frac{\mu\tau z\bar{z}}{2} + \varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})}, \quad (1.2)$$

где

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Функция $\varphi(z)$ должна быть голоморфной в рассматриваемой области ω , следовательно, ее можно представить в следующем виде [5]

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{1}{(z+R)^k} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{1}{(z-b)^k}. \quad (1.3)$$



Фиг. 1.

Здесь учтено то обстоятельство, что функция $\Phi_1 = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)}$ должна быть симметричной относительно оси x .

В первом приближении функция напряжений будет иметь вид

$$\Phi = -\frac{\mu\tau z\bar{z}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z^k + \bar{z}^k) + A_1 \left[\frac{1}{(z+R)} + \frac{1}{(\bar{z}+R)} \right] + B_1 \left[\frac{1}{(z-b)} + \frac{1}{(\bar{z}-b)} \right]. \quad (1.4)$$

Из граничного условия $\Phi = 0$ на контуре L_0 имеем

$$2C_0 = \frac{\mu\tau R^2}{2} - \frac{A_1}{R},$$

$$C_k = -B_1 \frac{b^{k-1}}{R^{2k}}, \quad \text{где } k \geq 1.$$

Согласно [4] граничное условие $T_n = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$ на контурах L_1 и L_2 в первом приближении можно представить так:

$$\int_{L_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad \int_{L_1} (z + \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \\ \int_{L_1} (z - \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad (1.5)$$

$$\int_{L_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad \int_{L_2} (z + \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \\ \int_{L_2} (z - \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Неизвестные коэффициенты A_1 и B_1 определяем из граничного условия на L_1 и L_2 .

$$\int_{L_1} (z - \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad (1.7)$$

$$\int_{L_2} (z - \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0.$$

Первые два условия (1.5) и (1.6) удовлетворяются тождественно. Из (1.7) получаем систему уравнений с двумя неизвестными A_1 и B_1 .

Для A_1 и B_1 соответственно имеем

$$A_1 = -\frac{\mu \tau}{2} \frac{Rr^2 l_{12} l_{21} - l_{11} a^2 b}{(l_{12} l_{21} - l_{11} l_{22})}, \quad (1.8)$$

$$B_1 = \frac{\mu \tau}{2} l_{12} \frac{(a^2 b - Rr^2 l_{22})}{(l_{12} l_{21} - l_{11} l_{22})}, \quad (1.9)$$

где

$$l_{11} = 2 \left\{ \frac{R^2 (R+b)^2 + r^2 b^2}{b^2 (R+b)^2} \operatorname{arctg} \frac{br \sin \alpha}{R(R+b) - br \cos \alpha} + \right. \\ \left. + \left[1 + \frac{r^2}{(R+b)^2} \right] \operatorname{arctg} \frac{r \sin \alpha}{(R+b) - r \cos \alpha} - \right. \\ \left. - \frac{[(R+b)^2 - r^2] r \sin \alpha}{(R+b)[(R+b)^2 - 2r(R+b) \cos \alpha + r^2]} - \right. \\ \left. - \frac{R[R^2(R+b)^2 - b^2 r^2] r \sin \alpha}{b(R+b)[R^2(R+b)^2 - 2brR(R+b) \cos \alpha + b^2 r^2]} + \frac{2r^2 \alpha}{(R+b)^2} \right\},$$

$$l_{12} = (2\alpha - \sin 2\alpha), \quad l_{21} = 1 - \frac{R^2 a^2}{(R^2 - b^2)^2}, \quad l_{22} = \frac{a^2}{(R+b)^2}.$$

Если положить $a = 0$, то получим $A_1 = -\frac{\mu \tau R r^2}{2}$, т. е. точное решение задачи о кручении круглого вала с полукруглой канавкой.

Удовлетворение граничных условий в первом приближении по внутреннему контуру L_2 дает недостаточно точные результаты (таблица 2).

