

Л. В. Михайлов

## Кручение полукруглого стержня, ослабленного продольной круглой цилиндрической полостью

В работе дано приближенное решение задачи кручения стержня, поперечное сечение которого есть полукруг с круглым отверстием (фиг. 1).

Вычислены жесткость и напряжения с оценкой погрешности.

### § 1. Постановка задачи

Обозначим область поперечного сечения через  $\omega$ , радиус полукруга —  $R$ , радиус отверстия —  $a$ , расстояние от центра круга до центра кругового отверстия —  $b$ . Примем, что функция напряжений  $\Phi$  точно удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \Phi = -2\mu\tau \quad (1.1)$$

в области  $\omega$  и граничному условию  $\Phi = 0$  на внешнем контуре сечения. Граничное условие  $Z_n = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$  на внутреннем контуре удовлетворяем приближению, согласно принципу Сен-Венана [1].

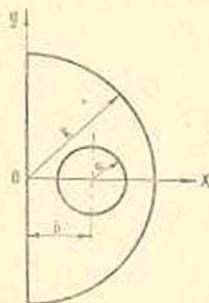
Пусть имеем какой-нибудь стержень с внутренней продольной полостью. Разделим внутренний контур сечения стержня на  $n$  частей (фиг. 2)  $c_1c_2, c_2c_3, \dots, c_n c_1$  и потребуем, чтобы главный вектор и главный момент усилий

$$Z_n dz ds = \frac{\partial \Phi}{\partial s} dz ds,$$

действующие на каждую из частей боковой поверхности  $c_1c_2 dz, c_2c_3 dz, \dots, c_n c_1 dz$ , равнялись нулю.

Получаем следующие условия на внутреннем контуре

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0, \dots, \int_{c_n}^{c_1} \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0;$$



Фиг. 1.

$$\int_{c_1}^{c_2} x \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0, \dots, \int_{c_n}^{c_1} x \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0; \quad (1.2)$$

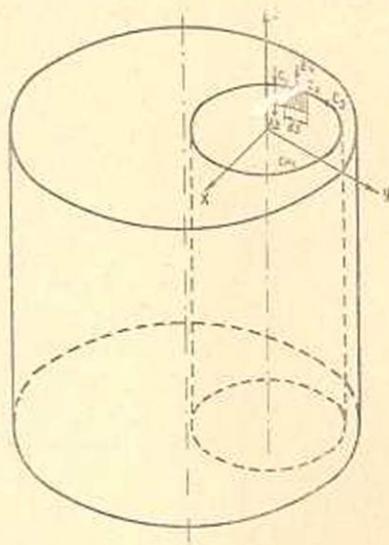
$$\int_{c_1}^{c_2} y \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0, \dots, \int_{c_n}^{c_1} y \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = 0,$$

где  $x$  и  $y$  — координаты точки внутреннего контура поперечного сечения стержня.

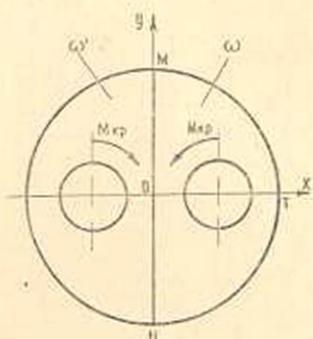
Очевидно, что точность решения зависит от числа участков, на которые разделен контур, при этом чем больше число участков, тем точнее решение. Однако, как будет видно из нижеследующего, практически приемлемые результаты можно получить, ограничиваясь делением контура на 2–3 участка.

Функцию напряжений конструируем следующим образом.

Рассмотрим задачу о кручении круглого стержня с двумя одинаковыми, симметрично расположенными круговыми полостями, в правой части сечения которого действует крутящий момент, направленный против хода часовой стрелки, а в левой части — по часовой



Фиг. 2.



Фиг. 3.

