ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 5, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ш. Асатурян, П. М. Кичаев

Изгибные колебания стержней при нелинейном законе упругости

Введение

Имеется обширная литература, посвященная колебаниям стержней переменного поперечного сечения при линейном законе деформации [1], [2], [3], [4].

Существует ряд задач, имеющих большое практическое значение, при рассмотрении которых необходимо обращаться к нелинейной теории изгибных колебаний. Так, например, колебания турбинных лопаток происходят в поле высоких температур, где, как показывает опыт, не выполняется линейный закон деформации Гука и появляются пластические деформации.

В нелинейной технической теории упругости, в частности, для изгиба призматических стержней предполагают, что связь между напряжением в волокне σ_x и относительным удлинением волокна ε_x определена из экспериментов на растяжение-сжатие. Эта фундаментальная связь определяется обобщенным нелинейным законом деформации в виде [5]:

$$\sigma_x = E\left(1 - aE^2\varepsilon_x^2\right)\varepsilon_x, \tag{0.1}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(1 + a\sigma_x^2\right)\sigma_x. \tag{0.2}$$

Здесь E—модуль упругости; a—постоянная, имеющая размерность $см^4/кг^2$, определяется из соотношения

$$a = -\frac{2}{27}\frac{E\gamma}{G^3}, \tag{0.3}$$

где G—модуль сдвига в $кг/см^2$,

γ—интенсивность касательных напряжений.

Для модуля интенсивности касательных напряжений γ предлагается нами следующее эмпирическое соотношение

$$\gamma = \left(\frac{2}{m} - 1\right)G_1, \tag{0.4}$$

где $\frac{1}{m}$ — коэффициент Пуассона,

G_1 — безразмерный модуль сдвига.

Соотношения (0.1), (0.2) и (0.4) характеризуют не только нелинейный закон упругости, но, по-видимому, служат выражением пластических деформаций в зоне упрочнения при высоких температурах порядка $500 \div 700^\circ$C.

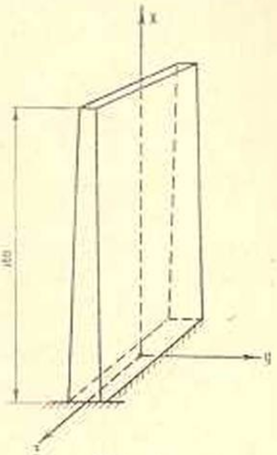
Заметим, что из условия совместности деформаций Сен-Венана и нелинейной теории изгиба призматических стержней [5] следует пропорциональность между относительным удлинением и кривизной упругой линии в следующем виде

$$\varepsilon_x = y \frac{d^2\eta}{dx^2}. \tag{0.5}$$

§ 1. Нелинейные изгибные колебания стержней переменного поперечного сечения в поле центробежных сил

Изгибные колебания стержней при нелинейном законе упругости с постоянным поперечным сечением и шарнирно закрепленными концами рассмотрены в работе [5].

В данной работе приводится исследование свободных нелинейных изгибных колебаний призматических стержней переменного поперечного сечения в поле центробежных сил. При этом учитывается влияние одновременного изменения жесткости и погонной массы на частоту собственных колебаний стержня. Так как существенная закрученность турбинных лопаток мало влияет на основную частоту их колебаний [4], то при расчете нелинейных колебаний лопатки имитируем как незакрученные призматические консольные балки переменного сечения.



Фиг. 1.

Итак, рассмотрим в декартовой системе координат призматический стержень произвольного поперечного сечения длиной l. Пусть для недеформированного стержня его ось совпадает с осью x, а плоскость сечения — с плоскостью yz (фиг. 1).

Для исследования нелинейного колебания упругой системы воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. По принципу Гамильтона-Остроградского для неконсервативной системы сил при изохронной вариации имеем соотношение

$$F_1 = \int_0^{t_1} L\,dt; \quad \delta F_1 = 0, \tag{1.1}$$

где L — функция Лагранжа, определяемая уравнением

$$L = A_1 + A_2 - T. \tag{1.2}$$

Здесь A_1—полная работа упругих сил,

A_2—работа центробежных сил,

T—кинетическая энергия системы.