Во втором приближении контур L_2 делим на два участка $0 \leq \theta \leq \pi$; $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, но ввиду симметричности функции Φ относительно оси x , интегрирование ведем от 0 до π .

Функция напряжений во втором приближении будет

$$\Phi = -\frac{\mu \tau z \bar{z}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z^k + \bar{z}^k) + A_1 \left[\frac{1}{z+R} + \frac{1}{\bar{z}+R} \right] + \\ + \sum_{k=1}^{k=3} B_k \left[\frac{1}{(z-b)^k} + \frac{1}{(\bar{z}-b)^k} \right]. \quad (1.10)$$

Граничные условия будут

$$\Phi = 0 \text{ на } L_0$$

и

$$\int_{L_1} (z - \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad (1.11)$$

$$\int_{b-a}^{b+a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0,$$

$$\int_{b-a}^{b+a} (z + \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad (1.12)$$

$$\int_{b-a}^{b+a} (z - \bar{z}) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0$$

на L_1 и L_2 согласно [4].

Из (1.11) имеем

$$2C_0 = \frac{\mu \tau R^2}{2} - \frac{A_1}{R}, \quad C_1 = -\frac{B_1}{R^2}, \quad C_2 = -\frac{1}{R^4} (B_1 b - B_2),$$

$$C_k = -\frac{1}{R^{2k}} \left[B_1 b^{k-1} + B_2 (k-1) b^{k-2} + \frac{B_3}{2} (k-1)(k-2) b^{k-3} \right],$$

где $k \geq 3$.

Тогда функция напряжений примет вид

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{\mu \tau z \bar{z}}{2} + \frac{\mu \tau R^2}{2} - \frac{A_1}{R} - \sum_{k=1}^{\infty} B_1 \frac{b^{k-1}}{R^{2k}} (z^k + \bar{z}^k) - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty} B_2 \frac{b^{k-2}}{R^{2k}} (k-1) (z^k + \bar{z}^k) - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{B_3 b^{k-3}}{2R^{2k}} (k-1)(k-2) (z^k + \bar{z}^k) + \\ & + A_1 \left[\frac{1}{(z+R)} + \frac{1}{(\bar{z}+R)} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[\frac{1}{(z-b)^k} + \frac{1}{(\bar{z}-b)^k} \right]. \end{aligned}$$

Из (1.12) получаем систему четырех уравнений относительно A_1 и B_k (ввиду громоздкости выражений, система уравнений не приводится), решая которую находим A_1 и B_k .

С целью сравнения приближений, аналогичным образом, выполнено третье приближение.

Сравнение напряжений, вычисленных в первом, втором и третьем приближениях, показывает (таблица 4), что уже второе приближение дает практически приемлемые результаты.

§ 2. Крутящий момент и напряжения

Для вычисления крутящего момента используем формулу из [6], [7].

$$M_{kp} = \frac{1}{2i} \int_{L_2+L_1} z \bar{z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} d\bar{z} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} dz \right) - \frac{\mu \tau}{4i} \int_{L_2+L_1} z^2 z dz - \\ - \frac{1}{2i} \int_{L_2} z \bar{z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} d\bar{z} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} dz \right) + \frac{\mu \tau}{4i} \int_{L_2} z^2 z dz. \quad (2.1)$$