стрелке (фиг. 3). Функция напряжений  $\Phi$  для этой, вспомогательной, задачи должна удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\nabla^2 \Phi = -2\mu\tau \quad \text{при } x \geq 0, \quad (1.3)$$

$$\nabla^2 \Phi = +2\mu\tau \quad \text{при } x \leq 0,$$

и контурному условию  $\Phi = 0$  на внешней окружности круга. На внутренних окружностях функция  $\Phi$  должна удовлетворять условиям (1.2).

Из мембранной аналогии следует, что для вспомогательной задачи на диаметре  $MN$  функция  $\Phi = 0$  и, следовательно, часть круга  $MTN$  будет находиться в таких же условиях, как и сечение, соответствующее рассматриваемой задаче.

Решение уравнений (1.3) для вспомогательной задачи представим так:

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} + \varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})} & \text{при } \operatorname{Re} z \geq 0, \\ +\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} + \varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})} & \text{при } \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

где  $z = x + iy$ ;  $\bar{z} = x - iy$ .

Функция  $\varphi(z)$  должна быть голоморфной в области круга с двумя круговыми отверстиями, следовательно, ее можно представить в следующем виде [2]

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} z^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(z+b)^k} \right], \quad (1.4)$$

где все коэффициенты действительные.

Здесь учтено то обстоятельство, что функция  $\Phi_1 = \varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})}$  должна быть симметричной относительно оси  $x$  и кососимметричной относительно оси  $y$ . Ввиду этого граничные условия (1.2) удовлетворяем только для правой внутренней окружности. Применяя комплексные координаты  $z$  и  $\bar{z}$ , можем записать эти условия так:

$$\begin{aligned} \int_{c_1}^{c_2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) &= 0, \dots, \int_{c_n}^{c_1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \\ \int_{c_1}^{c_2} (z + \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) &= 0, \dots, \int_{c_n}^{c_2} (z + \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \\ \int_{c_1}^{c_2} (z - \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) &= 0, \dots, \int_{c_n}^{c_1} (z - \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В первом приближении функция напряжений будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) + \\ & + A_1 \left[ \frac{1}{(z-b)} + \frac{1}{(z+b)} \right] + A_1 \left[ \frac{1}{(z-b)} + \frac{1}{(z+b)} \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из граничного условия  $\Phi = 0$  на внешнем контуре круга имеем

$$C_{2k+1} = -\frac{1}{R^{2k+1}} \left( B_{2k+1} + \frac{2A_1 b^{2k}}{R^{2k+1}} \right), \quad (1.7)$$

$$B_{2k+1} = (-1)^k \frac{4\mu\tau R^2}{\pi(2k+1)[(2k+1)^2 - 4]}$$

— коэффициенты ряда Фурье функции

$$f(\theta) = \begin{cases} -\frac{\mu\tau R^2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} & \text{при } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ +\frac{\mu\tau R^2 (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2}{4} & \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Тогда функция напряжений примет вид

$$\Phi = -\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^{2k+1}} \left( B_{2k+1} + \frac{2A_1 b^{2k}}{R^{2k+1}} \right) (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) + \\ + A_1 \left[ \frac{1}{(z-b)} + \frac{1}{(z+b)} \right] + A_1 \left[ \frac{1}{(z-\bar{b})} + \frac{1}{(z+\bar{b})} \right].$$

Неизвестный коэффициент  $A_1$  определяем из граничного условия на внутреннем контуре

$$\int_0^{2\pi} (z-\bar{z}) \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0.$$

Первые два условия (1.5) удовлетворяются тождественно. Для  $A_1$  имеем

$$A_1 = \mu\tau \frac{a^2 \left[ b - \frac{R}{\pi} \left( \frac{R^2 + b^2}{b^2} - \frac{R^4 - b^4}{Rb^2} \operatorname{arctg} \frac{b}{R} \right) \right]}{\left[ 1 - \frac{a^2}{4b^2} - \frac{2a^2 R^2 (R^4 + b^4)}{(R^4 - b^4)^2} \right]}. \quad (1.8)$$

Удовлетворение граничных условий по внутреннему контуру в первом приближении дает недостаточно точные результаты (табл. 2).

