

Г. Л. Луиц

О сверхсходимости некоторых рядов

Статья посвящена обобщению на ряды Тейлора-Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} \quad (1)$$

и ряды Дирихле с комплексными показателями известных теорем Островского о пропусках (см. [1], [2]).

§ 1. О сходимости ряда Тейлора-Дирихле

Ниже, в §§ 2, 3, 4 всюду предполагается, что $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$, m_n — действительные неотрицательные числа (если m_n нецелые, то ряд (1) рассматривается на логарифмической римановой поверхности или на плоскости с соответствующим разрезом) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \quad (1.1)$$

Автором было доказано (см. [5]), что в этих предположениях ряд (1) сходится абсолютно в областях $|z| \geq 1$, $|z| < e^{\rho_1(x-k)}$ и $|z| \leq 1$, $|z| < e^{\rho_2(x-k)}$ и расходится в областях $|z| \geq 1$, $|z| > e^{\rho_1(x-k)}$ и $|z| \leq 1$, $|z| > e^{\rho_2(x-k)}$, где

$$k = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}, \quad \rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n}, \quad \rho_2 = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\lambda_n}{m_n}.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \infty$, то ряд сходится абсолютно в полуплоскости $x > k$ и расходится в полуплоскости $x < k$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = 0$, а $k \neq \pm \infty$, то ряд сходится абсолютно в круге $|z| < 1$ и расходится вне этого круга*.

* Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = 0$, а $k = \pm \infty$, то из равенства

$$a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} = a_n r^{m_n} \left(\frac{z}{r} \right)^{m_n} e^{-r \lambda_n \left(\frac{z}{r} \right)}$$

с помощью замены $\frac{z}{r} = \xi$ приходим к выводу, что если существует такое $r > 0$, что

Было также доказано, что если выполнено условие (1.1), то открытая область сходимости ряда совпадает с открытой областью абсолютной сходимости (то есть, что ряд расходится во всех точках, внешних по отношению к области абсолютной сходимости).

Рассмотрим теперь множество M предельных точек последовательности $\left\{ \frac{\lambda_n}{m_n} \right\}$ и определим для каждого конечного $\rho \in M$ число

$$k(\rho) = \lim_{z \rightarrow 0} k(\rho, z), \text{ где } k(\rho, z) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{n_p}|}{\lambda_{n_p}}, \text{ а } |n_p| \text{ — последовательность}$$

всех натуральных чисел, для которых $\frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}} \in [\rho - z, \rho + z]$. Пред-

положив, что величина $k(\rho, z)$ ограничена сверху, докажем, что, если множество M ограничено, ряд (1) сходится абсолютно на множестве G , точки которого при любом $\rho \in M$ удовлетворяют неравенству

$$|z| < e^{z[x - k(\rho)]} \quad (1.2)$$

и расходится в точках, внешних по отношению к этому множеству (условие (1.1) предполагается выполненным). Можно при этом вместо множества M взять наименьший отрезок, на котором расположено это множество, и для точек ρ этого отрезка, не принадлежащих множеству M , считать, что $k(\rho) = -\infty$.

Действительно, предположим, что в какой-либо точке $|z| > e^{z[x - k(\rho)]}$ при некотором $\rho \in M$; тогда, в силу ограниченности величины $|x - k(\rho, z)|$ и определения $k(\rho)$, существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$|z| > e^{(p+\varepsilon)[x - k(\rho, z)]}, \quad |z| > e^{(p-\varepsilon)[x - k(\rho, z)]},$$

но отсюда следует расходимость ряда $\sum_{p=1}^{\infty} \left| a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z} \right|$, где $\rho - \varepsilon <$

$< \frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}} \leq \rho + \varepsilon$, так как очевидно, что

$$\rho + \varepsilon \geq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}}, \quad \rho - \varepsilon \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}}.$$

Тем более, ввиду того, что выполнено условие (1.1), расходится ряд (1).