Составим функцию Лагранжа. Для этого сначала вычислим работу внутренних сил упругой системы. Элементарная работа будет

$$d\left(\frac{dA_1}{dx}\right) = \int\limits_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \, d\varepsilon_x .$$

Подставляя сюда значения σ_x и ε_x из соотношений (0.2) и (0.5), получим

$$d\left(\frac{dA_1}{dx}\right) = \frac{E}{2}\left(1 - \frac{1}{2} aE^2\varepsilon_x^2\right)\varepsilon_x^2 = \frac{E}{2}\left[1 - \frac{aE^2}{2}\left(y\frac{\partial^2\eta}{dx^2}\right)^2\right]\left(y\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2.$$

Интегрируя по площади F поперечного сечения, найдем работу на единицу длины стержня

$$\frac{dA_1}{dx} = \frac{E}{2}\left[\iint\limits_F y^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 dydz - \frac{aE^2}{2}\iint\limits_F y^4\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^4 dydz\right].$$

Вводя в рассмотрение моменты инерции сечения

$$J_1 = \iint\limits_F y^2\, dy\, dz, \quad J_2 = \iint\limits_F y^4\, dy\, dz,$$

из предыдущего соотношения работу деформации для всего стержня получим в виде

$$A_1 = \int\limits_0^l \frac{dA_1}{dx}\, dx = \frac{E}{2}\int\limits_0^l J_1\left[1 - \frac{aE^2J_2}{2J_1}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 dx. \tag{1.3}$$

К элементу стержня приложена центробежная сила, имеющая вдоль оси x проекцию $r\omega^2\rho F$. Проекциями центробежных сил вдоль других осей вследствие малости их пренебрегаем. Работа центробежной силы определяется формулой

$$A_2 = \int\limits_0^l \rho E r\omega^2\Delta\, dx,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2}\int\limits_0^x\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 dx; \quad r = r_0 + x;$$

ρ — плотность материала; ω—угловая скорость;

r_0—радиус вращения закрепленного конца стержня. Следовательно, работа центробежной силы стержня будет равна

$$A_2 = \frac{\omega^2}{2}\int_0^l \left[\rho \cdot F \cdot r \int_0^x \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 dx\right] dx. \tag{1.4}$$

Кинетическую энергию стержня определим путем интегрирования живой силы отдельных элементов его. Если пренебрежем инерцией вращения элементов стержня, то найдем [1]

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho F \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.3), (1.4), (1.5) в уравнение (1.2), а соотношение (1.2) в формулу (1.1), получим:

$$F_1 = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_0^l \left\{EJ_1\left[1 - \frac{aE^2J_2}{2J_1}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \omega^2\rho F r\int_0^x \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 dx - \rho F\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2\right\} dx\, dt. \tag{1.6}$$

Для упрощения вычислений, введем следующие обозначения:

$$t_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad \tau = pt; \quad \xi = \frac{kx}{l}; \quad r = r_0 + x = r_0\left(1 + \frac{l}{kr_0}\xi\right); \tag{1.7}$$

$$J_1 = J_0\left(1 - \frac{\beta x}{l}\right) = J_0\left(1 - \frac{\beta\xi}{k}\right) = J_0 f(\xi);$$

$$J_2 = J\left(1 - \frac{\beta_1 x}{l}\right) = J\left(1 - \frac{\beta_1\xi}{k}\right) = J\cdot f_1(\xi);$$

$$F = F_0\left(1 - \mu\frac{x}{l}\right) = F_0\left(1 - \frac{\mu}{k}\xi\right) = F_0\varphi(\xi); \tag{1.8}$$

$$\rho = \rho_0\left(1 + \nu\sin\frac{\pi n x}{l}\right) = \rho_0\left(1 + \nu\sin\frac{\pi n}{k}\xi\right) = \rho\varphi_1(\xi);$$

$$\beta = \frac{J_0 - J_{1l}}{J_0}; \quad \beta_1 = \frac{J - J_{0l}}{J}; \quad \mu = \frac{F_0 - F_l}{F_0},$$

где индекс 0 показывает, что все величины вычислены в корневом сечении, а l—на конце стержня; τ—безразмерное время; ξ—безразмерная координата; p—частота колебания стержня; k—безразмерный параметр, подлежащий определению; n—число длин волн шероховатости поверхности изделия.