Во втором приближении делим внутренний контур сечения на два участка  $0 < \theta < \pi$ ;  $\pi < \theta < 2\pi$ , но ввиду симметричности функции  $\Phi$  относительно оси  $x$ , интегрирование (1.5) ведем от 0 до  $\pi$ .

Функция напряжений во втором приближении будет

$$\Phi = -\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) + \\ + \sum_{k=1}^n A_k \left\{ \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(z+b)^k} \right] + \left[ \frac{1}{(z-\bar{b})^k} - \frac{(-1)^k}{(z+\bar{b})^k} \right] \right\}. \quad (1.9)$$

Граничные условия будут

$$\Phi = 0 \text{ на внешнем контуре круга и} \quad (1.10)$$

$$\int_{b+a}^{b-a} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0,$$

$$\int_{b+a}^{b-a} (z + \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0,$$

$$\int_{b+a}^{b-a} (z - \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0 \quad (1.11)$$

на внутреннем контуре.

Из (1.10) имеем

$$C_1 = -\frac{1}{R} \left( B_1 + \frac{2A_1}{R} \right),$$

$$C_{2k+1} = -\frac{1}{R^{2k+1}} \left[ B_{2k+1} + 2A_1 \frac{b^{2k}}{R^{2k+1}} + 2A_2 \frac{2kb^{2k-1}}{R^{2k+1}} + \right. \\ \left. + A_3 \frac{2k(2k-1)b^{2(k-1)}}{R^{2k+1}} \right],$$

где  $k > 1$ , а  $B_{2k+1}$  определяется по (1.7).

Тогда функция напряжений представляется так:

$$\Phi = -\frac{\mu\tau(z + \bar{z})^2}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k+1}}{R^{2k+1}} (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2A_1 b^{2k}}{R^{2(2k+1)}} (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A_2 b^{2k-1}}{R^{2(2k+1)}} 2k (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_3 b^{2(k-1)}}{R^{2(2k+1)}} 2k(2k-1) (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) + \\ + \sum_{k=1}^3 A_k \left\{ \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(z+b)^k} \right] + \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(\bar{z}+b)^k} \right] \right\}.$$

Из (1.11) получаем систему трех уравнений относительно  $A_k$ , решая которую, находим  $A_k$  (ввиду громоздкости выражений, система уравнений не приводится). Функция напряжений в третьем приближении будет иметь вид

$$\Phi = -\frac{\mu\tau(z + \bar{z})^2}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) + \\ + \sum_{k=1}^6 A_k \left\{ \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(z+b)^k} \right] + \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(\bar{z}+b)^k} \right] \right\} \quad (1.12)$$

Граничные условия будут

$$\Phi = 0 \text{ на внешнем контуре круга} \quad (1.13)$$

и

$$\int_{b+a}^{b+ia} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad \int_{b+ia}^{b-a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0,$$

$$\int_{b+ia}^{b+ia} (z + \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad \int_{b+ia}^{b-a} (z + \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0,$$

$$\int_{b+ia}^{b+ia} (z - \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \quad \int_{b+ia}^{b-a} (z - \bar{z}) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) = 0 \quad (1.14)$$

на внутреннем контуре.

Из (1.13) имеем

$$C_1 = -\frac{1}{R} \left( B_1 + \frac{2A_1}{R} \right),$$

$$C_3 = -\frac{1}{R^3} \left( B_3 + \frac{2A_1 b^2}{R^3} + \frac{4A_2 b}{R^3} + \frac{2A_3}{R^3} \right),$$

$$C_5 = -\frac{1}{R^5} \left( B_5 + \frac{2A_1 b^4}{R^5} + \frac{8A_2 b^3}{R^5} + \frac{12A_3 b^2}{R^5} + \frac{8A_4 b}{R^5} + \frac{2A_5}{R^5} \right),$$

$$C_{2k+1} = -\frac{1}{R^{2k+1}} \left\{ B_{2k+1} + \frac{1}{R^{2k+1}} \left[ 2A_1 b^{2k} + 2A_2 b^{2k-1} 2k + \right. \right.$$

$$+ A_3 b^{2(k-1)} 2k(2k-1) + \frac{A_4 b^{2k-1}}{3} 2k(2k-1)(2k-2) +$$

$$+ \frac{A_5 b^{2(k-2)}}{12} 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3) +$$

$$\left. \left. + \frac{A_6 b^{2k-5}}{60} 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4) \right] \right\},$$

где  $k \geq 3$ , а  $B_{2k+1}$  определяется по (1.7).

