

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян, В. С. Тоноян

Изгиб двухслойной толстой круглой плиты
осесимметричной нагрузкой

В статье рассматривается задача об изгибе двухслойной круглой толстой плиты произвольной осесимметричной нагрузкой, приложенной к ее основаниям.

На боковой поверхности заданы касательные напряжения и радиальные перемещения произвольным образом. Плита предполагается закрепленной так, что одна из окружностей на боковой поверхности или какая-либо точка на оси плиты не имеет осевых перемещений. Материалы слоев обладают различными модулями упругости и коэффициентами Пуассона. В пределах каждого слоя модуль упругости постоянный. Задача решается методом Фурье, исходя из основных уравнений теории упругости, без каких-либо допущений (см. работы [1—2]). В частности, решена задача изгиба круглой двухслойной толстой плиты, когда плита изгибается нормальной осесимметричной нагрузкой, приложенной к верхнему ее основанию, при отсутствии радиальных перемещений на всей боковой поверхности и осевых перемещений на нижней окружности этой поверхности. В частном случае, когда толщина одного из слоев равняется нулю, получается решение задачи изгиба круглой толстой плиты под действием осесимметричной нагрузки, рассмотренной в работе Б. Л. Абрамяна и А. А. Баблояна [3].

Аналогичного типа задача была рассмотрена в работе А. П. Мелконяна [4], в которой по боковой поверхности плиты удовлетворены смягченные граничные условия.

§ 1. Общее решение задачи

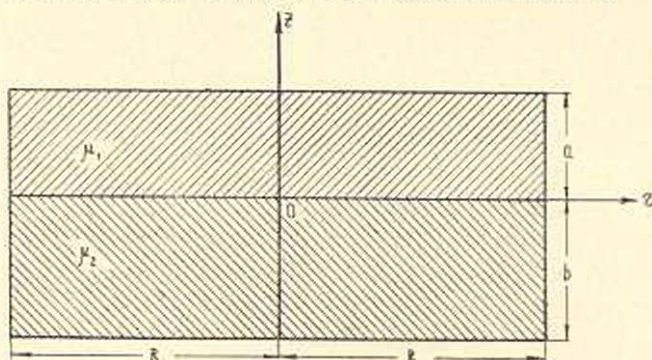
Пусть двухслойная толстая круглая плита (фиг. 1) с радиусом R и с толщинами слоев a и b нагружена произвольной осесимметричной нагрузкой, приложенной к ее основаниям. На боковой поверхности плиты задаются касательные напряжения и радиальные перемещения.

Пусть модуль сдвига верхнего слоя — μ_1 , нижнего — μ_2 , а коэффициенты Пуассона соответственно — ν_1 и ν_2 . Все величины, относящиеся к верхнему слою, будем обозначать индексом 1, к нижнему слою — индексом

2. Цилиндрическую систему координат выбираем так, как показано на фиг. 1.

Обозначим через u , w перемещения частицы упругого тела соответственно вдоль радиуса и вдоль оси плиты, а через σ_r , σ_z , τ_{rz} — компоненты напряжений.

Известно [5], что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к определению функции напряжений $\Phi(r, z)$ (r — направление радиуса, z — направление оси вращения), которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению



Фиг. 1.

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (1.1)$$

а на поверхности тела задается законом распределения напряжений или перемещений. Напряжения и перемещения при осесимметричной деформации выражаются через функцию напряжений $\Phi(r, z)$ соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \\ u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \\ w &= \frac{1}{2\mu} \left[2(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функцию $\Phi(r, z)$ ищем в виде

$$\Phi(r, z) = \begin{cases} \Phi_1(r, z) & (0 \leq r \leq R; \quad 0 \leq z \leq a) \\ \Phi_2(r, z) & (0 \leq r \leq R; \quad -b \leq z \leq 0). \end{cases} \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что функции $\Phi_i(r, z)$ ($i=1,2$) должны удовлетворять уравнению (1.1). Решая уравнение (1.1) методом Фурье, для круглого сплошного цилиндра функции $\Phi_i(r, z)$ ($i=1,2$) получим в виде [1—3]

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, z) = & z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(1)} I_0(\lambda_k r) + \\ & + G_k^{(1)} \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(1)} \operatorname{sh} \mu_k z + B_k^{(1)} \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + C_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z) J_0(\mu_k r), \\ \Phi_2(r, z) = & z(Dr^2 + Ez^2 + Gz) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k^{(2)} I_0(\gamma_k r) + \\ & + G_k^{(2)} \gamma_k r I_1(\gamma_k r) \sin \gamma_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(2)} \operatorname{sh} \mu_k z + B_k^{(2)} \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + C_k^{(2)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k^{(2)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z) J_0(\mu_k z), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка первого рода с действительным аргументом, $I_n(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента [8,9], $\lambda_k = \frac{k\pi}{a}$, $\gamma_k = \frac{k\pi}{b}$, μ_k — корни уравнения

$$J_1(xR) = 0. \quad (1.5)$$

Рассмотрим напряженное состояние круглого цилиндра при следующих граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} u_1(R, z) = f_1^{(1)}(z) = \frac{g_0^{(1)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(1)} \cos \lambda_k z \\ \tau_{rz}^{(1)}(R, z) = f_2^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(1)} \sin \lambda_k z \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq z \leq a)$$

$$\left. \begin{aligned} u_2(R, z) = f_1^{(2)}(z) = \frac{g_0^{(2)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(2)} \cos \gamma_k z \\ \tau_{rz}^{(2)}(R, z) = f_2^{(2)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(2)} \sin \gamma_k z \end{aligned} \right\} \quad (-b \leq z \leq 0) \quad (1.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r, a) = f_3^{(1)}(r) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, a) = f_4^{(1)}(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_1(\mu_k r) \\ \sigma_z^{(2)}(r, -b) = f_3^{(2)}(r) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, -b) = f_4^{(2)}(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_1(\mu_k r) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r \leq R)$$

Здесь мы допускаем, что функции $[f_i^{(j)}]$ кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси z имеем также

$$\tau_{rz}^{(i)}(0, z) = u_i(0, z) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (1.7)$$