Величина ν характеризует амплитуду колебания шероховатости и неровности поверхности изделия стержня, учитывающую технологический фактор изготовления, накип на поверхности лопатки и другие отклонения от средней плотности ρ_0, т. е. безразмерную амплитуду колебания распределения масс около среднего значения плотности вдоль длины стержня. Величины ν и n определяются статистическими методами по наблюдениям. Так как

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{k}{l};\qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\frac{k^2}{l^2};\qquad \frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\eta}{\partial\tau}p, \tag{1.9}$$

то на основании (1.7), (1.8) и (1.9) уравнение (1.6) примет вид

$$F_1=\frac{\rho_0F_0l}{2kp}\int_0^{2\pi}\int_0^{k}\left\{\alpha^2f(\xi)\left[1+\frac{\lambda}{6}\frac{f_1(\xi)}{f(\xi)}\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\eta_1\omega^2r(\xi)\varphi(\xi)\varphi_1(\xi)\int_0^{\xi}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2d\xi-p^2\varphi(\xi)\varphi_1(\xi)\left(\frac{\partial\eta}{\partial\tau}\right)^2\right\}d\xi\,d\tau, \tag{1.10}$$

где для сокращения записи приняты следующие обозначения:

$$\alpha^2=\frac{EJ_0}{\rho_0F_0}\frac{k^4}{l^4};\qquad \lambda=-3aE^2\frac{Jk^4}{J_0l^4};\qquad \eta_1=\frac{kr_0}{l}. \tag{1.11}$$

Из (1.10) следует, что уравнение Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи δF_1 является нелинейным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами. Поэтому вариационную задачу будем решать приближенно.

Функцию $\eta(\xi,\tau)$ будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от ξ, а вторая — только от τ, т. е.

$$\eta(\xi\,\tau)=R(\xi)\,\varphi(\tau). \tag{1.12}$$

Так как мы рассматриваем стержень как консольную балку, то граничные условия будут:

$$R\big|_{\xi=0}=0;\quad \frac{\partial R}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}=0;\quad \frac{\partial^2R}{\partial\xi^2}\bigg|_{\xi=k}=0;\quad \frac{\partial^3R}{\partial\xi^3}\bigg|_{\xi=k}=0. \tag{1.13}$$

Этим условиям удовлетворяет функция Н. А. Крылова [6],

$$R(\xi)=\left|U(\xi)-\frac{S(k)}{T(k)}V(\xi)\right|, \tag{1.14}$$

где

$$\left.\begin{aligned}S(\xi)&=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi+\cos\xi); & U&=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi-\cos\xi);\\ T(\xi)&=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}\xi+\sin\xi); & V(\xi)&=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi-\sin\xi),\end{aligned}\right| \tag{1.15}$$

а безразмерные числа k—корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ch} k \cdot \cos k + 1 = 0. \tag{1.16}$$

Приведем значения нескольких корней уравнения (1.16), вычисленных Рэйлем [1] и А. Н. Крыловым [2]

$$k_1 = 1{,}875; \quad k_2 = 4{,}694, \quad k_3 = 7{,}855.$$

Подставляя функцию (1.12) в формулу (1.10), получим

$$F_1 = \frac{\rho_0 F_0 l}{2kp} \int_0^{2\pi} \left[q^2 \alpha^2 \int_0^k f(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + \frac{\lambda q^4}{6} \int_0^k f_1(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^4 d\xi + \right.$$

$$+ q^2 \eta_1 \omega^2 \int_0^k \left[r(\xi) \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) \int_0^\xi \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^2 d\xi \right] d\xi -$$

$$\left. - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \int_0^k \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) [R(\xi)]^2 d\xi \right] d\tau.$$

Обозначим через

$$b_0 = \int_0^k \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) R^2(\xi) d\xi; \quad \vartheta^2 = \frac{1}{b_0} \int_0^k f(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi;$$

$$b_2 = \frac{1}{\vartheta^2 b_0} \int_0^k f_1(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^4 d\xi; \quad b = \frac{1}{b_0} \int_0^k \left[r(\xi) \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) \int_0^\xi \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^2 d\xi \right] d\xi. \tag{1.17}$$

Тогда для F_1 получим следующий интеграл

$$F_1 = \frac{\rho_0 F_0 l b_0}{2kp} \int_0^{2\pi} \left[\vartheta^2 \alpha^2 q^2 \left(1 + \frac{1}{6} \lambda b_2 q^2 \right) + b \eta_1 \omega^2 q^2 - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \right] d\tau. \tag{1.18}$$