Для рассматриваемого сечения (фиг. 1) во втором приближении имеем

$$M_{kp} = \mu \tau R^4 \alpha - \mu \tau a^4 b^2 \pi - \frac{\mu \tau a^4 \pi}{2} + \frac{\mu \tau R r (R^2 + 3r^2) \sin \alpha}{2} - \\ - \mu \tau \left(R^2 + \frac{r^2}{2} \right) r^2 \alpha - \frac{\mu \tau R^2 r^2}{4} \sin 2\alpha + A_1 \left[\frac{R \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} - \frac{2(R^2 + r^2)}{r} \sin \alpha + \right. \\ \left. + 2R\alpha + R \sin 2\alpha - \frac{2a^2 b \pi}{(R+b)^2} \right] + \\ + B_1 \left[\frac{2R^2 \psi_3}{b \gamma_3} + 2R^2 \frac{\psi_2}{\gamma_2} - (R^2 + r^2) R^2 I_2 + R^2 I_3 + R^2 I_9 - \right. \\ \left. - (R^2 + r^2) N_2 + R N_5 + R r^2 N_9 - \frac{2R^2 a^2 b \pi}{(R^2 - b^2)^2} - 2b\pi \right] + \\ + B_2 \left\{ 4R^2 \frac{\lambda_2 \psi_2}{\gamma_2^2} - 4R^2 T_2 - 2R^2 [(2R^2 + r^2) I_4 - R I_7 + R^2 r^2 I_{10} - \right. \\ \left. - R(R^2 + 2r^2) I_{12}] - 2[(R^2 + r^2) N_3 - R N_6 - R r^2 N_{10}] - \frac{4a^2 b^2 R^2 \pi}{(R^2 - b^2)^3} \right\} + \\ + B_3 \left\{ \frac{2R^2 (3\lambda_2^2 - \psi_2^2) \psi_2}{\gamma_2^3} - 6R^2 T_4 + 3R^2 [R^2 r^2 I_{11} + R^2 (R^2 + 3r^2) I_{13} + \right. \\ \left. + 3R(R^2 + r^2) I_{14} - (3R^2 + r^2) I_{15} + R I_{16}] - \right. \\ \left. - 3[(R^2 + r^2) N_4 - R N_7 - R r^2 N_{11}] - \frac{6a^2 b^3 R^2 \pi}{(R^2 - b^2)^4} \right\}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= R(R+b) - rb \cos \alpha, & \psi_1 &= rb \sin \alpha, & \gamma_1 &= \lambda_1^2 + \psi_1^2, \\ \lambda_2 &= R \cos 2\alpha - b, & \psi_2 &= R \sin 2\alpha, & \gamma_2 &= \lambda_2^2 + \psi_2^2, \\ \lambda_3 &= R(R - b \cos 2\alpha), & \psi_3 &= Rb \sin 2\alpha, & \gamma_3 &= \lambda_3^2 + \psi_3^2, \\ \lambda_4 &= r \cos \alpha - (R+b), & \psi_4 &= r \sin \alpha, & \gamma_4 &= \lambda_4^2 + \psi_4^2, \\ T_2 &= \frac{R^2 \lambda_2 \psi_2}{b^2 \gamma_2^2} - \frac{2R \lambda_2 \psi_2 \cos 2\alpha + R(\lambda_2^2 - \psi_2^2) \sin 2\alpha}{b^2 \gamma_2^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{R^2 \psi_3 (3\lambda_3^2 - \psi_3^2)}{b \gamma_3^3} \left(\frac{R \cos 2\alpha}{b} - \frac{R^2}{2b^2} \cos 4\alpha \right) - \\
&\quad - \frac{R^2 \lambda_3 (\lambda_3^2 - 3\psi_3^2)}{b \gamma_3^3} \left(\sin 4\alpha - \frac{R}{b} \sin 2\alpha \right), \\