Тогда функция напряжений представится так

$$\Phi = -\frac{\mu z (z + \bar{z})^2}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k+1}}{R^{2k+1}} (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2A_1 b^{2k}}{R^{2(2k+1)}} (z^{2k-1} + \bar{z}^{2k+1}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A_2 b^{2k-1}}{R^{2(2k+1)}} 2k (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_3 b^{2(k-1)}}{R^{2(2k+1)}} 2k(2k-1) (z^{2k-1} + \bar{z}^{2k+1}) -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_4 b^{2k-1}}{3R^{2(2k+1)}} 2k(2k-1)(2k-2) (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k-1}) -$$

$$- \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_5 b^{2(k-2)}}{12R^{2(2k+1)}} 2k(2k-1)(2k-2)(2k-3) (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) -$$

$$- \sum_{k=3}^{\infty} \frac{A_6 b^{2k-5}}{60R^{2(2k+1)}} 2k(2k-1) \dots (2k-4) (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^6 A_k \left\{ \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(z+b)^k} \right] + \left[ \frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(z+b)^k} \right] \right\}.$$

Из (1.14) получаем систему шести уравнений относительно  $A_k$ , решая которую, находим  $A_k$ .

## § 2. Крутящий момент и напряжения

Крутящий момент вычисляем по формуле

$$M_{kp} = \frac{1}{2} \oint (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy \right) + \mu \tau \oint xy (x dx - y dy) \quad (2.1)$$

согласно [3] и [4].

Переходя в (2.1) к комплексным координатам  $z$  и  $\bar{z}$ , имеем

$$M_{kp} = \frac{1}{2i} \oint z \bar{z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) - \frac{\mu \tau}{4i} \oint \bar{z}^2 z dz. \quad (2.2)$$

В случае многосвязной области крутящий момент  $M_{kp}$  представится суммой контурных интегралов (2.2), вычисленных в направлении положительного обхода внешнего контура  $L_0$  так, чтобы область оставалась слева, и  $m$  контурных интегралов, вычисленных по  $m$  внутренним контурам в противоположном направлении

$$M_{kp} = \frac{1}{2i} \int_{L_0} z \bar{z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) - \frac{\mu \tau}{4i} \int_{L_0} \bar{z}^2 z dz - \sum_{m=1}^m \left[ \frac{1}{2i} \int_{L_m} z \bar{z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) - \frac{\mu \tau}{4i} \int_{L_m} \bar{z}^2 z dz \right]. \quad (2.3)$$

Для рассматриваемого сечения (фиг. 1) имеем

$$M_{kp} = \pi \left\{ \frac{\mu \tau R^4}{4} - \frac{\mu \tau a^4}{2} - 2\mu \tau a^2 b^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16\mu \tau R^4}{\pi^2} \times \right. \\ \times \frac{1}{(2k+1)(2k+3)[(2k+1)^2-4]} + \\ \left. + \frac{2\mu \tau P a^2 b}{\pi} \left[ 1 + \frac{R^2}{b^2} - \frac{(R^2-b^4)}{Rb^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{R} \right] - \right. \\ \left. - A_1 \left[ 2b + \frac{a^2}{2b} + \frac{8R}{\pi} + \frac{4a^2 b (R^2+b^4) R^2}{(R^2-b^4)^2} + \frac{8b}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R}{b} - \right. \right. \\ \left. - \frac{8R^3}{\pi b^2} \left( 1 - \frac{R}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{R} \right) \right] + A_2 \left[ \frac{a^2}{2b^2} - \frac{8}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R}{b} + \frac{8Rb}{\pi(R^2+b^2)} - \right. \\ \left. - \frac{16a^2 b^2 R^3}{(R^2-b^4)^2} - \frac{8R^3}{\pi b^3} \left( 2 - 3 \frac{R}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{R} + \frac{b^2}{R^2+b^2} \right) \right] + \dots$$