По принципу Гамильтона-Остроградского для неконсервативной системы сил при изохронной вариации из формул (1.1) и (1.18) получим

$$\delta F_1 = \int_0^{2\pi} \delta L \, d\tau = 0,$$

где

$$L = \vartheta^2 \alpha^2 q^2 + \frac{\vartheta^2 \alpha^2 \lambda^2 b_2}{6} q^4 + b \eta_1 \omega^2 q^2 - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2.$$

Отсюда, для действительного движения вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа запишется в виде:

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}+\frac{\vartheta^2\alpha^2}{p^2}\left(q+\frac{b\eta_1\omega^2}{\vartheta^2\alpha^2}q+\frac{1}{3}\lambda b_2 q^3\right)=0.$$

Если положить, что

$$p_1^2=\frac{\vartheta^2\alpha^2}{p^2};\qquad \omega_1^2=\frac{b\eta_1\omega^2}{\nu^2\alpha^2};\qquad \lambda_1=\frac{1}{3}\lambda b_2, \tag{1.19}$$

то из предыдущего соотношения будем иметь

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}+p_1^2(q+\omega_1^2q+\lambda_1q^3)=0. \tag{1.20}$$

Соотношение (1.20) описывает свободные колебания системы с нелинейной восстанавливающей силой.

Интегрируя уравнение (1.20) от начального положения Q до q, где Q—наибольшая амплитуда колебания системы, получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2=p_1^2\int\limits_q^Q(q+\omega_1^2q+\lambda_1q^3)\,dq. \tag{1.21}$$

Отсюда, после несложных преобразований, получим следующее дифференциальное уравнение в безразмерных переменных

$$\left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^2=p_1^2(1-\psi^2)\left(1+\omega_1^2+\frac{\lambda_1Q^2}{2}+\frac{\lambda_1Q^2}{2}\psi^2\right), \tag{1.22}$$

где $\psi=\frac{q}{Q}\leqslant 1$—безразмерная амплитуда.

Разделяя переменные в уравнении (1.22) и интегрируя по q в пределах от нуля до ψ, получим эллиптический интеграл в виде

$$\tau=\frac{1}{p_1}\int\limits_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\psi^2)\left(1+\omega_1^2+\frac{\lambda_1Q^2}{2}+\frac{\lambda_1Q^2}{2}\psi^2\right)}}. \tag{1.23}$$

Для удобства пользования таблицами эллиптических интегралов представим интеграл (1.23) в тригонометрической форме. Для этого положим

$$\psi=\sin\theta;\qquad -\chi=\frac{\lambda_1Q^2}{2+2\omega_1^2+\lambda_1Q^2}\leqslant -1, \tag{1.24}$$

где χ—модуль эллиптического интеграла и $\lambda_1<0$.

Следовательно, уравнение (1.23) принимает вид

$$\tau=\frac{\sqrt{2}}{p_1\sqrt{2+2\omega_1^2+\lambda_1^2Q^2}}\int\limits_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\chi^2\sin^2\theta}}. \tag{1.25}$$

Так как период колебаний должен иметь значение $\frac{\pi}{2}$, то при $\lambda_1 < 0$ из формулы (1.25) следует соотношение

$$2\pi = \frac{-4\sqrt{2}K(\chi)}{p_1\sqrt{2+2\omega_1^2+\lambda_1^2 Q^2}},$$

где

$$K(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\chi^2\sin^2\theta}}$$

полный эллиптический интеграл первого рода. Отсюда следует, что

$$p_1 = \frac{2\sqrt{2}K(\chi)}{\pi\sqrt{2+2\omega_1^2+\lambda_1^2 Q^2}}.$$

Или, переходя к размерным величинам по формулам (1.19), для частоты колебания будем иметь

$$p = \frac{\pi\vartheta\alpha}{2K(\chi)}\sqrt{1+\frac{b\eta_1\omega^2}{\vartheta^2\alpha^2}+\frac{1}{6}\lambda b_2 Q^2}, \tag{1.26}$$

где

$$\lambda < 0$$

$$-\chi = \frac{\lambda b_2 Q^2}{6+6\frac{q\eta_1\omega^2}{\vartheta^2\alpha^2}+\lambda b_2 Q^2} < -1.$$

Из соотношения (1.26) видно, что частота колебания зависит от амплитуды. С увеличением амплитуды частота колебания уменьшается вследствие увеличения функции $K(\chi)$ и уменьшения подкоренного выражения.