I_2 &= \frac{2\psi_1}{b \gamma_1}, \quad I_3 = \frac{2}{b^2} \left[\frac{R(R+b) \psi_1}{\gamma_1} - \operatorname{arctg} \frac{br \sin \alpha}{R(R+b) - br \cos \alpha} \right], \\
I_4 &= 2 \left[\frac{2\lambda_1 \psi_1 r \cos \alpha + (\lambda_1^2 - \psi_1^2) r \sin \alpha}{b \gamma_1^2} - \frac{R(R+b) \lambda_1 \psi_1}{b^2 \gamma_1^2} \right], \\
I_7 &= 2 \left[\frac{2R(R+b)}{b^2} \frac{2\lambda_1 \psi_1 r \cos \alpha + (\lambda_1^2 - \psi_1^2) r \sin \alpha}{\gamma_1^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3R(R+b)}{b} \frac{R(R+b) \lambda_1 \psi_1}{b^2 \gamma_1^2} + \frac{1}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{br \sin \alpha}{R(R+b) - br \cos \alpha} \right], \\
I_9 &= 2 \left[\frac{\psi_1}{R(R+b) \gamma_1} + \frac{1}{R^2(R+b)^2} \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{br \sin \alpha}{R(R+b) - br \cos \alpha} \right) \right], \\
I_{10} &= 2 \left[\frac{3\lambda_1 \psi_1}{R(R+b) \gamma_1^2} - \frac{b}{R^2(R+b)^2} \frac{2\lambda_1 \psi_1 r \cos \alpha + (\lambda_1^2 - \psi_1^2) r \sin \alpha}{\gamma_1^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{R^3(R+b)^3} \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{br \sin \alpha}{R(R+b) - br \cos \alpha} \right) \right], \\
I_{11} &= 2 \left[\frac{11}{R(R+b)} \frac{3\lambda_1^2 \psi_1 - \psi_1^3}{6\gamma_1^3} - \frac{5b}{R^2(R+b)^2} \times \right. \\
&\quad \times \frac{(3\lambda_1^2 \psi_1 - \psi_1^3) r \cos \alpha + (\lambda_1^3 - 3\lambda_1 \psi_1^2) r \sin \alpha}{2\gamma_1^3} + \\
&\quad + \frac{b^2}{R^3(R+b)^3} \frac{(3\lambda_1^2 \psi_1 - \psi_1^3) r^2 \cos 2\alpha + (\lambda_1^3 - 3\lambda_1 \psi_1^2) r^2 \sin 2\alpha}{\gamma_1^3} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{R^4(R+b)^4} \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{br \sin \alpha}{R(R+b) - br \cos \alpha} \right) \right], \\
I_{12} &= \frac{2\lambda_1 \psi_1}{b \gamma_1^2}, \quad I_{13} = \frac{2}{3b} \frac{(3\lambda_1^2 \psi_1 - \psi_1^3)}{\gamma_1^3}, \\
I_{14} &= 2 \left[\frac{(3\lambda_1^2 \psi_1 - \psi_1^3) 2 \cos \alpha + (\lambda_1^3 - 3\lambda_1 \psi_1^2) 2 \sin \alpha}{2b \gamma_1^3} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{R(R+b) (3\lambda_1^2 \psi_1 - \psi_1^3)}{6b^2 \gamma_1^3} \right], \\