$$+ A_3 \left[ \frac{48R^4}{\pi b^3} \operatorname{arctg} \frac{b}{R} - \frac{3a^2}{8b^3} - \frac{R^2 (R^4 + 56R^2b^2 + 67b^4) + 24b^6}{\pi R (R^2 + b^2)^3} - \frac{32a^2b^3 (2R^4 + b^4) R^4}{(R^4 - b^4)^4} \right] \quad (2.4)$$

Для вычисления напряжений имеем известную формулу

$$T_n - iT_s = 2ie^{i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (2.5)$$

где  $T_n$  — касательное напряжение, направленное по нормали  $n$  к произвольной кривой, расположенной в области сечения,  $T_s$  — касательное напряжение, направленное по касательной к указанной кривой,  $\varphi$  — угол, составленный нормалью  $n$  с осью  $x$ .

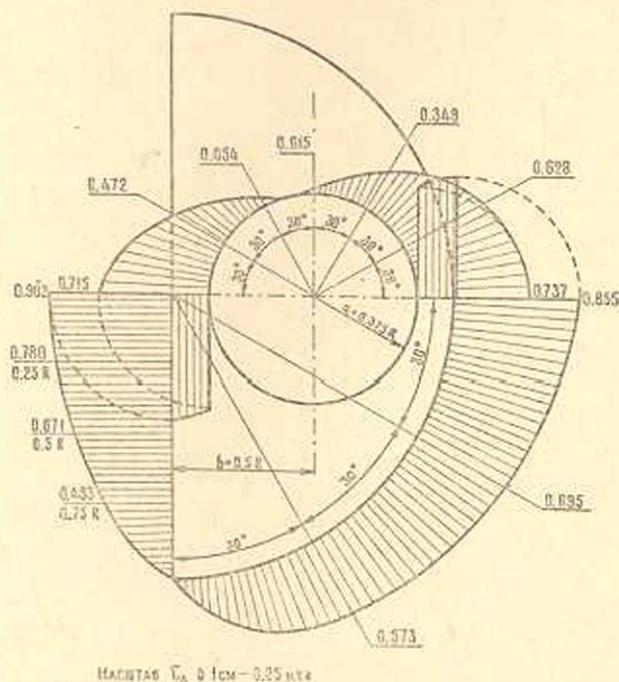
Из (2.5) для напряжения  $T_s$  имеем

$$T_s = - \left( e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + e^{-i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right). \quad (2.6)$$

Численный пример выполнен для  $b = 0,5R$  и  $a = 0,1R; 0,2R; 0,3R; 0,375R; 0,4R$ .

Результаты решения системы уравнений, получаемой из (1.11) и (1.14), для указанных соотношений размеров приведены в табл. 1.

На фиг. 4 показана эпюра напряжений для  $b = 0,5R$  и  $a = 0,375R$ .



Фиг. 4.

Таблица 1

| Коэффициенты     | $a=0,1R$       |             | $a=0,2R$   |             | $a=0,3R$  |                | $a=0,375R$  |           | $a=0,4R$ |  |
|------------------|----------------|-------------|------------|-------------|-----------|----------------|-------------|-----------|----------|--|
|                  | Приближение II | Приближение |            | Приближение |           | Приближение II | Приближение |           |          |  |
|                  |                | II          | III        | II          | III       |                | II          | III       |          |  |
| $A_1(\mu r R^3)$ | 0,000159       | 0,000706    | 0,000726   | 0,001925    | 0,001932  | 0,003716       | 0,004966    | 0,005312  |          |  |
| $A_2(\mu r R^3)$ | 0,000015       | 0,000213    | 0,000218   | 0,000845    | 0,000853  | 0,001527       | 0,001601    | 0,001653  |          |  |
| $A_3(\mu r R^3)$ | 0              | 0,000004    | 0,00000426 | -0,000062   | -0,000014 | -0,000160      | -0,000250   | -0,000288 |          |  |
| $A_4(\mu r R^6)$ | —              | —           | 0          | —           | 0,000007  | —              | —           | 0,000014  |          |  |
| $A_5(\mu r R^7)$ | —              | —           | 0          | —           | 0         | —              | —           | 0         |          |  |
| $A_6(\mu r R^8)$ | —              | —           | 0          | —           | 0         | —              | —           | 0         |          |  |

