

А. А. Меленцов, Э. Б. Мураев

Суммирование итераций линейного оператора*

1. Пусть в линейном топологическом пространстве L , полем скаляров которого служат комплексные числа, построены два класса последовательностей A и B .

Нижнюю треугольную матрицу T над полем комплексных чисел мы называем AB -регулярной, если линейное преобразование, определяемое этой матрицей, всякую последовательность из класса A переводит в последовательность класса B . Предполагая, что матрица T имеет обратную матрицу T^{-1} , положим

$$T = (c_{m,n}) \text{ и } T^{-1} = (d_{m,n}). \quad (1)$$

AB -регулярную матрицу будем называть A -регулярной, если классы A и B совпадают.

Обозначим через P аддитивный оператор, отображающий пространство L в себя и пусть $\{y_n\}$ — последовательность простых итераций, порождаемая этим оператором, т. е.

$$y_{n+1} = f + P y_n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

где f и y_0 произвольные элементы из L . Легко показать, что последовательность $\{z_m\}$, связанная с последовательностью $\{y_n\}$ линейным преобразованием

$$z_m = \sum_{n=0}^m c_{m,n} y_n, \quad (3)$$

удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$z_m = c_m f + c_{m+1,0} y_0 + P \left(\sum_{n=0}^m s_{m,n} z_n \right). \quad (4)$$

Нижнюю треугольную матрицу $T^* = (s_{m,n})$ мы будем называть матрицей, ассоциированной с матрицей T . Обозначив через T_1 матрицу, которая получается из матрицы T удалением первой строки и первого столбца, нетрудно проверить, что матрица, ассоциированная с матрицей T , допускает представление:

$$T^* = T_1 T^{-1}.$$

* Работа доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

AB -регулярную матрицу мы называем C -итеративной, если ассоциированная с ней матрица является BC -регулярной. Если классы A , B и C совпадают с классом сходящихся последовательностей, то AB -регулярную и C -итеративную матрицу мы будем называть просто регулярной и итеративной матрицей.

В том, что не всякая регулярная матрица является итеративной, можно убедиться на следующем примере. Пусть элементы матрицы $(c_{m,n})$ определяются соотношениями

$$c_{0,0} = 1, \quad c_{m,n} = 0 \quad \text{при } n > m,$$

$$c_{2s, 2t} = \frac{1}{s}, \quad c_{2s+1, 2t} = \frac{1}{2s} \quad (5)$$

$$c_{m, 2t+1} = 0 \quad \text{при } 2t+1 < m \quad \text{и} \quad c_{2s+1, 2s+1} = \frac{1}{2}.$$

Такая матрица регулярна в обычном смысле и имеет обратную матрицу, которую мы будем записывать так же, как в общем случае (см. формулу 1).

Однако, матрица (5) не является итеративной. Чтобы доказать это, достаточно установить, что ассоциированная с ней матрица

$$(s_{m,n}), \quad s_{m,n} = \sum_{k=n}^m c_{m+1, k+1} d_{k,n} \quad (6)$$

не регулярна. В самом деле, расходящаяся последовательность

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = 0, \dots$$

матрицей (5) преобразуется в сходящуюся к нулю последовательность $\{t_m\}$. Легко проверить, что применяя к последовательности $\{t_m\}$ ассоциированную матрицу (6) мы получим расходящуюся последовательность.

Пусть T некоторая AB -регулярная матрица. Обозначим через $[T]$ поле этой матрицы, т. е. множество всех последовательностей в L , которые матрицей T преобразуются в последовательности класса B .

Обозначим, далее, через $\{T\}_0$ множество последовательностей, состоящее из всех последовательностей поля T , дополненных нулевым элементом в качестве первого элемента.

Поле AB -регулярной матрицы T мы называем шагреневым, если

$$\{T\}_0 \subset [T].$$

Свойство матрицы быть итеративной и свойство ее поля быть шагреневым связаны следующей теоремой:

Теорема 1. Для того чтобы AB -регулярная матрица T была B -итеративной, необходимо и достаточно, чтобы поле этой матрицы было шагреневым.

Условие достаточно. В самом деле, пусть $\{z_m\}$ — произвольная последовательность из класса B . Полагая

$$y_m = \sum_{n=0}^m d_{m,n} z_n,$$

мы получим последовательность $\{y_m\}$ из поля $\{T\}$. Последовательность

$$0, y_0, y_1, y_2, \dots \quad (7)$$

принадлежит полю $\{T\}$, так как по условию оно шагреневое. Результат применения ассоциированной матрицы $(s_{m,n})$ к последовательности $\{z_n\}$ можно представить теперь в следующей форме

$$t_m = \sum_{n=0}^m s_{m,n} z_n = \sum_{n=0}^m c_{m+1, n+1} y_n. \quad (8)$$

Следовательно, последовательность $\{t_m\}$ принадлежит классу B и поэтому ассоциированная матрица B -регулярна.