I_{15} &= 2 \left[\frac{(3\lambda_1^2 \psi_1 - \psi_1^3) r^2 \cos 2\alpha + (\lambda_1^3 - 3\lambda_1 \psi_1^2) r^2 \sin 2\alpha}{b \gamma_1^3} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2R(R+b)}{b} \frac{(3\lambda_1^3\psi_1 - \psi_1^3)r \cos \alpha + (\lambda_1^3 - 3\lambda_1\psi_1^2)r \sin \alpha}{2b\gamma_1^3} + \\
& + \frac{2R(R+b)}{b} \frac{R(R+b)(3\lambda_1^2\psi_1 - \psi_1^3)}{6b^2\gamma_1^3} \Big], \\
I_{16} = & 2 \left[\frac{3R(R+b)}{b} \frac{(3\lambda_1^2\psi_1 - \psi_1^3)r^2 \cos 2\alpha + (\lambda_1^3 - 3\lambda_1\psi_1^2)r^2 \sin 2\alpha}{b\gamma_1^3} - \right. \\
& - \frac{9R^2(R+b)^2}{b^2} \frac{(3\lambda_1^2\psi_1 - \psi_1^3)r \cos \alpha + (\lambda_1^3 - 3\lambda_1\psi_1^2)r \sin \alpha}{2b\gamma_1^3} + \\
& + \left. \frac{11R^2(R+b)^2}{b^2} \frac{R(R+b)(3\lambda_1^2\psi_1 - \psi_1^3)}{6b^2\gamma_1^3} \right], \\
N_2 = & \frac{2\psi_4}{\gamma_4}, \quad N_3 = \frac{2\lambda_4\psi_4}{\gamma_4^2}, \quad N_4 = \frac{2(3\lambda_4^2\psi_4 - \psi_4^3)}{3\gamma_4^3}, \\
N_5 = & 2 \left[(R+b) \frac{\psi_4}{\gamma_4} - \operatorname{arctg} \frac{r \sin \alpha}{(R+b) - r \cos \alpha} \right], \\
N_6 = & 2 \left[- \frac{(\lambda_4^2 - \psi_4^2)r \sin \alpha - 2\lambda_4\psi_4r \cos \alpha}{\gamma_4^2} - (R+b) \frac{\lambda_4\psi_4}{\gamma_4^2} \right], \\
N_7 = & \left[- \frac{(\lambda_4^3 - 3\lambda_4\psi_4^2)r \sin \alpha - (3\lambda_4^2\psi_4 - \psi_4^3)r \cos \alpha}{\gamma_4^3} - \right. \\
& - \left. \frac{(R+b)}{3} \frac{(3\lambda_4^2\psi_4 - \psi_4^3)}{\gamma_4^3} \right], \\
N_{10} = & 2 \left[\frac{3}{(R+b)} \frac{3\lambda_4\psi_4}{\gamma_4^2} + \frac{(\lambda_4^2 - \psi_4^2)r \sin \alpha - 2\lambda_4\psi_4r \cos \alpha}{\gamma_4^2} \frac{1}{(R+b)^2} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{(R+b)^3} \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \alpha}{(R+b) - r \cos \alpha} \right) \right], \\
N_{11} = & 2 \left[\frac{11}{6(R+b)} \frac{3\lambda_4^2\psi_4 - \psi_4^3}{\gamma_4^3} + \right. \\
& + \frac{5}{2(R+b)^2} \frac{(\lambda_4^3 - 3\lambda_4\psi_4^2)r \sin \alpha - (3\lambda_4^2\psi_4 - \psi_4^3)r \cos \alpha}{\gamma_4^3} - \\
& - \frac{1}{(R+b)^3} \frac{(\lambda_4^3 - 3\lambda_4\psi_4^2)r^2 \sin 2\alpha - (3\lambda_4^2\psi_4 - \psi_4^3)r^2 \cos 2\alpha}{\gamma_4^3} + \\
& + \left. \frac{1}{(R+b)^4} \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \alpha}{(R+b) - r \cos \alpha} \right) \right].
\end{aligned}$$