Наибольшие напряжения возникают на прямолинейной части контура; в угловых точках, как и следовало ожидать, напряжения равны нулю.

Найденная функция напряжений точно удовлетворяет граничному условию на внешнем контуре и приближенно, но достаточно точно, на внутреннем контуре, о чем свидетельствуют величины погрешностей  $\Delta\%$ , определяемых согласно [6].

При точном решении задачи на внутреннем контуре сечения

$$T_n = i \left( e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{z}} \right) = 0,$$

отсюда

$$\Delta = \frac{e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{z}} + e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \bar{z}}}{e^{i\varphi} \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{z}}} 100\%.$$

где

$$\Phi_0 = -\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4}, \quad \text{а} \quad \Phi_1 = \varphi(z) + \overline{\varphi(\bar{z})}.$$

Значения погрешностей  $\Delta\%$  для наиболее характерных точек приведены в табл. 2.

Таблица 2

| $a=0,375R$<br>$b=0,5R$ | Точки   |          |         |                             |
|------------------------|---------|----------|---------|-----------------------------|
|                        | $z=b+a$ | $z=b+ia$ | $z=b-a$ | $z=b+ae^{\frac{2}{3}\pi i}$ |
| I приближение          | 0       | 6,7%     | 0       | 5,3%                        |
| II приближение         | 0       | 0,41%    | 0       | 1,15%                       |

В табл. 3 приведены жесткость и напряжения  $T_s^{\max}$  для полукруга с отверстием и аналогичные данные для полукруга без отверстия.

Таблица 3

| Сечение  | Жесткость ( $\mu\tau R^4$ ) | $T_s^{\max}(\mu\tau R)$ по круговой части контура | $T_s^{\max}(\mu\tau R)$ по радиальной части контура |
|--|-----------------------------|---|---|
| Полукруг с отверстием<br>$a=0,375R$ ; $b=0,5R$ | 0,242                       | 0,855   | 0,902   |
| Полукруг [5] (по Сен-Венану)                   | 0,296                       | 0,719   | 0,849   |

Приведенные расчеты для стержня полукруглого сечения с отверстием показывают (табл. 4), что для получения практически при-

| Точки   | $a = 0,1 R$<br>$b = 0,5 R$   |          |           | $a = 0,2 R$<br>$b = 0,5 R$ |          |          |
|---------|------------------------------|----------|-----------|----------------------------|----------|----------|
|         | $T_s$                        |          | $\beta_z$ | $T_s$                      |          |          |
|         | Приближение                  |          |           | Приближение                |          |          |
|         | I                            | II       | I         | II                         | III      |          |
| $z=R$   | 0,714128                     | 0,751650 | 4,9       | 0,739392                   | 0,751650 | 0,752292 |
| $z=b+a$ | 0,213176                     | 0,271112 | 21,4      | 0,326564                   | 0,459134 | 0,426588 |
| $z=b-a$ | 0,085956                     | 0,168812 | 49        | 0,286900                   | 0,409722 | 0,411802 |
| $z=0$   | 0,845656                     | 0,846968 | 0         | 0,834616                   | 0,849116 | 0,848994 |
| Точки   | $a = 0,375 R$<br>$b = 0,5 R$ |          |           | $a = 0,4 R$<br>$b = 0,5 R$ |          |          |
|         | $T_s$                        |          | $\beta_z$ | $T_s$                      |          |          |
|         | Приближение                  |          |           | Приближение                |          |          |
|         | I                            | II       | I         | II                         | III      |          |
| $z=R$   | 0,791793                     | 0,855604 | 7,5       | 0,823036                   | 0,865092 | 0,871928 |
| $z=b+a$ | 0,651278                     | 0,737684 | 11,9      | 0,711804                   | 0,760230 | 0,769988 |
| $z=b-a$ | 0,521194                     | 0,715334 | 27        | 0,529716                   | 0,739460 | 0,748242 |
| $z=0$   | 0,775866                     | 0,902996 | 14        | 0,740516                   | 0,905938 | 0,903972 |

