

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартанян

О решениях уравнений Эйнштейна для
 аксиально-симметрических полей

§ 1. О решении Вейля

Первые попытки решения уравнений Эйнштейна для аксиально-симметрических гравитационных полей были сделаны Вейлем [1] и Леви-Чивита [2]. В [1] было предположено, что поле статическое (т. е. тело, создающее поле, неподвижно) и соответственно с этим четырехмерный интервал записывался в виде

$$-ds^2 = g_{\infty}(dx^0)^2 + dl^2, \quad (1.1)$$

где dl — истинное расстояние (ниже мы везде придерживаемся обозначений книги [3]). Каноническим преобразованием координат квадратичную форму (1.1) можно привести к диагональному виду

$$ds^2 = f dt^2 - h(dr^2 + dz^2) - \frac{r^2}{f} d\varphi^2, \quad (1.2)$$

где f и h — являются функциями лишь координат r и z (r, z, φ — цилиндрические координаты). Для тензора энергии и импульса в [1] было использовано выражение

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k, \quad (1.3)$$

где μ_0 — плотность массы в собственной системе, $u^i = dx^i/ds$. Затем уравнения поля были проинтегрированы в предположении, что $u^a = 0$ ($a = 1, 2, 3$). Для этого случая имеем

$$T^{a3} = T^{03} = 0; \quad T^{00} = \frac{\mu_0 c^2}{V - g_{\infty}}. \quad (1.4)$$

Уравнения поля в [1] были получены вариационным принципом для специального вида квадратичной формы (1.2). При этом не учитывалось, что $\delta g_{rr} \neq \delta g_{zz}$ и $\delta g_{ik} \neq 0$ (когда $i \neq k$), в результате чего были пропущены некоторые из уравнений поля. Впервые на это обратил внимание Леви-Чивита [2]. В работе [4] непосредственным вычислением было показано, что если работать с исправленной системой дифференциальных уравнений, то оказывается, что не существует решений с отличным от нуля распределением материи. Могло показаться, что такой результат (отсутствие решения с $\mu_0 \neq 0$) связан с

частным видом четырехмерного интервала (1.2). Однако, в последнем пункте статьи [4] показывается, что если снова принять за основу тензор энергии-импульса (1.4), то такой же вывод получается и в случае статического поля с произвольной квадратичной формой

$$ds^2 = Xdx^2 + Ydy^2 + Zdz^2 + fdu^2. \quad (1.5)$$

В работе [4] не были выявлены физические, а также математические причины такого парадоксального результата. Нам кажется, что формально как для (1.4), так и для более частного случая (1.2) должны существовать решения с отличным от нуля распределением материи.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим уравнение

$$T^i_{k;i} = 0. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.4) в (1.6), получаем

$$\mu_0 g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^a} = 0. \quad (1.7)$$

Отсюда, как правильно было показано в [4], следует, что не существуют решения с $\mu_0 \neq 0$.

Однако, если пользоваться более корректным выражением тензора энергии и импульса

$$T^{ik} = (p + \epsilon) u^i u^k + p g^{ik}, \quad (1.8)$$

то вместо (1.7) мы получим

$$\frac{\partial p}{\partial x^a} + \frac{1}{2} (p + \epsilon) g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^a} = 0. \quad (1.9)$$

Сравнивая (1.9) с (1.7), замечаем, что в (1.7) опущено не только давление, но и градиент давления. Именно это обстоятельство и предопределяет отсутствие решения с отличным от нуля распределением материи. Действительно, под воздействием одного лишь гравитационного притяжения (без учета поля градиента давления) не могут существовать равновесные конфигурации небесных тел с $\mu_0 \neq 0$.

§ 2. О метрике аксиально-симметрических гравитационных полей

Рассмотрим вопрос о виде четырехмерного интервала в случае аксиально-симметрических полей. Формула (1.2) справедлива лишь в том случае, когда аксиально-симметрическое гравитационное поле является статическим, т. е. когда g_{ik} зависят только от r и z .

Однако, нетрудно убедиться из физических соображений, что в природе не могут существовать такие поля. Действительно, чтобы невращающееся тело имело аксиально-симметрическое распределение материи, мы должны допустить наличие в нем особого поля натяжений, т. е. допустить, что в таких телах нарушается закон Паскаля.

Но поскольку нет основания допустить нарушение закона Паскаля, то очевидно, что неподвижное гравитирующее тело и созданное им поле в состоянии равновесия должны обладать сферической симметрией.

Итак, статические поля не могут быть аксиально-симметрическими. Таковым будет поле равномерно-вращающегося тела. В этом случае причиной аксиально-симметрического распределения материи является поле центробежных сил. При наличии равномерного вращения все тензоры, характеризующие гравитационное поле и распределение материи, помимо координат r и z будут также зависеть от угловой скорости вращения ω

$$\begin{aligned} g_{ik} &= g_{ik}(r, z, \omega), \\ T^{ik} &= T^{ik}(r, z, \omega). \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этом случае четырехмерный интервал запишется в виде

$$-ds^2 = g_{00}dx^0{}^2 + g_{11}(dr^2 + dz^2) + g_{22}d\varphi^2 + 2g_{02}dx^0 d\varphi. \quad (2.2)$$

Таким образом, четырехмерный интервал для аксиально-симметрического распределения материи не может быть диагональным.