§ 2. Вывод расчетной формулы

Эллиптический интеграл (1.25) есть функция верхнего предела Q. Обратная функция от τ называется эллиптической функцией Якоби и определяется формулой

$$\psi = \operatorname{sn}\tau.$$

Подставляя сюда значение безразмерной амплитуды ψ, будем иметь

$$q = Q\operatorname{sn}\tau. \tag{2.1}$$

На основании (2.1), соотношений (1.12) и (1.14), уравнение упругой линии при нелинейном колебании примет вид:

$$\eta(\xi,\tau) = Q\left[U(\xi) - \frac{S(k)}{T(k)}V(\xi)\right]\operatorname{sn}\tau, \tag{2.2}$$

где попрежнему

$$\xi = \frac{kx}{l}; \qquad \tau = pt.$$

В формулах (1.26) и (2.2) амплитуда колебания заранее нам не известна, но ее можно определить из условия максимального изгибающего момента и допускаемого или расчетного напряжения при изгибе. Максимальный изгибающий момент можно определить, с одной стороны из, формулы

$$\max M = \left| EJ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{\max}, \tag{2.3}$$

а, с другой стороны, легко показать, что наибольший изгибающий момент возникает в корневом сечении стержня и определяется условием

$$\max M = \sigma_g W_0, \tag{2.4}$$

где W_0—момент сопротивления корневого сечения стержня.

Вычислим теперь максимальное значение изгибающего момента. Из разложения эллиптической функции Якоби [7] следует, что

$$\operatorname{sn} \tau \sim \sin \tau \left(1 + 4e^{-\pi x} \cos^2 \tau\right). \tag{2.5}$$

Отсюда

$$|\operatorname{sn} \tau|_{\max} = |\sin \tau|_{\max} = 1.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = Q \frac{k^2}{l^2} \frac{d^2 R}{d\xi^2} \operatorname{sn} \tau, \tag{2.6}$$

то из формулы (1.14) и (2.2) следует, что

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} = \left[\frac{d^2 U}{d\xi^2} - \frac{S(k)}{T(k)} \frac{d^2 V}{d\xi^2} \right].$$

По определению функции А. Н. Крылова и из соотношения (1.15) следует, что

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} = S(k) \left[\frac{S(\xi)}{S(k)} - \frac{T(\xi)}{T(k)} \right].$$

Отсюда видно, что правая часть имеет максимум при $\xi = 0$. Поэтому

$$\left| \frac{d^2 R}{d\xi^2} \right|_{\max} = 1. \tag{2.7}$$

Следовательно, комбинируя (2.5), (2.6) и (2.7) с соотношением (2.3), найдем

$$M_{\max} = \frac{EJQk^2}{l^2}. \tag{2.8}$$

Решая совместно уравнения (2.4) и (2.8), получим

$$Q = \frac{\sigma_g W_0}{EJ_0} \frac{l^2}{k^2}. \tag{2.9}$$

Таково значение амплитуды в зависимости от допускаемого или расчетного напряжения. Вычисляя коэффициент $\frac{\lambda}{6} b_2 Q^2$ по условию (2.9), получим:

$$\frac{\lambda b_2}{6} Q^2 = \frac{1}{27} \frac{J}{J_0} \frac{E}{G} b_2 \left(\frac{\sigma_g W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma,$$

где $\gamma < 0$. Подставляя это соотношение и значения α, η_1 из (1.11) в уравнение (1.26), найдем расчетные формулы для определения частоты при свободном колебании стержня

$$p = \frac{\pi \vartheta}{2K(\chi)} \frac{k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_0}{\rho_0 \cdot F_0}} \sqrt{1 + \frac{bl^3}{\vartheta^2 k^3} \frac{\rho_0 F_0}{EJ_0} r_0 \omega^2 + \frac{1}{27} \frac{EJ}{GJ_0} b_2 \left(\frac{\sigma_g W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma}, \tag{2.10}$$

$$-\chi^2 = \frac{\frac{1}{27} \frac{J}{J_0} \frac{Eb_2}{G} \left(\frac{\sigma_g W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma}{1 + \frac{bl^3 \rho_0 F_0 r_0}{\vartheta^2 k^2 EJ_0} \omega^2 + \frac{1}{27} \frac{JEb_2}{J_0 G} \left(\frac{\sigma_g W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma}.$$

Величины b_2, ϑ, b определяются из выражения (1.17), значения корня k берутся из уравнения (1.16).