Если же в некоторой точке $|z| < e^{z[x - k(\rho)]}$ при всех $\rho \in M$, а мно-

$$k' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln |a_n|}{r \lambda_n} + \frac{m_n \ln r}{r \lambda_n} \right) \neq \pm \infty,$$

то ряд сходится абсолютно в круге $|z| < r$ и расходится вне этого круга; если $k' = -\infty$ при любом $r > 0$, то ряд сходится абсолютно во всей плоскости, если же $k' = +\infty$ при всяком $r > 0$, то ряд расходится во всей плоскости (кроме, быть может, точки $z=0$).

жество M лежит на отрезке $[a, b]$, то, выбрав сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, разобьем отрезок $[a - \delta, b + \delta]$, где δ — какое-либо положительное число, на отрезки длины ε . На каждом из этих отрезков

$M_i = \left[p_i - \frac{\varepsilon}{2}, p_i + \frac{\varepsilon}{2} \right]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) найдется по крайней мере

одна точка $p = p_i^*$, в которой $k(p_i^*) = k\left(p_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. В самом деле: обо-

значим $k\left(p_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) = k(M_i)$ и разобьем отрезок M_i на два равных по

длине отрезка $M_i^{(1)}$ и $M_i^{(2)}$, тогда по крайней мере для одного из этих отрезков $k(M_i^{(q)}) = k(M_i)$ ($q = 1, 2$). Продолжая рассуждения, мы придем к заключению, что существует такая точка $p = p_i^* \in M_i$, что, каков бы ни был отрезок $I \subset M_i$, для которого эта точка — внутренняя, $k(I) = k(M_i)$; но отсюда $k(p_i^*) = k(M_i)$. Таким образом, в

данной точке z имеем $|z| < \varepsilon$ и, следовательно, если ε достаточно мало, то для всех i ($i = 1, 2, \dots, N$) ввиду ограниченности $|x - k(p, \alpha)|$, также

$$|z| < \varepsilon, \quad |z| < \varepsilon, \quad (1.3)$$

Если $\{n_p^{(i)}\}$ — последовательность всех натуральных чисел, для которых $\frac{\lambda_{n_p^{(i)}}}{m_{n_p^{(i)}}} \in M_i$, то нижний предел последовательности $\left\{ \frac{\lambda_{n_p^{(i)}}}{m_{n_p^{(i)}}} \right\}$ не

меньше, чем $p_i - \frac{\varepsilon}{2}$, а верхний не больше, чем $p_i + \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, из неравенств (1.3) следует, в соответствии с доказанным в [5], абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p^{(i)}} z^{m_{n_p^{(i)}}} e^{-\lambda_{n_p^{(i)}} z}$$

при любом i ($i = 1, 2, \dots, N$), а, следовательно, и абсолютная сходимость ряда (1). Нетрудно также видеть, что во всякой конечной области, принадлежащей множеству G , определенному неравенством (1.2), ряд (1) сходится равномерно.

В случае, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \infty$, возьмем любое $r > 0$ и положим $k_r = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{n_p}|}{\lambda_{n_p}}$, где последовательность $\{n_p\}$ такова, что $\frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}} \geq r$. Тогда (если, конечно, $k_r \neq +\infty$) очевидно, что ряд (1) сходится абсолютно на множестве G_r , точки которого удовлетворяют неравенству

(1.2) при $\rho \leq r$ и лежат в полуплоскости $x > k_r$. Очевидно, что с ростом r множество G_r расширяется и $G = \bigcup G_r$. Таким образом, в этом случае множество, на котором ряд (1) сходится абсолютно и во внешних точках которого он расходится, состоит из точек, удовлетворяющих неравенству (1.2) при любом конечном ρ и, кроме того, неравенству $x > k_\infty$, где $k_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} k_r$.