Для вычисления напряжений имеем известную формулу

$$T_n - iT_s = 2ie^{i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (2.3)$$

где

T_n — касательное напряжение, направленное по нормали n к произвольной кривой, расположенной в области сечения, T_s — касательное напряжение, направленное по касательной к указанной кривой, φ — угол, составленный нормалью n с осью x .

Из (2.3) для напряжения T_s имеем

$$T_s = - \left(e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + e^{-i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right). \quad (2.4)$$

Численный пример выполнен для $b = 0,5 R$, $a = 0,3 R$; $0,35 R$; $0,4 R$ и $r = R$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Результаты решения системы уравнений, получаемой из (1.7) и (1.12), для указанных соотношений размеров приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Приближения	Коэффициенты						
		A_1	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
$a = 0,3 R$	1-ое	-0,490436	0,003432	—	—	—	—	—
	2-ое	-0,495032	0,003529	0,001311	-0,000068	—	—	—
	3-е	-0,495103	0,003543	0,001340	-0,000072	+0,000003	0	0
$a = 0,35 R$	1-ое	-0,484956	0,005397	—	—	—	—	—
	2-ое	-0,493779	0,005701	0,002616	-0,000132	—	—	—
	3-е	-0,493803	0,005738	0,002626	-0,000142	+0,000033	-0,000001	—
$a = 0,4 R$	1-ое	-0,476058	0,009590	—	—	—	—	—
	2-ое	-0,491910	0,009435	0,004864	-0,000300	—	—	—
	3-е	-0,491925	0,009451	0,004882	-0,000321	0,000046	-0,000008	0

На фигуре 2 показана эпюра напряжений для $b = 0,5 R$; $a = 0,3 R$ и $r = R$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Найденная функция напряжений точно удовлетворяет граничному условию $\Phi = 0$ на L_0 и приближенно, но достаточно точно, на контурах L_1 и L_2 , о чем свидетельствуют величины погрешностей $\Delta\%$, определяемых согласно [8].

При точном решении задачи

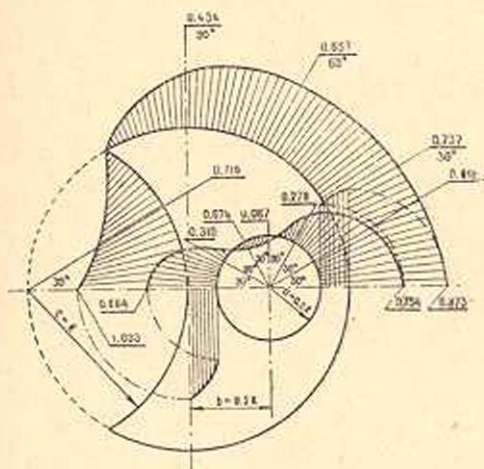
$$T_n = i \left(e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right) = 0 \quad \text{на } L_1 \text{ и } L_2,$$

отсюда

$$\Delta = \frac{e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}}{e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}} 100\%,$$

где

$$\Phi_0 = -\frac{\mu \tau z \bar{z}}{2}, \quad \text{а} \quad \Phi_1 = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)}.$$



Фиг. 2.

Значения погрешностей $\Delta\%$ для наиболее характерных точек поперечного сечения (фиг. 1) стержня приведены в таблице 2.

Таблица 2

	Приближения	Т о ч к и						
		A	M	N	B	C	D	E
$a=0,3 R$	1-ое	0	-0,62	0,15	0	9,2	0	0
	2-ое	0	-0,57	0,014	0	1,04	0	0
	3-е	0	-0,5	0,023	0	0,4	0	0
$a=0,35 R$	1-ое	0	-1,68	0,37	0	12,2	0	0
	2-ое	0	-1,64	0,37	0	0,4	0	0
	3-е	0	-1,7	0,30	0	0,6	0	0
$a=0,4 R$	1-ое	0	-3,4	0,58	0	13	0	0
	2-ое	0	-2,4	0,15	0	2,1	0	0
	3-е	0	-3,2	0,15	0	0,74	0	0

В таблице 3 приведены значения жесткости и напряжения T_x для рассматриваемого сечения и аналогичные данные для круглого вала с полукруглой канавкой, вычисленные по формулам Вебера [1].

Таблица 3

Сечение	Размеры	Жест- кость $\mu\pi R^4$	Напряжение $T_s (\mu\pi R)$ в точках			
			A	B	D	E
Круг с полу- круглой ка- навкой, ослаб- ленный круг- лым отвер- стием	$a=0,3 R$	0,362650	-1,003	$z=0,2 R$	-0,644	$z=0,8 R$ 0,754 0,880
	$r=R$ $a=0,35 R$	0,334845	-1,023	$z=0,15 R$	-0,788	$z=0,85 R$ 0,916 0,986
	$a=0,4 R$	0,301380	-1,074	$z=0,1 R$	-0,946	$z=0,9 R$ 1,156 1,159
				$z=0,2 R$	-0,494	$z=0,8 R$ 0,491
Круг с полу- круглой канав- кой	$r=R$	0,377770	-1	$z=0,15 R$	-0,606	$z=0,85 R$ 0,558 0,75
				$z=0,1 R$	-0,726	$z=0,9 R$ 0,623