Кроме того, функции $\Phi_i(r, z)$ ($i = 1, 2$) должны удовлетворять условиям сопряжения (контакта) [7]

$$\left. \begin{aligned} u_1(r, 0) &= u_2(r, 0) \\ w_1(r, 0) &= w_2(r, 0) \\ \sigma_z^{(1)}(r, 0) &= \sigma_z^{(2)}(r, 0) \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) &= \tau_{rz}^{(2)}(r, 0) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r \leq R) \quad (1.8)$$

Условиями (1.6), (1.7) и (1.8) функции напряжений и перемещения u_i ($i = 1, 2$) определяются полностью. В такой постановке перемещение w_i ($i = 1, 2$) определяется с точностью до постоянной G . Для определения последней предполагаем, что перемещение w_2 на окружности $r = R$, $z = -b$ равно нулю

$$w_2(R, -b) = 0. \quad (1.9)$$

Согласно (1.2) и (1.4) для определения напряжений и перемещений в верхнем слое плиты получим формулы

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)}(r, z) = & -2(1 - 2\nu_1)A + 6\nu_1 B - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \left\{ [E_k^{(1)} + (1 - 2\nu_1)G_k^{(1)}] \times \right. \\ & \times I_0(\lambda_k r) - E_k^{(1)} \frac{I_2(\lambda_k r)}{\lambda_k r} + G_k^{(1)} \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \left. \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [A_k^{(1)} + (1 + 2\nu_1)D_k^{(1)}] \operatorname{ch} \mu_k z + \\ & + [B_k^{(1)} + (1 + 2\nu_1)C_k^{(1)}] \operatorname{sh} \mu_k z + C_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \} - \end{aligned}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \{ (A_k^{(1)} + D_k^{(1)}) \operatorname{ch} \mu_k z + (B_k^{(1)} + C_k^{(1)}) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + \\ + D_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \},$$

$$\sigma_z^{(1)}(r, z) = 4(2 - \nu_1) A + 6(1 - \nu_1) B + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \times$$

$$\times \{ [E_k^{(1)} + 2(2 - \nu_1) G_k^{(1)}] I_0(\lambda_k r) + G_k^{(1)} \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [D_k^{(1)}(1 - 2\nu_1) - A_k^{(1)}] \operatorname{ch} \mu_k z +$$

$$+ [C_k^{(1)}(1 - 2\nu_1) - B_k^{(1)}] \operatorname{sh} \mu_k z - D_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - C_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \},$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \sin \lambda_k z \{ [E_k^{(1)} + 2(1 - \nu_1) G_k^{(1)}] I_1(\lambda_k r) + G_k^{(1)} \lambda_k r I_0(\lambda_k r) \} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_1(\mu_k r) \{ (A_k^{(1)} + 2\nu_1 D_k^{(1)}) \operatorname{sh} \mu_k z + (B_k^{(1)} + 2\nu_1 C_k^{(1)}) \operatorname{ch} \mu_k z +$$

$$+ C_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \}, \quad (1.10)$$

$$u_1(r, z) = -\frac{1}{2\mu_1} \left\{ 2Ar + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z [E_k^{(1)} I_1(\lambda_k r) + G_k^{(1)} \lambda_k r I_0(\lambda_k r)] - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_1(\mu_k r) \{ (A_k^{(1)} + D_k^{(1)}) \operatorname{ch} \mu_k z + (B_k^{(1)} + C_k^{(1)}) \operatorname{sh} \mu_k z +$$

$$+ C_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \} \Big\},$$

$$w_1(r, z) = \frac{1}{2\mu_1} \left\{ [8(1 - \nu_1) A + 6(1 - 2\nu_1) B] z + 2(1 - 2\nu_1) C + \right.$$

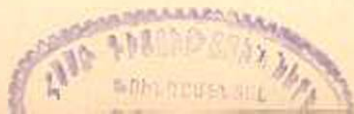
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \sin \lambda_k z \{ [E_k^{(1)} + 4(1 - \nu_1) G_k^{(1)}] I_0(\lambda_k r) + G_k^{(1)} \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_0(\mu_k r) \{ [2(1 - 2\nu_1) D_k^{(1)} - A_k^{(1)}] \operatorname{sh} \mu_k z +$$

$$+ [2(1 - 2\nu_1) C_k^{(1)} - B_k^{(1)}] \operatorname{ch} \mu_k z - C_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - D_k^{(1)} \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \} \Big\}.$$

Аналогичным образом получим также формулы для определения напряжений и перемещений в нижнем слое плиты.

Легко видеть, что условия (1.7) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя условиям (1.6) и (1.8), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (1.4), получаем следующие соотношения