Заметим, наконец, что, если числа $m_n = \mu_n + i\nu_n$ — комплексные

($\mu_n \geq 0$), то $|z^{m_n}| = |z|^{\mu_n} e^{-\nu_n \text{Arg } z}$ и поэтому на луче $\text{Arg } z = \varphi$ ($-\infty < \varphi < \infty$) абсолютная сходимость ряда (1) эквивалентна абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{\mu_n} e^{-\nu_n \varphi}$, где $A_n = a_n e^{-\nu_n \varphi}$. Если теперь вме-

сто характеристик $k(\rho, z)$ и $k(\rho)$ ввести соответствующие характеристики $k^{(\varphi)}(\rho, z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{n_\rho}| - \nu_{n_\rho} \varphi}{\lambda_{n_\rho}}$ и $k^{(\varphi)}(\rho) = \lim_{z \rightarrow 0} k^{(\varphi)}(\rho, z)$, где по-

следовательность $\{n_\rho\}$ та же, что и в определении $k(\rho, z)$, то можно утверждать, что ряд (1) сходится абсолютно в точках множества $A^{(\varphi)}$ луча $\text{Arg } z = \varphi$ (на логарифмической римановой поверхности), для которых при любом $\rho \in M$

$$|z| < e^{\rho(x - k^{(\varphi)}(\rho))}. \quad (1.4)$$

и расходится в точках луча $\text{Arg } z = \varphi$, внешних по отношению к $A^{(\varphi)}$. Таким образом, в этом случае $G = \bigcup A^{(\varphi)}$, где $A^{(\varphi)}$ определяется неравенством (1.4). Если числа λ_n также комплексные, то для определения области сходимости ряда (1) можно воспользоваться методом, примененным автором к рядам Дирихле с комплексными показателями (см. [3]).

§ 2. Некоторые неравенства

Будем дальше предполагать, что множество M предельных точек последовательности $\left\{ \frac{\lambda_n}{m_n} \right\}$ не содержит точки $\rho = 0$ (следовательно, так как оно замкнуто, и некоторой окрестности этой точки). Обозначим через $\Gamma(M)$ множество всех кривых $|z| = e^{\rho(x - k(\rho))}$ для $\rho \in M$ и через Γ_ρ семейство кривых $|z| = e^{\rho(x - k)}$ при фиксированном ρ и переменном k .

Через каждую точку z_0 проходит (при фиксированном ρ) определенная кривая из Γ_ρ , соответствующая некоторому значению $k = k_\rho(z_0)$. Уравнение проходящей через точку $z_0 = x_0 + iy_0$ ($y_0 > 0$) кривой из Γ_ρ может быть записано в виде

$$|z| = |z_0| e^{\rho(x - x_0)},$$

откуда $k = k_p(z_0) = x_0 - \frac{\ln |z_0|}{\rho}$ или (для $y > 0$) $y = \sqrt{|z_0|^2 e^{2\rho(x-x_0)} - x^2}$,

откуда $y' = \frac{|z_0|^2 \rho e^{2\rho(x-x_0)} - x}{\sqrt{|z_0|^2 e^{2\rho(x-x_0)} - x^2}}$ и при $x = x_0$ имеем

$$y' = y'_0 = \frac{\rho |z_0|^2 - x_0}{y_0}. \quad (2.1)$$

Таким образом, ρ и k — непрерывные функции от $z_0 = x_0 + iy_0$ и y'_0 .

Предположим теперь, что $z_0 \neq \frac{1}{\rho}$ — граничная точка области сходимости G ряда (1), причем в этой точке существует касательная к границе с угловым коэффициентом $y'_0 \neq \infty$ и круг K с той же касательной, лежащий внутри G^* . Если обозначить через ρ_0 значение ρ , определяемое из (2.1), то можно утверждать, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такая окрестность U_ε точки z_0 , что для всех кривых из $\Gamma(M)$, проходящих через точки этой окрестности, $|\rho - \rho_0| < \varepsilon$. В самом деле, допустив противное, мы пришли бы к выводу, что существует такое $\alpha > 0$, что в любой окрестности точки z_0 пройдет кривая из семейства $\Gamma(M)$, для которой $|\rho - \rho_0| > \alpha$. Но тогда в любой окрестности точки z_0 найдутся точки $z = x + iy$, в которых $|y' - y'_0| > \delta > 0$, где y' соответствует кривой из $\Gamma(M)$, а δ не зависит от окрестности. Но в этом случае соответствующая кривая из $\Gamma(M)$ должна пересечь границу круга K , что противоречит предположению о том, что этот круг находится внутри G .