§ 3. Сравнение величин собственных частот колебаний стержней при линейной и нелинейной теориях деформации

Величина собственных частот колебания стержней сильно зависит от температуры окружающей их среды. Как известно, изменение величины собственных колебаний от температуры определяется изменением упругих постоянных.

На фиг. 2 приведены графики упругих постоянных и коэффициента интенсивности касательных напряжений для стали в зависимости от температуры.

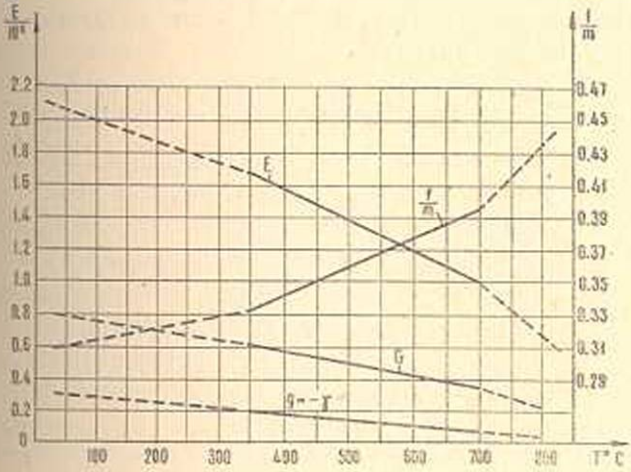
Частота собственных колебаний стержней трапецеидального и прямоугольного сечений (фиг. 3) подсчитана по формуле (2.10), в которую, помимо упругих постоянных и других известных величин (момент инерции, площадь и т. д.), входят величины b, b_2, ϑ, значения которых, для указанных сечений стержней приведены в таблице.

Для других поперечных сечений стержней значения b, b_2, ϑ легко определяются интегралами от функции А. Н. Крылова [6], которые должны быть умножены на соответствующие постоянные, определяемые формулами (1.8).

Интегралы от функции А. Н. Крылова были вычислены численно методом Гаусса [8]. Ниже приводим значения указанных выше интегралов в пределах от нуля до $k = 1.875$

$$\int_0^k [R(\xi)]^2 d\xi = 0,46870; \qquad \int_0^k \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^4 d\xi = 0,27693;$$

$$\int_0^k \xi [R(\xi)]^2 d\xi = 0{,}70873; \qquad \int_0^k \xi \left(\frac{d^2R}{d\xi^2}\right)^4 d\xi = 0{,}06413;$$



Фиг. 2.

Фиг. 3. Поперечное сечение стержней.

Таблица

Значения интегралов для стержней

№ п.п.	μ	β	β_1	l мм	$b_0=\int_0^k \varphi(\xi)\varphi_1(\xi)R^2(\xi)d\xi$	$\vartheta^2=\frac{1}{b_0}\int_0^k f(\xi)\left(\frac{d^2R}{d\xi^2}\right)^2 d\xi$	$b_2=\frac{1}{\vartheta^2 b_0}\int_0^k f_1\left(\frac{d^2R}{d\xi^2}\right)^4 d\xi$	$b=\frac{1}{b_0}\int_0^k \xi\varphi(\xi)\int_0^\xi (R')^2 d\xi$
1	0.867	0.930	0.9955	100	0.21659	1.78662	0.62631	7.41797
2	0.667	0.930	0.9955	50	0.21659	1.78662	0.62631	4.14446
3	0.000	0.000	0.0000	50	0.46870	1.00000	0.59084	2.42419
4	0.000	0.000	0.0000	100	0.46870	1.00000	0.59084	4.01242

$$\int_0^k \xi^2 [R(\xi)]^2 d\xi = 1{,}11145; \qquad \int_0^k \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 d\xi = 0{,}39182;$$