$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{\mu_1 g_0^{(1)}}{2R}, \quad D = -\frac{\mu_2 g_0^{(2)}}{2R} \\
 4(2-\nu_1)A + 6(1-\nu_1)B + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q_k^{(1)}}{\lambda_k} &= b_0 \\
 4(2-\nu_2)D + 6(1-\nu_2)E + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q_k^{(2)}}{\gamma_k} &= a_0 \\
 \frac{1-2\nu_1}{\mu_1} C &= \frac{1-2\nu_2}{\mu_2} G
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
 G_k^{(1)} &= \frac{1}{2(1-\nu_1)} \frac{q_k^{(1)} + 2\mu_1 \lambda_k g_k^{(1)}}{\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)} \\
 G_k^{(2)} &= \frac{1}{2(1-\nu_2)} \frac{q_k^{(2)} + 2\mu_2 \gamma_k g_k^{(2)}}{\gamma_k^3 I_1(\gamma_k R)} \\
 E_k^{(1)} I_1(\lambda_k R) + G_k^{(1)} \lambda_k R I_0(\lambda_k R) &= -\frac{2\mu_1 g_k^{(1)}}{\lambda_k^2} \\
 E_k^{(2)} I_1(\gamma_k R) + G_k^{(2)} \gamma_k R I_0(\gamma_k R) &= -\frac{2\mu_2 g_k^{(2)}}{\gamma_k^2}
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
 2(1-2\nu_1)C_p^{(1)} - B_p^{(1)} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} [2(1-2\nu_2)C_p^{(2)} - B_p^{(2)}] \\
 B_p^{(1)} + 2\nu_1 C_p^{(1)} &= B_p^{(2)} + 2\nu_2 C_p^{(2)} \\
 (A_p^{(1)} + 2\nu_1 D_p^{(1)}) \operatorname{sh} \mu_p a + (B_p^{(1)} + 2\nu_1 C_p^{(1)}) \operatorname{ch} \mu_p a + C_p^{(1)} \mu_p \operatorname{ash} \mu_p a + \\
 + D_p^{(1)} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a &= \frac{d_p}{\mu_p^3} \\
 -(A_p^{(2)} + 2\nu_2 D_p^{(2)}) \operatorname{sh} \mu_p b + (B_p^{(2)} + 2\nu_2 C_p^{(2)}) \operatorname{ch} \mu_p b + C_p^{(2)} \mu_p b \operatorname{sh} \mu_p b - \\
 - D_p^{(2)} \mu_p b \operatorname{ch} \mu_p b &= \frac{c_p}{\mu_p^3} \\
 [D_p^{(1)}(1-2\nu_1) - A_p^{(1)}] \operatorname{ch} \mu_p a + [C_p^{(1)}(1-2\nu_1) - B_p^{(1)}] \operatorname{sh} \mu_p a - \\
 - C_p^{(1)} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a - D_p^{(1)} \mu_p a \operatorname{sh} \mu_p a &= \frac{M_p}{\mu_p^3} \\
 [D_p^{(2)}(1-2\nu_2) - A_p^{(2)}] \operatorname{ch} \mu_p b - [C_p^{(2)}(1-2\nu_2) - B_p^{(2)}] \operatorname{sh} \mu_p b + \\
 + C_p^{(2)} \mu_p b \operatorname{ch} \mu_p b - D_p^{(2)} \mu_p b \operatorname{sh} \mu_p b &= \frac{N_p}{\mu_p^3} \\
 \frac{1}{\mu_1} (A_p^{(1)} + D_p^{(1)}) - \frac{1}{\mu_2} (A_p^{(2)} + D_p^{(2)}) &= \frac{F_p}{\mu_p^3} \\
 D_p^{(1)}(1-2\nu_1) - A_p^{(1)} - D_p^{(2)}(1-2\nu_2) + A_p^{(2)} &= \frac{H_p}{\mu_p^3}
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 M_p &= b_p + \frac{2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \lambda_k q_k^{(1)}}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} + \\
 &+ \frac{2\mu_p^2}{(1-\nu_1) RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \lambda_k [q_k^{(1)} + 2\mu_1 \lambda_k g_k^{(1)}]}{(\lambda_k^2 + \mu_p^2)^2}, \\
 N_p &= a_p + \frac{2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \gamma_k g_k^{(2)}}{\gamma_k^2 + \mu_p^2} + \\
 &+ \frac{2\mu_p^2}{(1-\nu_2) RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \gamma_k [q_k^{(2)} + 2\mu_2 \gamma_k g_k^{(2)}]}{(\gamma_k^2 + \mu_p^2)^2}, \\
 F_p &= \frac{4}{J_0(\mu_p R)} \left[\frac{D}{\mu_2} - \frac{A}{\mu_1} \right] + \frac{4\mu_p^2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{g_k^{(1)}}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} - \frac{g_k^{(2)}}{\gamma_k^2 + \mu_p^2} \right] + \\
 &+ \frac{2\mu_p^2}{(1-\nu_1) \mu_1 RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k [q_k^{(1)} + 2\mu_1 \lambda_k g_k^{(1)}]}{(\lambda_k^2 + \mu_p^2)^2} - \\
 &- \frac{2\mu_p^2}{(1-\nu_2) \mu_2 RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k [q_k^{(2)} + 2\mu_2 \gamma_k g_k^{(2)}]}{(\gamma_k^2 + \mu_p^2)^2}, \\
 H_p &= \frac{2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_k q_k^{(2)}}{\gamma_k^2 + \mu_p^2} - \frac{\lambda_k q_k^{(1)}}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} \right] + \\
 &+ \frac{2\mu_p^2}{(1-\nu_2) RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k [q_k^{(2)} + 2\mu_2 \gamma_k g_k^{(2)}]}{(\gamma_k^2 + \mu_p^2)^2} - \\
 &- \frac{2\mu_p^2}{(1-\nu_1) RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k [q_k^{(1)} + 2\mu_1 \lambda_k g_k^{(1)}]}{(\lambda_k^2 + \mu_p^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

При получении этих соотношений были использованы разложения Фурье-Дини [9] функций $I_0(\lambda_k r)$ и $rI_1(\lambda_k r)$ по функциям $J_0(\mu_k r)$ [1], где μ_k — корни уравнения (1.5).

Из упомянутых выше соотношений получается также следующее равенство

$$a_0 - b_0 = \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{q_k^{(1)}}{\lambda_k} - \frac{q_k^{(2)}}{\gamma_k} \right], \tag{1.15}$$

которое является уравнением равновесия сил, действующих вдоль оси плиты.

Из соотношений (1.11) и (1.12) определяем коэффициенты $A, B, D, E, G_k^{(1)}, E_k^{(1)}, G_k^{(2)}, E_k^{(2)}$, а постоянная G определяется из условия (1.9). Из соотношений (1.13) определяются остальные неизвестные.

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования в (1.10), получим формулы для определения напряжений и перемещений.

§ 2. Численный пример

Рассмотрим изгиб круглой двухслойной плиты с равными толщинами слоев ($a=b$) и равными коэффициентами Пуассона ($\nu_1=\nu_2$), когда плита изгибается нормальной осесимметричной нагрузкой, приложенной к верхнему ее основанию, при отсутствии радиальных перемещений на всей боковой поверхности и осевых перемещений на нижней окружности ($r=R, z=-a$) этой поверхности. Предполагается, что нормальная нагрузка, приложенная на верхнем основании плиты, уравнивается касательными напряжениями, действующими на боковой поверхности только нижнего слоя и распределенными по закону синуса. Из сказанного следует, что граничные условия данной задачи будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} u_1(R, z) &= f_1^{(1)}(z) = 0 \\ \tau_{rz}^{(1)}(R, z) &= f_2^{(1)}(z) = 0 \\ u_2(R, z) &= f_1^{(2)}(z) = 0 \\ \tau_{rz}^{(2)}(R, z) &= f_2^{(2)}(z) = H \sin \frac{\pi z}{a} \\ \sigma_r^{(1)}(r, a) &= f_3^{(1)}(r) = \begin{cases} -q & r < z \\ 0 & r > z \end{cases} \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, a) &= f_4^{(1)}(r) = 0 \\ \sigma_r^{(2)}(r, -a) &= f_3^{(2)}(r) = 0 \\ \tau_{rz}^{(2)}(r, -a) &= f_4^{(2)}(r) = 0 \\ w_2(R, -a) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где постоянная величина

$$H = -\frac{Q}{4Rb} \quad (2.2)$$

определяется из условия равновесия (1.15). При таких условиях имеем

$$\begin{aligned} a_k &= c_k = d_k = g_k^{(1)} = g_k^{(2)} = q_k^{(1)} = 0, \\ a_0 &= g_0^{(1)} = g_0^{(2)} = 0, \\ b_0 &= -\frac{Q}{\pi R^2}, \quad b_k = -\frac{2QJ_1(\mu_k z)}{\pi R^2 J_0^2(\mu_k R) \mu_k z}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$q_1^{(2)} = H, \quad q_k^{(2)} = 0 \quad k \geq 2,$$