§ 3. О тензоре энергии и импульса

В этом параграфе мы приведем вывод формулы тензора энергии и импульса для вещества, исходя из вариационного принципа. Эта задача фактически решена в [3, 5]. Однако, здесь мы приведем наглядный вывод, который, возможно, будет полезен с методологической точки зрения.

Как известно, варьированием действия

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega, \quad (3.1)$$

для тензора энергии и импульса получается общая формула [3]

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ -\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} + \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial (\partial g^{ik} / \partial x^l)} \right\}. \quad (3.2)$$

Представляет интерес построить плотность лагранжиана, из которого по общей формуле (3.2) можно было бы получить T_{ik} для вещества. Рассмотрим сперва случай, когда необходимо учесть микроструктуру системы. В этом случае при отсутствии взаимодействия между частицами для действия всей системы имеем

$$S = \sum_a (-m_a c) \int ds_a. \quad (3.3)$$

Это же выражение, очевидно, можно представить в следующем виде

$$S = \frac{1}{c} \sum_a (-m_a c) \int \sqrt{-g^{ik}(x^l)} u_i u_k \frac{ds}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) d\Omega. \quad (3.4)$$

Сравнивая (3.4) с (3.1), для плотности лагранжиана получаем

$$\Lambda(x^i) = \frac{1}{V-g} \sum_a (-m_a c) \sqrt{-g^{ik} u_i u_k} \frac{ds}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a), \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (3.2), получаем известную формулу [3]

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{V-g} u^i u^k \frac{ds}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (3.6)$$

Теперь рассмотрим сплошную среду и построим для нее плотность лагранжиана Λ . Для сплошной среды характерными скалярами являются плотность энергии ε и собственное давление p . Поэтому наиболее общее выражение для действия запишется в виде

$$S = \frac{1}{c} \int [\varphi(\varepsilon, p) g^{ik} u_i u_k + \psi(\varepsilon, p) g^{ik} g_{ik}] \sqrt{-g} d\Omega, \quad (3.7)$$

где $\varphi(\varepsilon, p)$ и $\psi(\varepsilon, p)$ — скалярные функции, подлежащие определению.

Итак, для плотности лагранжиана в этом случае имеем

$$\Lambda = \varphi(\varepsilon, p) g^{ik} u_i u_k + \psi(\varepsilon, p) g^{ik} g_{ik}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.2), для T_{ik} получаем

$$T_{ik} = (2\psi - \varphi) g_{ik} - 2\varphi u_i u_k. \quad (3.9)$$

Для определения вида функций φ и ψ перейдем в сопутствующую систему координат. В этой системе имеем

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= p \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3), \\ T_{00} &= \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где первое соотношение следует из закона Паскаля. С другой стороны, в той же системе отсчета из (3.9) для $T_{\alpha\beta}$ и T_{00} имеем

$$\begin{aligned} T_{11} &= T_{22} = T_{33} = (2\psi - \varphi), \\ T_{00} &= -(\varphi + 2\psi). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сравнивая (3.10) и (3.11), получаем

$$\varphi = -\frac{1}{2}(p + \varepsilon), \quad \psi = -\frac{1}{4}(\varepsilon - p). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.9), получаем известную формулу тензора энергии и импульса для сплошной среды

$$T_{ik} = (\varepsilon + p) u_i u_k + p g_{ik}. \quad (3.13)$$

В заключение выражаем благодарность профессору В. Л. Гинзбургу за ценные замечания.

Финанко-техническая лаборатория
АН Армянской ССР,
Ереванский государственный
университет

Поступила 30 V 1962

Ս. Գ. Մանուկյան, Ֆու. Լ. Վարդանյան

ԷՅՆՇՏԵՅՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՌԱՆՅՔԱ-ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԱՇՏԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հարվածում թննարկված են Վեյլի և Օլիյնիչենկոյի աշխատությունները [1, 2]: Յուրյ է արված, որ հիշատակված աշխատություններում էներգիայի և իմպուլսի T_{ik} -ի թեկնդորի համար օգտադործված է ոչ ճիշտ արտահայտություն, որից հետևում է, որ ճնշման գրադիենտը հավասար է զրոյի: Այս պատճառով [2] աշխատության մեջ ստացված է սխալ արդյունք:

Հոգվածի վերջին պարագրաֆում արված է T_{ik} թեկնդորի մի նոր արտածում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Weyl H. Ann. d. Phys., **54**, 117, 1917.
2. Levi Civita, R. Acc. Lincei, **5**, **28**, 101, 1919.
3. Ландау Л., Лифшиц Е. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.
4. Oljnychenko P. On Static Solutions in General Relativity, Nuovo Cim., **21**, 389, 1961.
5. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, М., 1961.