Условие необходимо. Если $\{y_m\}$ — произвольная последовательность из поля $\{T\}$, то применяя к ней матрицу T , мы получим последовательность из класса B . Пусть

$$z_m = \sum_{n=0}^m c_{m,n} y_n.$$

Так как по предположению ассоциированная матрица $(s_{m,n})$ B -регулярна, то из соотношения (8) следует, что последовательность (7) принадлежит полю $\{T\}$.

2. Гронуолл [1] ввел очень общий метод преобразований рядов и последовательностей, включающий в себя многие классические преобразования: Чезаро, Вороного, Эйлера-Кнопфа и его обобщения, построенные Перроном [2], аналитические преобразования [3], преобразования Валле-Пуссена, Мерсмана, Обрешкова [4] и многие другие. Понятие ассоциированной матрицы приводит к дальнейшему обобщению понятия гронуолловского преобразования.

Проверка показывает, что ассоциированные матрицы перечисленных классических преобразований допускают следующее простое представление

$$\left(\frac{b_n a_{m-n}}{b_{m+1}} \right), \quad (9)$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности комплексных чисел.

Матрицу G мы называем обобщенной матрицей Гронуолла, если ассоциированная с ней матрица допускает представление (9) при условии, что

$$b_n \neq 0, \quad n=0, 1, \dots \quad \text{и} \quad a_0 \neq 0.$$

Теорема 2. Для того чтобы матрица G была обобщенной матрицей Гронуолла, необходимо и достаточно, чтобы ее элементы имели вид

$$c_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(z) f^n(z)}{b_m z^{m+1}} dz, \quad (10)$$

где

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}, \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad h(0) \neq 0,$$

$\{b_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, γ — контур, охватывающий начало координат (правую часть можно рассматривать и формально как коэффициент при z^{-1}).

Условие необходимо. Легко показать, что элементы матрицы $(c_{m,n})$ связаны с элементами ассоциированной матрицы соотношением

$$c_{m,n} = \sum_{k=n-1}^{m-1} s_{m-1,k} c_{k,n-1}. \quad (11)$$

Имея в виду представление (9), умножим правую и левую часть последнего равенства на $b_m z^m$ и просуммируем по индексу m в пределах от 0 до бесконечности; тогда получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m c_{m,n} z^m = f(z) \sum_{m=0}^{\infty} b_m c_{m,n-1} z^m.$$

Отсюда следует

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m c_{m,n} z^m = f^n(z) \sum_{m=0}^{\infty} b_m c_{m,0} z^m.$$

Полагая $p_m = c_{m,0}$, мы легко убедимся в справедливости формулы (10).

Условие достаточно. Допустим, что элементы матрицы $(c_{m,n})$ определяются формулой (10) и $a_0 \neq 0$ (отсюда следует и неравенство нулю коэффициентов b_n).

Полагая

$$b_n \gamma_{m,n} = b_{m+1} s_{m,n},$$

мы можем переписать равенство (11) в следующей форме

$$b_{m+1} c_{m+1,n+1} = \sum_{k=n}^m b_k \gamma_{m,k} c_{k,n}. \quad (12)$$

Для завершения доказательства нам остается показать, что $\gamma_{m,n} = a_{m-n}$. При $n = m$ справедливость равенства легко проверяется. Применяя обратную индукцию, допустим, что $n < m$; тогда соотношение (12) можно представить в следующей форме

$$\gamma_{m,n} b_n c_{nn} + \sum_{k=n+1}^m a_{m-k} b_k c_{k,n} = b_{m+1} c_{m+1,n+1}. \quad (13)$$

Используя формулу (10), легко показать, что

$$b_{m+1} c_{m+1,n+1} = \sum_{k=n}^m a_{m-k} b_k c_{k,n}.$$

Из равенства (13) и из того, что диагональные элементы матрицы (10) отличны от нуля, легко следует теперь нужное нам соотношение. Этим теорема доказана.

Если в формуле (10) положить

$$h(z) = g(z) [1 - f(z)], \quad \text{где} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad (14)$$

то мы получим хорошо изученный класс матриц Гронуолла [1]. Известно, например, что всякая матрица Гронуолла распадается в произведение матрицы преобразования Вороного на матрицу аналитического преобразования [3].