где введено обозначение

$$Q = q\pi z^2. \quad (2.4)$$

При $z \rightarrow 0$ имеем $\lim_{z \rightarrow 0} q\pi z^2 = Q_0$, что имеет место, когда плита изгибается сосредоточенной силой Q_0 , приложенной в центре ее верхнего основания.

Подставляя (2.3) в (1.11) и (1.12), получим

$$A = 0, \quad D = 0,$$

$$B = -\frac{Q}{6(1-\nu_1)\pi R^2}, \quad E = -\frac{Q}{12(1-\nu_1)\pi R^2}, \quad C = \frac{\mu_1}{\mu_2} G \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} G_1^{(2)} = -\frac{Q}{8(1-\nu_1)\alpha R \gamma_1^3 I_1(\gamma_1 R)}, & G_k^{(2)} = 0 \quad k \geq 2 \\ E_1^{(2)} = \frac{Q I_0(\gamma_1 R)}{8(1-\nu_1)\alpha \gamma_1^2 I_1^2(\gamma_1 R)}, & E_k^{(2)} = 0 \quad k \geq 2 \\ G_k^{(1)} = 0, & E_k^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.3) в (1.14), получим

$$\begin{cases} M_p = b_p \\ N_p = H_p = -\frac{Q\pi}{2R^2 \alpha^2 J_0(\mu_p R) (\gamma_1^2 + \mu_p^2)} \left[1 + \frac{1}{1-\nu_1} \frac{\mu_p^2}{\gamma_1^2 + \mu_p^2} \right] \\ F_p = \frac{Q\pi \mu_p^2}{2\mu_2 (1-\nu_1) R^2 \alpha^2 J_0(\mu_p R) (\gamma_1^2 + \mu_p^2)^2} \end{cases} \quad (2.7)$$

На основании (2.3) и (2.7) система линейных алгебраических уравнений (1.13) принимает вид

$$\begin{cases} 2(1-2\nu_1)C_p^{(1)} - B_p^{(1)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} [2(1-2\nu_1)C_p^{(2)} - B_p^{(2)}] \\ B_p^{(1)} + 2\nu_1 C_p^{(1)} = B_p^{(2)} + 2\nu_1 C_p^{(2)} \\ (A_p^{(1)} + 2\nu_1 D_p^{(1)}) \operatorname{sh} \mu_p a + (B_p^{(1)} + 2\nu_1 C_p^{(1)}) \operatorname{ch} \mu_p a + \\ + \mu_p a (C_p^{(1)} \operatorname{sh} \mu_p a + D_p^{(1)} \operatorname{ch} \mu_p a) = 0 \\ -(A_p^{(2)} + 2\nu_1 D_p^{(2)}) \operatorname{sh} \mu_p a + (B_p^{(2)} + 2\nu_1 C_p^{(2)}) \operatorname{ch} \mu_p a + \\ + \mu_p a (C_p^{(2)} \operatorname{sh} \mu_p a - D_p^{(2)} \operatorname{ch} \mu_p a) = 0 \\ [D_p^{(1)}(1-2\nu_1) - A_p^{(1)}] \operatorname{ch} \mu_p a + [C_p^{(1)}(1-2\nu_1) - B_p^{(1)}] \operatorname{sh} \mu_p a - \\ - \mu_p a (C_p^{(1)} \operatorname{ch} \mu_p a + D_p^{(1)} \operatorname{sh} \mu_p a) = \frac{b_p}{\mu_p^3} \\ [D_p^{(2)}(1-2\nu_1) - A_p^{(2)}] \operatorname{ch} \mu_p a - [C_p^{(2)}(1-2\nu_1) - B_p^{(2)}] \operatorname{sh} \mu_p a + \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & + \mu_p a (C_p^{(2)} \operatorname{ch} \mu_p a - D_p^{(2)} \operatorname{sh} \mu_p a) = \frac{N_p}{\mu_p^3} \\ & \frac{1}{\mu_1} (A_p^{(1)} + D_p^{(1)}) - \frac{1}{\mu_2} (A_p^{(2)} + D_p^{(2)}) = \frac{F_p}{\mu_p^3} \\ & D_p^{(1)} (1 - 2\nu_1) - A_p^{(1)} - D_p^{(2)} (1 - 2\nu_1) + A_p^{(2)} = \frac{H_p}{\mu_p^3}. \end{aligned} \right.$$

Для решения этой системы введем новые неизвестные следующим образом (что можно сделать также в общем случае)