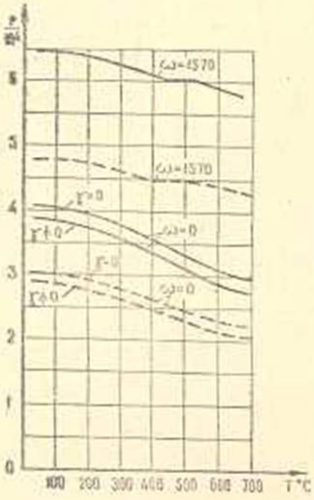
$$\int_0^k \left(\frac{d^2R}{d\xi^2}\right)^2 d\xi = 0{,}47125; \qquad \int_0^k \xi \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 d\xi = 0{,}55839;$$

$$\int_0^k \xi \left(\frac{d^2R}{d\xi^2}\right)^2 d\xi = 0{,}17020; \qquad \int_0^k \xi^2 \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 d\xi = 0{,}84278;$$

$$\int_0^k \xi^3 \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 d\xi = 1{,}31484.$$

На фиг. 4 приведены графики собственных частот колебаний стержней трапецеидального и прямоугольного сечений, из которых видно, что частота собственных колебаний стержней уменьшается с увеличением температуры примерно на 20 и более процентов.

При нелинейном законе деформации стержней частота их собственных колебаний уменьшается по сравнению с линейной деформацией примерно на 6—12%. Влияние нелинейности на уменьшение собственной частоты колебаний стержней тем больше, чем меньше центробежные силы. Центробежные силы, как например, в лопатках турбин, увеличивают их жесткость и сильно повышают частоту собственных колебаний лопаток, что видно из кривых (фиг. 4).



Фиг. 4.
— Трапецеидальное сечение стержня.
---Прямоугольное сечение стержня.

Отметим, что приведенное нами решение, полученное для стержня с заделанным концом, можно распространить и на более сложный случай, как например, на лопатки турбин.

Приведенное решение дает возможность учесть влияние на частоту собственных колебаний различных технологических факторов изготовления стержней (лопаток турбин), как например, влияние изменения момента инерции в зависимости от неточности размеров их толщины.

Запорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 16 IV 1962

Ա. Շ. Ասատուրյան, Պ. Մ. Կիչաև

ՁՈՂԵՐԻ ՇԵՂ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում հետազոտվում են փոփոխական լայնական հատվածքով պրիզմայաձև ձողերի ազատ, ոչ գծային շեղ տատանումները կենտրոնախույս ուժերի դաշտում: Առաջին մոտարկման մեջ արհամարհում ենք տուրբինային թիակների ոլորվածությունը, որովհետև այն քիչ է ազդում տատանման հիմնական հաճախականության վրա: Ոչ գծային տատանումների հաշվարկման ժամանակ թիակները նմանացվում են որպես փոփոխական հատվածքի չոլորված կոնսոլային հեծաններ:

Դեֆորմացիայի ոչ գծային օրենքի դեպքում թելի σ_x լարման և ε_x համապատասխան երկարացման միջև եղած կապը որոշվում է ձգման ու սեղման էքսպերիմենտներից: Այդ հիմնական կապը որոշվում է դեֆորմացիայի ընդհանրացված ոչ գծային հետևյալ տեսքի օրենքով՝

$$\sigma_x = E(1 - aE^2\varepsilon_x^2)\,\varepsilon_x,$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(1 + a\sigma_x^2)\,\sigma_x,$$

որտեղ E-ն առաձգականության մոդուլն է, a-ն մի փոփոխական է, որը որոշվում է

$$a = -\frac{2}{27}\frac{E\gamma}{G^3}$$

հարաբերակցությունից:

G-ն սահքի մոդուլն է կգ/սմ²-ով, γ-ն շոշափող լարումների ինտենսիվությունն է:

Առաձգական սիստեմի ոչ գծային տատանման հետազոտության համար կիրառվում է Համիլտոն-Օստրոգրադսկու վարիացիոն սկզբունքը. ընդունվում է առաձգական գծի հավասարումը, տրվում է հաճախականությունների բաշխման օրենքը հետևյալ տեսքով՝

$$p = \Phi(\omega, Q)$$

որտեղ ω-ն անկյունային արագությունն է, Q-ն սկզբնական ամպլիտուդն է:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Релей Д. В.* Теория звука, т. I. Гостехиздат, 1955.
2. *Крылов А. Н.* Избранные труды. Изд. АН СССР, Л., 1958.
3. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
4. *Пономарев С. Д.* и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III, Машгиз, М., 1959.
5. *Каудерер.* Нелинейная механика. ИЛ, М., 1961.
6. *Крылов А. Н.* Об определении критических скоростей вращающегося вала. Изд. АН СССР, 1936.
7. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат 1949.
8. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, М., 1954.