Если же в формуле (10) положить

$$h(z) = \frac{1}{z} g(z) f(z) [1 - f(z)],$$

то соответствующую матрицу мы называем несимметрической матрицей Гронуолла. Всякая несимметрическая матрица Гронуолла распадается в произведение матрицы преобразования Вороного на матрицу обобщенного преобразования Эйлера (см. [3] и [2]).

Доказанная теорема позволяет сформулировать следующие простые предложения:

Для того чтобы АВ-регулярная матрица Гронуолла была В-итеративной, необходимо и достаточно, чтобы матрица (9) была В-регулярной.

Для того чтобы поле АВ-регулярной матрицы Гронуолла было шагреневым, необходимо и достаточно, чтобы матрица (9) была В-регулярной.

Ясно, что оба предложения одинаково справедливы как для симметричных, так и для несимметричных матриц Гронуолла. Под симметричной матрицей Гронуолла мы понимаем матрицу, определяемую формулами (10) и (14). Как уже было указано, эти матрицы принято называть просто матрицами Гронуолла. Несимметричные матрицы Гронуолла в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, естественно отнести также к классу матриц Гронуолла.

Обозначим через E совокупность всех аналитических и всех обобщенных эйлеровских преобразований (см. [2] и [3]).

Теорема 3. Для того чтобы матрица Гронуолла G принадлежала классу E , необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная с ней матрица имела элементы, зависящие лишь от разности индексов, т. е. если

$$s_{m,n} = a_{m-n}.$$

Как известно [3], матрица Гронуолла только в том случае принадлежит классу E , если

$$g(z) = b_0 (1 - qz)^{-1}.$$

Верно и обратное заключение. Таким образом, коэффициенты b_n составляют геометрическую прогрессию, но тогда справедливость теоремы 3 легко следует из формулы (9).

3. Мы продемонстрируем возможности итеративных матриц Гронуолла на суммировании итераций интегрального уравнения Фредгольма

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t) y(t) dt \quad (15)$$

с непрерывными функциями $f(s)$ и $K(s, t)$, $0 \leq s, t \leq 1$ и комплексным параметром λ . Для произвольной непрерывной функции $y_0(s)$ построим последовательность простых итераций:

$$y_{n+1}(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t) y_n(t) dt. \quad (16)$$

Как известно, простые итерации (16) сходятся к решению уравнения (15) при $|\lambda| < |\lambda_1|$ и расходятся при $|\lambda| > |\lambda_1|$, где λ_1 — наименьшее по модулю собственное значение ядра $K(s, t)$. Мы построим итерационный процесс (4), сходящийся к решению уравнения (15) во всей плоскости переменной λ , исключая некоторые разрезы.

Пусть $(c_{m,n})$ — несимметрическая матрица Гронуолла, определяемая функциями

$$g(z) = (1-z)^{-1}, \quad f(z) = [(p+1)^z - 1]^{-1} \left[\left(1 - \frac{pz}{p+1}\right)^{-p} - 1 \right]. \quad (17)$$

Применим эту матрицу к суммированию простых итераций (16) уравнения (15). В силу теоремы 3 соотношение (4) может быть записано в следующей форме

$$z_{m+1}(s) = \frac{\varphi_0(m+1) - \varphi_1(m+1)}{a_0} z_0(s) + \varphi_1(m+1) f(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t) \sum_{n=0}^m a_{m-n} z_n(t) dt, \quad (18)$$

здесь

$$a_n = [(p+1)^n - 1] \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{(n+1)!} \frac{p^{n+1}}{(p+1)^{n+1}},$$

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{n+1}, \quad (19)$$

$$\varphi_0(m+1) = \sum_{n=0}^{m+1} a_n, \quad \varphi_1(m+1) = \sum_{n=0}^m a_{m-n} \varphi_0(n). \quad (20)$$

Легко проверить, что ассоциированная матрица (a_{m-n}) регулярна,

поэтому матрица $(c_{m,n})$ является итеративной матрицей из класса E . В дальнейшем мы эту матрицу будем называть E -матрицей, а метод суммирования, определяемый ею — E -методом.

Известно (см. [2], [5]), что определение всякого метода из класса E может быть дано в следующей эквивалентной форме:

Ряд $\sum d_n$ называется E -суммируемым к сумме S , если сходится к S ряд $\sum \delta_n$, где числа δ_n определяются из тождества

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n [f(z)]^{p^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{n+1}. \quad (21)$$

Для регулярности любого E -метода достаточно, чтобы выполнялись два условия $a_n > 0$ и $\sum a_n = 1$ (см. [2]), которые в нашем случае очевидно выполняются.