$$\begin{aligned} & [D_p^{(1)} (1 - 2\nu_1) - A_p^{(1)}] \operatorname{ch} \mu_p a + [C_p^{(1)} (1 - 2\nu_1) - B_p^{(1)}] \operatorname{sh} \mu_p a - \\ & - \mu_p a (C_p^{(1)} \operatorname{ch} \mu_p a + D_p^{(1)} \operatorname{sh} \mu_p a) = \frac{X_p^{(1)}}{\mu_p^4 a} \\ & (A_p^{(1)} + 2\nu_1 D_p^{(1)}) \operatorname{sh} \mu_p a + (B_p^{(1)} + 2\nu_1 C_p^{(1)}) \operatorname{ch} \mu_p a + \\ & + \mu_p a (C_p^{(1)} \operatorname{sh} \mu_p a + D_p^{(1)} \operatorname{ch} \mu_p a) = \frac{Y_p^{(1)}}{\mu_p^4 a} \\ & [D_p^{(2)} (1 - 2\nu_1) - A_p^{(2)}] \operatorname{ch} \mu_p a - [C_p^{(2)} (1 - 2\nu_1) - B_p^{(2)}] \operatorname{sh} \mu_p a + \\ & + \mu_p a (C_p^{(2)} \operatorname{ch} \mu_p a - D_p^{(2)} \operatorname{sh} \mu_p a) = \frac{X_p^{(2)}}{\mu_p^4 a} \\ & (A_p^{(2)} + 2\nu_1 D_p^{(2)}) \operatorname{sh} \mu_p a + (B_p^{(2)} + 2\nu_1 C_p^{(2)}) \operatorname{ch} \mu_p a + \\ & + \mu_p a (C_p^{(2)} \operatorname{sh} \mu_p a - D_p^{(2)} \operatorname{ch} \mu_p a) = \frac{Y_p^{(2)}}{\mu_p^4 a} \quad (2.5) \\ & B_p^{(1)} + 2\nu_1 C_p^{(1)} = \frac{Z_p^{(1)}}{\mu_p^4 a} \\ & D_p^{(1)} (1 - 2\nu_1) - A_p^{(1)} = \frac{U_p^{(1)}}{\mu_p^4 a} \\ & B_p^{(2)} + 2\nu_1 C_p^{(2)} = \frac{Z_p^{(2)}}{\mu_p^4 a} \\ & D_p^{(2)} (1 - 2\nu_1) - A_p^{(2)} = \frac{U_p^{(2)}}{\mu_p^4 a}. \end{aligned}$$

При этом система уравнений (2.8) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} Z_p^{(1)} &= Z_p^{(2)} \\ Y_p^{(1)} &= Y_p^{(2)} = 0 \\ X_p^{(1)} &= \mu_p a b_p \\ X_p^{(2)} &= \mu_p a N_p \\ U_p^{(1)} - U_p^{(2)} &= \mu_p a H_p \\ 2(1-\nu_1) C_p^{(1)} - \frac{Z_p^{(1)}}{\mu_p^4 a} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[2(1-\nu_1) C_p^{(2)} - \frac{1}{\mu_p^4 a} Z_p^{(2)} \right] \\ 2(1-\nu_1) D_p^{(1)} - \frac{U_p^{(1)}}{\mu_p^4 a} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left[2(1-\nu_1) D_p^{(2)} - \frac{1}{\mu_p^4 a} U_p^{(2)} \right]. \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

Из этой системы найдем значения неизвестных коэффициентов $U_p^{(2)}$ и $Z_p^{(2)}$

$$\begin{aligned} U_p^{(2)} &= \frac{1}{\left[(1-2\nu_1) + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right]^2 - 36(1-\nu_1)^2 \left[\operatorname{cth}^2 \mu_p a - \frac{(\mu_p a)^2}{\operatorname{sh}^4 \mu_p a} \right]} \times \\ &\times \left\{ (N_p - 2b_p) \left[12(1-\nu_1)^2 \frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} (1 + \mu_p a \operatorname{cth} \mu_p a) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left(\operatorname{cth} \mu_p a - \frac{\mu_p a}{\operatorname{sh}^2 \mu_p a} \right) - 2(1-\nu_1) \frac{(\mu_p a)^2}{\operatorname{sh} \mu_p a} \left((1-2\nu_1) + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right) \right] + \\ &+ H_p \left[24(1-\nu_1)^2 \left(\mu_p a \operatorname{cth}^2 \mu_p a - \frac{(\mu_p a)^3}{\operatorname{sh}^4 \mu_p a} \right) - \right. \\ &- 2\mu_p a \left((1-2\nu_1) + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right) \left. \right] + F_p \mu_1 2\mu_p a \left[1 - \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right] \times \\ &\times \left. \left[(1-2\nu_1) + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_p^{(2)} &= \frac{1}{\left[(1-2\nu_1) + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right]^2 - 36(1-\nu_1)^2 \left[\operatorname{cth}^2 \mu_p a - \frac{(\mu_p a)^2}{\operatorname{sh}^4 \mu_p a} \right]} \times \\ &\times \left\{ (N_p - 2b_p) \left[2(1-\nu_1) \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} + \frac{(\mu_p a)^2}{\operatorname{sh} \mu_p a} \operatorname{cth} \mu_p a \right) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left((1-2\nu_1) + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right) - 12(1-\nu_1)^2 \frac{(\mu_p a)^2}{\operatorname{sh} \mu_p a} \times \right. \\ &\times \left. \left(\operatorname{cth} \mu_p a + \frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right) \right] - H_p 8(1-\nu_1) \left[\mu_p a \operatorname{cth} \mu_p a + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^3 \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \left[(1 - 2\nu_1) + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right] + F_p \mu_1 12 (1 - \nu_1) \left[\mu_p a \operatorname{cth} \mu_p a + \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\mu_p a}{\operatorname{sh} \mu_p a} \right)^2 \right].$$

Из остальных шести неизвестных коэффициентов некоторые определяются непосредственно, а другие выражаются через коэффициенты $U_p^{(2)}$ и $Z_p^{(2)}$.

Неизвестные постоянные $A_p^{(1)}$, $B_p^{(1)}$, $C_p^{(1)}$, $D_p^{(1)}$, $A_p^{(2)}$, $B_p^{(2)}$, $C_p^{(2)}$ и $D_p^{(2)}$ выражаются через неизвестные $U_p^{(2)}$ и $Z_p^{(2)}$