Таблица 4

a	Прибли- жения	Напряжение в точках						
		A	M	N	B	C	D	E
0,3 R	1-ое	-0,947	-0,715	-0,0129	-0,397	+0,134	0,592	0,810
	2-ое	-1,003	-0,716	-0,0058	-0,644	-0,067	0,754	0,880
	3-е	-1,005	-0,716	-0,0057	-0,661	-0,062	0,766	0,883
	β_1	+5,6	0,14	124	38,4	100	21,4	9
	β_2	0,2	0	1,7	2,5	8	1,58	0,34
0,35 R	1-ое	-0,916	-0,706	-0,0202	-0,483	+0,161	0,687	0,844
	2-ое	-1,023	-0,707	-0,00668	-0,788	-0,100	0,916	0,986
	3-е	-1,036	-0,707	-0,00654	-0,834	-0,049	0,978	1,003
	β_2	10,5	0,14	204	38,6	61	36	10
	β_3	1,25	0	3	5,6	10,4	6,35	1,4
0,4 R	1-ое	-0,856	-0,690	0,0305	-0,547	+0,187	0,819	0,915
	2-ое	-1,074	-0,691	0,0076	-0,946	-0,148	1,156	1,159
	3-е	-1,083	-0,688	0,0075	-0,969	-0,113	1,215	1,190
	β_2	20	0,14	301	39	25,8	20	21
	β_3	0,83	0,43	1,3	2,7	30,9	4,38	2,6

Проведенные расчеты для круглого стержня с полукруглой канавкой, ослабленного продольной цилиндрической полостью, показывают (таблица 4), что для получения практически приемлемых результатов можно ограничиться выполнением второго приближения.

В таблице 4 приведена относительная погрешность $(k-1)$ -го приближения относительно приближения k

$$\rho_k = \frac{T_s^{(k)} - T_s^{(k-1)}}{T_s^{(k)}} 100\%$$

Լ. Վ. Միրախյան

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԽՈՌՈՋՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ
ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԿԻՍԱՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԱՎՈՍՈՎ ԿՆՈՐ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Հորվածում գիտարկված է շրջանային անցքով թուլացված երկաթեական կիսաշրջանային ալոսով շրջանային ձողի ոլորման խնդիրը:

Եզրային պայմանները, (4) -ի համաձայն, L_1 -ի և L_2 -ի վրա բախարարվում են մասավոր:

Հաշվված է թվային օրինակ, երբ $b = 0.5 R$, $a = 0.3 R$, $0.35 R$, $0.4 R$
և $r = R$, զեպքերի համար, երբ $z = \frac{\pi}{3}$:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Динник А. Н. Кручение. Теория и приложения, ОНТИ, М.-Л., 1938.
3. Weber C. Die Lehre der Drehungsfestigkeit Forschungshefte. V. D. L., № 249, 1921.
3. Уфлянд Я. С. Биполяные координаты в теории упругости. Гостехиздат, М., 1950.
4. Сапонджян О. М. Применение принципа Сен-Венана к решению задачи теории упругости. Сборник научных трудов ЕрПИ, Ереван, 1960.
5. Гурса Э. Курс математического анализа, том II. ОНТИ, М., 1936.
6. Кит Г. С. Приближенное решение задачи кручения. Изд. АН УССР, Киев, 1960.
7. Ван Цзи-Де. Прикладная теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
8. Бахтияров И. А. Кручение призматического бруса коробчатого сечения. Автореферат диссертации, Баку, 1961.