Заметим еще, что при $|z| < 1$ функция $w = f(z)$ принимает значения, принадлежащие кругу $|w| < 1$ и осуществляет однолистное отображение единичного круга в плоскости z на односвязную область, лежащую внутри единичного круга плоскости w . Обозначим через $I_{p,n}$ границу этой области. Легко проверить, что при $p+1 = 2^{\frac{1}{\alpha}}$ кривая $I_{p,n}$ лежит внутри области

$$|w| < 1, \quad |\arg(w+1)| < \frac{\pi}{2} \alpha, \quad |w+1| > 2^{-\alpha}. \quad (22)$$

При $\alpha \rightarrow +0$ эта кривая сжимается к отрезку $[0, 1]$ вещественной оси.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — собственные значения ядра $K(s, t)$ интегрального уравнения (15), расположенные в порядке неубывающих модулей, и $S(K)$ — звезда Миттаг-Лефлера с вершинами в точках λ_i . Докажем следующее утверждение:

Теорема 4. Для любого $\lambda \in S(K)$ параметры p и α можно выбрать таким образом, что последовательность (18) функций $z_n(s)$ будет сходиться к решению интегрального уравнения Фредгольма (15) при любой начальной функции $z_0(s)$.

Доказательство. Если λ не является собственным значением ядра $K(s, t)$, то уравнение (15) имеет одно и только одно решение, которое можно представить в форме

$$y(s) = f(s) + \lambda \int_0^1 R(s, t, \lambda) f(t) dt,$$

где $R(s, t, \lambda)$ — резольвента уравнения (15), представляемая степенным рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n(s, t) \lambda^n, \quad (23)$$

сходящимся при $|\lambda| < |\lambda_1|$ и расходящимся при $|\lambda| > |\lambda_1|$. Мы видели, что сходимость итерационного процесса (18) равносильна E -суммируемости простых итераций (16), что, в свою очередь, эквивалентно аналитическому продолжению по λ ряда (23) из круга $|\lambda| < |\lambda_1|$ в область $D_{p,\alpha}$ суммируемости степенного ряда методом E . Следовательно, итерации (18) будут сходиться к решению $y(s)$ уравнения (15) всякий раз, как простые итерации (16) сходятся к этому решению при $|\lambda| < |\lambda_1|$. При этом сходимость итераций (18) будет равномерной во всякой замкнутой области, содержащейся в $D_{p,\alpha}$. Обратно, если итерации (18) сходятся равномерно в некоторой замкнутой области к функции $y(s)$, то эта функция является решением уравнения (15). Действительно, $\varphi_0(m+1) \rightarrow 1$ и $\varphi_1(m+1) \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$; выражение

$$\sum_{n=0}^m a_{m-n} z_n(t),$$

стоящее под знаком интеграла в правой части (18), при $m \rightarrow \infty$ стремится к $y(t)$, так как ассоциированная матрица (a_{m-n}) регулярна.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно найти область E -суммируемости степенного ряда (23) и показать, что эта область при $\alpha \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$ стремится к звезде $S(K)$.

Обозначим через $R(s, t, \lambda)$ аналитическое продолжение степенного ряда (23) в звезду $S(K)$ (в плоскости комплексной переменной λ). Возникает вопрос, для каких значений λ_0 этот ряд E -суммируем.

Если функция $K(s, t, \lambda_0 f(z))$ регулярна при $|z| \leq 1$, то ряд

$$f(z) \sum_{n=0}^{\infty} d_n(s, t) [\lambda_0 f(z)]^n$$

можно разложить по степеням z , и возникающий при этом ряд будет сходиться при $z=1$. Но последнее в силу определения означает E -суммируемость ряда (23) в точке λ_0 .

Обозначим через $G_{p,\alpha}$ область, содержащую внутри начало координат и ограниченную кривой $\Gamma_{p,\alpha}$, являющуюся образом окружности $|z|=1$ при отображении

$$\lambda = \frac{1}{f(z)}. \quad (24)$$

Мы утверждаем, что геометрический ряд $\sum \lambda^n$ E -суммируем к $(1-\lambda)^{-1}$ в каждой точке $\lambda_0 \in G_{p,\alpha}$. Действительно, функция (24) отображает круг на внешность области $G_{p,\alpha}$. Поэтому $1 - \lambda_0 f(z) \neq 0$ для любой точки z круга $|z| \leq 1$, следовательно, функция

$$\frac{1}{1 - \lambda f(z)}$$

регулярна при $|z| \leq 1$. Граница $\Gamma_{p,\alpha}$ является образом кривой $l_{p,\alpha}$ при отображении $\lambda = w^{-1}$. Поэтому семейство $G_{p,\alpha}$ при $p \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow 0$

исчерпывает звезду $S(K)$ функции $(1-\lambda)^{-1}$. Это значит, что какое бы значение λ мы ни взяли (исключая, разумеется, вещественные значения $\lambda > 1$), найдутся достаточно большое $p > 0$ и достаточно малое $\alpha > 0$, для которых $\lambda \in G_{p,\alpha}$.