$$\begin{aligned} A_p^{(1)} &= (1 - 2\nu_1) D_p^{(1)} - \frac{H_p}{\mu_p^3} - \frac{U_p^{(2)}}{\mu_p^4 a} \\ B_p^{(1)} &= \frac{Z_p^{(2)}}{\mu_p^4 a} - 2\nu_1 C_p^{(1)} \\ C_p^{(1)} &= \frac{1}{\mu_p^4 a [\operatorname{sh}^2 \mu_p a - (\mu_p a)^2]} \{ \mu_p a b_p (\operatorname{sh} \mu_p a + \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a) - \\ &- \mu_p a H_p (\operatorname{sh} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a + \mu_p a) - U_p^{(2)} (\operatorname{sh} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a + \mu_p a) + Z_p^{(2)} \operatorname{sh}^2 \mu_p a \} \\ D_p^{(1)} &= \frac{1}{\mu_p^4 a [\operatorname{sh}^2 \mu_p a - (\mu_p a)^2]} \{ -(\mu_p a)^2 b_p \operatorname{sh} \mu_p a + \mu_p a H_p \operatorname{sh}^2 \mu_p a + \\ &+ U_p^{(2)} \operatorname{sh}^2 \mu_p a - Z_p^{(2)} (\operatorname{sh} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a - \mu_p a) \} \quad (2.12) \\ A_p^{(2)} &= (1 - 2\nu_1) D_p^{(2)} - \frac{U_p^{(2)}}{\mu_p^4 a} \\ B_p^{(2)} &= \frac{Z_p^{(2)}}{\mu_p^4 a} - 2\nu_2 C_p^{(2)} \\ C_p^{(2)} &= \frac{1}{\mu_p^4 a [\operatorname{sh}^2 \mu_p a - (\mu_p a)^2]} \{ -\mu_p a N_p (\operatorname{sh} \mu_p a + \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a) + \\ &+ U_p^{(2)} (\operatorname{sh} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a + \mu_p a) + Z_p^{(2)} \operatorname{sh}^2 \mu_p a \} \\ D_p^{(2)} &= \frac{1}{\mu_p^4 a [\operatorname{sh}^2 \mu_p a - (\mu_p a)^2]} \{ -(\mu_p a)^2 N_p \operatorname{sh} \mu_p a + \\ &+ U_p^{(2)} \operatorname{sh}^2 \mu_p a + Z_p^{(2)} (\operatorname{sh} \mu_p a \operatorname{ch} \mu_p a - \mu_p a) \}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения и значения (2.5) и (2.6) в выражения (1.10), для определения нормального напряжения $\sigma_r^{(i)}$ и осевого перемещения w_i ($i = 1, 2$) получим следующие формулы

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)}(r, z) = & -\frac{\nu_1 Q}{(1 - \nu_1) \pi R^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k a \left[1 - \left(\frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right)^2 \right]} \times \\
& \times \left\{ \mu_k a b_k \left[\frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - 2 \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \operatorname{cth} \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right] + \right. \\
& + \mu_k a H_k \left[\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right] + \\
& + U_k^{(2)} \left[\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right] - \\
& - Z_k^{(2)} \left[2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + 2 \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right] + \\
& + \mu_k z \left[\mu_k a b_k \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right) - \right. \\
& - \mu_k a H_k \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right) - \\
& - U_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right) + \\
& \left. + Z_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right) \right] \Big\} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k a \mu_k r \left[1 - \left(\frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right)^2 \right]} \left\{ \mu_k a b_k \left[(1 - 2\nu_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \right. \right. \\
& + (1 - 2\nu_1) \mu_k a \operatorname{cth} \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - 2(1 - \nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \Big] + \\
& + \mu_k a H_k \left[(1 - 2\nu_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} - \right. \\
& - (1 - 2\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] + U_k^{(2)} \left[(1 - 2\nu_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \right. \\
& + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} - (1 - 2\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] - \\
& - Z_k^{(2)} \left[2(1 - \nu_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - 2(1 - \nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + \right. \\
& \left. + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right] + \mu_k z \left[\mu_k a b_k \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a - z)}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu_k a H_k \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) - \\
& - U_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) + \\
& + Z_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right) \Big] \Big\} \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_r^{(2)}(r, z) = & -\frac{\nu_1 Q}{2(1-\nu_1)\pi R^2} - \lambda_1^3 \cos \lambda_1 z \left\{ [E_1^{(2)} + (1-2\nu_1) G_1^{(2)}] I_0(\lambda_1 r) - \right. \\
& - E_1^{(2)} \frac{I_1(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + G_1^{(2)} \lambda_1 r I_1(\lambda_1 r) \Big\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k a \left[1 - \left(\frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right)^2 \right]} \times \\
& \times \left\{ \mu_k a N_k \left[-\frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \operatorname{cth} \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - 2\mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right] + \right. \\
& + U_k^{(2)} \left[\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right] + \\
& + Z_k^{(2)} \left[2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} - 2\mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right] + \\
& + \mu_k z \left[\mu_k a N_k \left(-\frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) + \right. \\
& + U_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) + \\
& + Z_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) \Big] \Big\} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k r)}{\mu_k a \mu_k r \left[1 - \left(\frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right)^2 \right]} \left\{ \mu_k a N_k \left[-(1-2\nu_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \right. \right. \\
& - (1-2\nu_1) \mu_k a \operatorname{cth} \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - 2(1-\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \Big] + \\
& + U_k^{(2)} \left[(\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + (1-2\nu_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \right. \\
& + (1-2\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] - Z_k^{(2)} \left[-2(1-\nu_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \right. \\
& + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + 2(1-\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_k z \left[\mu_k a N_k \left(-\frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) + \right. \\
& + U_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) + \\
& \left. + Z_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) \right] \Bigg\} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mu_1 w_1(r, z) = & -\frac{(1-2\nu_1)Q}{(1-\nu_1)\pi R^2} z + \frac{2\mu_1(1-2\nu_1)}{\mu_2} G + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k^2 a \left[1 - \left(\frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right)^2 \right]} \left\{ \mu_k a b_k \left[2(1-\nu_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \right. \right. \\
& - (1-2\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} + 2(1-\nu_1) \mu_k a \operatorname{cth} \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \Big] - \\
& - \mu_k a H_k \left[2(1-\nu_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + \right. \\
& + 2(1-\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] - U_k^{(2)} \left[2(1-\nu_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \right. \\
& + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + 2(1-\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] + Z_k^{(2)} \left[(1-2\nu_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \right. \\
& + (1-2\nu_1) \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] + \mu_k z \left[\mu_k a b_k \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \right. \right. \\
& - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big) + \mu_k a H_k \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) + \\
& + U_k^{(2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right) + \\
& \left. \left. + Z_k^{(2)} \left(\mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} - \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a-z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right) \right] \right\} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mu_2 w_2(r, z) = & -\frac{(1-2\nu_1)Q}{2(1-\nu_1)\pi R^2} z + 2(1-2\nu_1)G + \lambda_1^2 \sin \lambda_1 z \times \\
& \times \{ [E_1^{(2)} + 4(1-\nu_1)G_1^{(2)}] I_0(\lambda_1 r) + G_1^{(2)} \lambda_1 r I_1(\lambda_1 r) \} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k r)}{\mu_k^2 a \left[1 - \left(\frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right)^2 \right]} \left\{ \mu_k a N_k \left[-2(1-\nu_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(1-\nu_1)\mu_k a \operatorname{cth} \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - (1-2\nu_1)\mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} \Big] + \\
& + U_k^{(2)} \Big[2(1-\nu_1) \frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + \\
& + 2(1-\nu_1)\mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] + Z_k^{(2)} \Big[(1-2\nu_1) \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \\
& - (1-2\nu_1)\mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} + (\mu_k a)^2 \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big] - \\
& - \mu_k z \Big[\mu_k a N_k \Big(-\frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big) + \\
& + U_k^{(2)} \Big(\frac{\operatorname{sh} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} + \mu_k a \frac{\operatorname{sh} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big) + \\
& + Z_k^{(2)} \Big(\frac{\operatorname{ch} \mu_k (a+z)}{\operatorname{sh} \mu_k a} - \mu_k a \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \Big) \Big] \Big\}. \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Постоянную величину G определяем из условия $w_2(R, -a) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{G}{a} = & -\frac{Q}{4(1-\nu_1)\pi R^2} - \frac{1}{2(1-\nu_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{\mu_k a}{\operatorname{sh} \mu_k a} \right)^2} \times \\
& \times \left\{ -N_k 2(1-\nu_1) \left[\frac{\operatorname{cth} \mu_k a}{\mu_k a} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_k a} \right] + \right. \\
& \left. + U_k^{(2)} 2(1-\nu_1) \frac{1}{\mu_k a \operatorname{sh} \mu_k a} \left(\frac{1}{\mu_k a} + \operatorname{cth} \mu_k a \right) + Z_k^{(2)} 2(1-\nu_1) \frac{1}{\mu_k a \operatorname{sh} \mu_k a} \right\}. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Некоторые значения напряжения $\sigma_r^{(i)}$ и перемещения w_i ($i=1, 2$), вычисленные по формулам (2.13)–(2.16) для различных точек плиты при $\nu_1 = 0,3$, $\mu_1/\mu_2 = 1/2$, в зависимости от отношений z/R и a/R приведены в таблицах 1 и 2.