Таблица 4

|           |           | $a = 0,3 R$<br>$b = 0,5 R$                         |                              |          |           |           |
|-----------|-----------|--|------------------------------|----------|-----------|-----------|
| $\beta_2$ | $\beta_3$ | $T_s$  |                              |          | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
|           |           | Приближение  |                              |          |           |           |
|           |           | I  | II                           | III      |           |           |
| 1,6       | 0,08      | 0,762200   | 0,801042                     | 0,801298 | 4,9       | 0,031     |
| 3,9       | 0,75      | 0,523950   | 0,609372                     | 0,610532 | 14        | 0,18      |
| 30        | 0,5       | 0,408472   | 0,592076                     | 0,598754 | 31        | 1,1       |
| 1,65      | 0,014     | 0,808956   | 0,876150                     | 0,877898 | 7,8       | 0,19      |
| $\beta_2$ | $\beta_3$ | При отсутст-<br>вии отверстия<br>$T_s$ (по автору) | По Сен-Ве-<br>нану [5] $T_s$ |          |           |           |
| 4,9       | 0,19      | 0,726760   | 0,719                        |          |           |           |
| 6,5       | 1,27      |  |                              |          |           |           |
| 28        | 1,16      |  |                              |          |           |           |
| 18        | 0,44      | 0,848826   | 0,849                        |          |           |           |

емлемых результатов можно ограничиться выполнением второго приближения. В табл. 4 приведена относительная погрешность  $(k-1)$ -го приближения относительно  $k$ -го приближения

$$\beta_k = \frac{T_z^{(k)} - T_z^{(k-1)}}{T_z^{(k)}} 100\%.$$

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса  
Кафедра сопротивления материалов

Поступила 29 V 1962

### Լ. Վ. Միխայլով

## ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔՈՎ ԿԻՍԱՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Հարվածում զիտարվում է շրջանաձև անցք ունեցող կիսաշրջանի ուրբման խնդիրը: Ընդունվում է, որ լարումների ֆունկցիան ( $\Phi$ ) ճշգրիտ բավարարում է ուրբման զիֆերենցիալ հավասարմանը (1.1) և կիսաշրջանի արտաքին եզրագծի վրա  $\Phi = 0$  պայմանին, իսկ անցքին համապատասխանող գլանային մակերևույթի վրա շոշափող լարումների ( $Z_n$ ) գրույի հավասար լինելու պայմանը բավարարվում է ըստ Սեն-Վենանի սկզբունքի (1.2):

Հարվածում հաշված են օրինակներ  $b = 0,5 R$ ,  $a = 0,1 R$ ;  $0,2 R$ ;  $0,3 R$ ;  $0,375 R$ ;  $0,4 R$  դեպքերի համար:

Բերված հաշվարկները ցույց են տալիս, որ կիրառական արդյունքներ ստանալու համար բավական է սահմանմիակվել խնդրի լուծման հրկրորդ մոտավորությամբ:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Салонджян О. М. Применение принципа Сен-Венана к решению задачи теории упругости. Сборник научных трудов ЕрПИ, Ереван, 1960.
2. Гурса Э. Курс математического анализа, т. II. ОНТИ, М., 1936.
3. Кит Г. С. Приближенное решение задачи кручения. Изд. АН УССР, Киев, 1960.
4. Ван-Цзи-Де. Прикладная теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, НКТП, М., 1937.
6. Бахтияров И. А. Кручение призматического бруса коробчатого сечения. Автореферат диссертации Аз. госуниверситет, мех.-мат. фак., Баку, 1961.