Рассмотрим вопрос об аналитическом продолжении ряда (23) в звезду Миттаг-Лефлера при самых общих предположениях относительно резольвенты. Пусть $\lambda = \psi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) есть параметрическое уравнение кривой $\Gamma_{p,\alpha}$. Для каждого собственного значения ядра $K(s, t)$ построим кривую $\Gamma_{p,\alpha}(a)$ с уравнением $\lambda = a\psi(t)$. Область, ограниченную кривой $\Gamma_{p,\alpha}(a)$ и содержащую начало, обозначим через $G_{p,\alpha}(a)$. Обозначим через $D_{p,\alpha}$ множество внутренних точек, содержащихся в пересечении замкнутых областей $\overline{G}_{p,\alpha}(a)$. Из предыдущего следует, что степенной ряд (23) суммируем методом E к значению $R(s, t, \lambda)$ в каждой точке области $D_{p,\alpha}$. При этом семейство областей $D_{p,\alpha}$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$ исчерпывает звезду $S(K)$.

Замечание. Итерации (18) могут оказаться несходящимися к решению уравнения (15) для значений λ , отличных от собственных значений λ_i и лежащих на разрезах звезды $S(K)$. Чтобы иметь возможность и здесь применить итерационный процесс (18), мы можем произвести малый сдвиг в спектре уравнения (15). Пусть для определенности λ_i положительны и $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Записывая уравнение (15) в операторной форме

$$y = f + \lambda Ky \quad (25)$$

и замечая, что для достаточно малых b оператор $(J - bK)^{-1}$ существует (J — единичный оператор), мы заменяем (25) эквивалентным уравнением

$$y = (J - ibK)^{-1}f + \mu(J - ibK)^{-1}Ky, \quad (b > 0, \mu = \lambda - ib)$$

с комплексным параметром μ . Для этого уравнения можно построить итерации вида (18), которые будут сходиться к решению уравнения (25) при подходящих p и α .

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступила 20 IX 1962

Ս. Ս. ՄԷԼԻՖԵՆՈՎ Է. Բ. ՄԻՐՆԱԿ

ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ԻՏԵՐԱՑԻԱՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հավ հարանի է հաջորդական մոտարկումների մեթոդի զործնական արժեքը ֆունկցիոնալ հաժաաարումների լուծումները որոնելիս: Հաժաաարման գոյութուն ունեցող լուծմանը զուգամիտող խանրացիոն հաջորդականութունների կառուցման համար կարելի է օգտագործել տարամիտող շարքերի մարման անստթխան ապարար: Հոդվածում գիտարկվում է կոանկրուն մատրի-

ցանքի կիրառումը գծային օպերատորի խոնրացիաների զուգարման համար: Մտցվում է խոնրատիվ մատրիցայի զաղափարը և հետադրոտվում են Գրոնուոլլի մատրիցաների խոնրատիվության պայմանները: Խոնրատիվ մատրիցաների դասի հնարավորությունները ցուցադրվում են Ֆրեդհոլմի հավասարման լուծման վրա: Հոգվածում արվում է Գրոնուոլլի խոնրատիվ մատրիցաների գոյության կոնստրուկտիվ ապացույցը, մատրիցաներ, որոնք զուգարում են Ֆրեդհոլմի հավասարման սեղծվենտը՝ Միտտագ-Լեֆլերի աստղի ցանկացած կետում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Gronwall T. H. Summation of series and conformal mapping. Ann. of Mathematics, **33**, № 2, 1932.
2. Perron O. Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reithenitransformation. Math. Zeitschr., **18**, 1923, s. 157—172.
3. Меленцов А. А. и Костина М. А. К теории преобразований Гронуолла. Изв. Высш. Уч. Завед. „Математика“, **13**, № 6 (1959), стр. 111—117.
4. Scott W. and Wall H. The transformation of series and sequences. Trans. Amer. Math. Soc., **51**, № 2, 1942.
5. Меленцов А. А. К теории преобразований Хаусдорфа. ДАН СССР, **113**, № 3, 1957.