В этих таблицах напряжения $\sigma_r^{(i)}$ ($i=1, 2$) приведены в долях $K = q \left(\frac{a}{R} \right)^2 = \frac{Q}{\pi R^2}$, а перемещения w_i ($i=1, 2$) — в долях $K_1 = \frac{qa}{\mu_1} \left(\frac{z}{R} \right)^2 = \frac{Qa}{\mu_1 \pi R^2}$.

При вычислениях было использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k z)}{\mu_k J_0^2(\mu_k R)} = \frac{z}{2} \left(\frac{R^2}{z^2} - 1 \right), \quad \text{где } 0 < z \leq R. \quad (2.18)$$

Таблица 1

	$\frac{a}{R}$	z/R			
		1	1/2	1/4	0
$\sigma_r^{(1)}(0, a)/K$	1/2	-3,5657	-8,8253	-21,0670	—
	1/6	-14,7828	-46,3044	-69,4796	—
$\sigma_r^{(1)}\left(0, \frac{a}{2}\right)/K$	1/2	-2,0117	-4,2441	-4,3394	-5,2609
	1/6	-10,1126	-30,2839	-40,2515	-66,7423
$\sigma_r^{(1)}(0, 0)/K$	1/2	-1,0014	-1,4664	-1,5834	-1,7675
	1/6	-4,8167	-14,9783	-18,2499	-25,2530
$\sigma_r^{(2)}(0, 0)/K$	1/2	-1,9491	-2,9986	-3,1712	-3,7708
	1/6	-8,7191	-26,4318	-33,4057	-43,2931
$\sigma_r^{(2)}\left(0, -\frac{a}{2}\right)/K$	1/2	0,0001	0,6379	0,7315	0,8773
	1/6	2,1479	4,1122	13,0720	14,9273
$\sigma_r^{(2)}(0, -a)/K$	1/2	1,6566	2,8037	3,4192	3,6625
	1/6	12,8003	33,2209	38,4687	48,7486

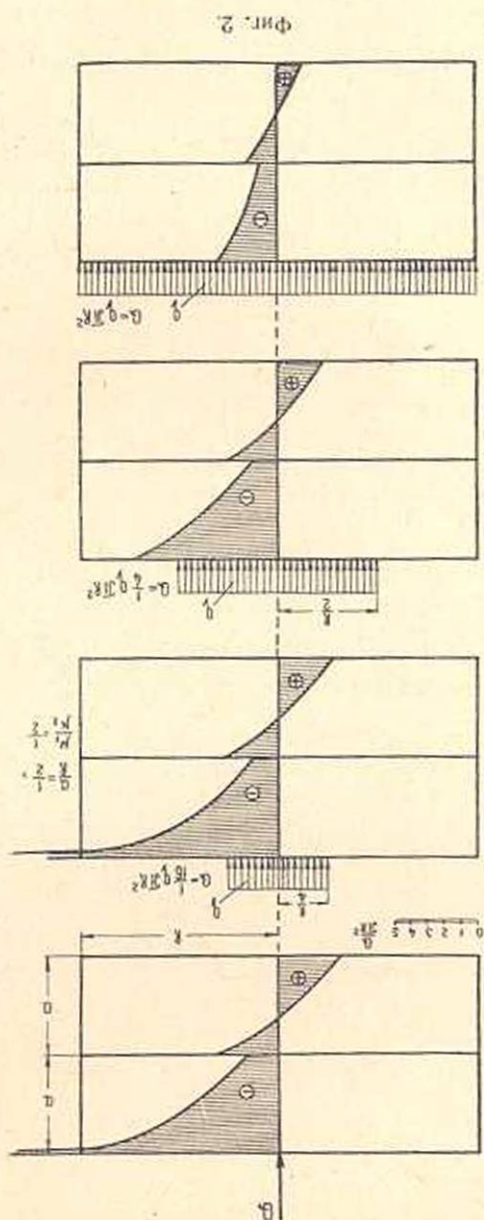
Таблица 2

	$\frac{a}{R}$	z/R			
		1	1/2	1/4	0
$w_1(0, a)/K_1$	1/2	-0,7987	-1,7622	-4,3840	—
	1/6	-11,1000	-12,7498	-14,5660	—
$w_1(0, 0)/K_1$	1/2	-0,5750	-1,0908	-1,2366	-1,2763
	1/6	-7,5767	-10,0771	-10,4252	-13,8815
$w_2(0, -a)/K_1$	1/2	-0,1708	-0,3485	-0,4166	-0,4801
	1/6	-5,5341	-7,5756	-8,1601	-9,3091
$w_1(R, a)/K_1$	1/2	-0,4114	-0,4165	-0,7307	—
	1/6	-8,0118	-8,5131	-9,0659	—
$w_1(R, 0)/K_1$	1/2	-0,3523	-0,3584	-0,5467	-0,5530
	1/6	-7,1494	-7,3336	-8,7855	-8,9339

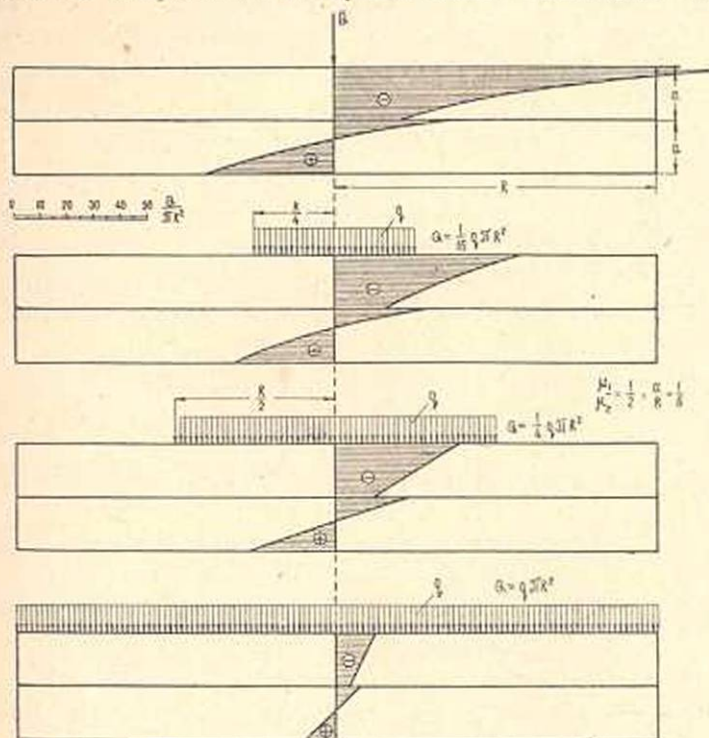
Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений σ_r вдоль оси плиты на фигурах 2 и 3 приведены эпюры этих напряжений. Следует отметить, что приведенные эпюры составлены приближенно: на основании расчетов, произведенных только для пяти точек оси.

Как показывают произведенные вычисления для случая $\frac{a}{R} = \frac{1}{6}$ (табл. 1) и построенные графики (фиг. 3), закон распределения нормальных напряжений по высоте плиты при $z = R$, $\frac{R}{2}$ качественно совпадает с законом распределения соответствующего напряжения по теории тонких плит.

Закон распределения нормальных напряжений по высоте плиты, вычисленных по теории тонких плит, дает существенные отклонения от действительного закона в случаях нагрузок, распределенных по малой площади ($z = \frac{R}{4}$), и сосредоточенной силы ($z = 0$).



В случае $\frac{a}{R} = \frac{1}{2}$ (фиг. 2), как и следовало ожидать, закон распределения напряжений σ , существенно отличается от соответ-



Фиг. 3.

ствующего закона, получаемого в теории тонких плит при любых нагрузках.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 X 1962

В. Л. Азарян, А. В. Сабоган

ԱՌԱՆՑՔԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՈՎ ՀԱՍՏ ԿԼՈՐ ԵՐԿՇԵՐՏ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է հաստ կլոր երկշերտ սալի ծոման խնդիրը, երբ բերը կամավոր ձևով կիրառված է սալի հիմքերին: Կողմնային մակերևույթի վրա տրված են կամայական ռադիալ տեղափոխումները և շոշափող լարումները: Սալը ենթադրվում է ամրացված ալնպես, որ նրա կողմնային մակերևույթի մի շրջանագծի վրա կամ առանցքի մի որևէ կետում բացակայում են առանցքի ուղղությամբ տեղափոխումները: Շերտերի նյութերն ունեն առանձ-

զականության և Պուասոնի տարրեր դործակիցներ: Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի եղանակով, առանձնականության տեսության հիմնական հավասարումներից ելնելով, առանց որևէ կինեմատիկական հիպոթեզի (տե՛ս [1—2] աշխատությունները): Մասնավորապես լուծված է հաստ կլոր երկշերտ սալի ծաման խնդիրը, երբ սալը ծովում է նորմալ առանցքասիմետրիկ բեռով կիրառված նրա վերևի հիմքի վրա, երբ բացակայում է ռադիալ տեղափոխումը ամբողջ կողմնային մակերևույթի վրա և առանցքային տեղափոխումը այդ նույն մակերևույթի ներքին շրջանագծի վրա: Մասնավոր դեպքում, երբ շերտերից որևէ մեկի հաստությունը հավասարեցվում է զերոյի, ստացվում է առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ բեռով հաստ կլոր սալի ծաման խնդիր լուծումը, որը դիտարկված է Բ. Լ. Արրահամյանի և Ա. Հ. Բարլոյանի [3] աշխատության մեջ: Նման խնդիր դիտարկված է եղել Ա. Պ. Մելքոնյանի [4] աշխատությունում, որտեղ սալի կողմնային մակերևույթի վրա բավարարում են մեղմացված եզրային պայմանները:

Վերջում բերված է թվային օրինակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. ДАН АрмССР, 19, № 1, 1954, 3—12.
2. Абрамян Б. Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. ДАН АрмССР, 26, № 2, 1958, 65—72.
3. Абрамян Б. Л., Баблоян А. А. К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 1958, 96—106.
4. Мелконян А. П. Осесимметричный изгиб двухслойной толстой круглой плиты. Сборник научных трудов Ереванского политехнического института им. К. Маркса, № 20, 1959, 169—190.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
6. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., изд. АН СССР, 1949.
8. Грей Э., Мэтьюз Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1. ИЛ, М., 1949.