Рассмотрим теперь семейство Γ_p . Если $|z| = e^{\rho(x-k)}$, то $k = x - \frac{1}{\rho} \ln |z|$, откуда

$$|\text{grad } k| = \sqrt{\left[1 - \frac{x}{\rho(x^2 + y^2)}\right]^2 + \frac{1}{\rho^2} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{\sqrt{\left(x - \frac{1}{\rho}\right)^2 + y^2}}{|z|}. \quad (2.2)$$

Пусть γ — кривая из Γ_p с уравнением $|z| = e^{\rho(x-k_0)}$, а $k_p(z')$ — значение параметра k для кривой, проходящей через точку z' и принадлежащей Γ_p . Величину $\Delta_p k(z'; \gamma) = k_p(z') - k_0$ будем называть ρ — расстоянием точки z' от кривой γ . Из (2.2) следует, что

$$\Delta_p k(z'; \gamma) = \int_l \lambda_p(z) ds, \quad (2.3)$$

* Легко показать, что если $z_0 = \frac{1}{\rho}$, то это требование не может быть выполнено и поэтому условие $z_0 \neq \frac{1}{\rho}$ не вносит дополнительных ограничений.

где $\lambda_p(z) = \frac{1}{|z|} \sqrt{\left(x - \frac{1}{p}\right)^2 + y^2}$, а l — дуга кривой $\arg z - py = \arg z' -$

$-py'$ (ортогональной к семейству Γ_p) между точкой z' и точкой пересечения этой кривой с γ (на этой дуге следует считать $ds < 0$, если $|z'| > e^{z(x'-k)}$ и $ds > 0$, если $|z'| < e^{z(x'-k)}$, $z' = x' + iy'$). Обозначим через L_p семейство кривых $\arg z - py = C$ при фиксированном p . Построим круг $K_r \subset K$ радиуса r , касающийся в точке z_0 границы области G и лежащий в U_+ , а также круги $K_{r-\eta}$, $K_{r+\eta}$ с теми же центрами, что круг K_r и радиусами, соответственно равными $r-\eta$ и $r+\eta$ ($0 < \eta < r$). Очевидно, что r можно взять столь малым, чтобы длина любой дуги, соединяющей точку z , лежащую в $K_{r-\eta}$, с точкой, лежащей вне U_+ , была больше, чем A_r , как бы велико ни было A . Так как, с другой стороны, $z_0 \neq \frac{1}{p}$ и, следовательно, функ-

ция $\lambda_p(z)$ в некоторой окрестности точки z_0 ограничена снизу, то на основании (2.3) можно утверждать, что, если r достаточно мало, $z \in K_{r-\eta}$ и проходящая через точку z кривая $l \in L_p$ пересекается с соответствующей кривой $\gamma \in \Gamma(M)$, $\gamma \in \Gamma_p$ вне U_+ , (см. фиг. 1), то p — расстояние точки z от γ удовлетворяет неравенству

$$\Delta_p k(z; \gamma) > Br$$

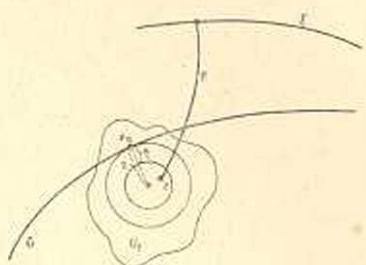
как бы велико ни было число B . Если учесть кроме того, что $\lambda_p(z)$ есть непрерывная функция от p , то из (2.3) заключаем также, что если $z \in K_{r-\eta}$ и l пересекается с γ в U_+ , то, как бы мало ни было $\mu > 0$ при достаточно малых r и ε

$$\Delta_p k(z; \gamma) > (1 - \mu) \lambda_{p_0}(z_0) \eta \quad (2.4)$$

(длина дуги l не может быть меньше η , так как в противном случае кривая γ пересекала бы окружность круга $K_{r-\eta}$, что невозможно). Итак, можно утверждать, что, как бы мало ни было $\mu > 0$, неравенство (2.4) имеет место для $z \in K_{r-\eta}$ и любой кривой $\gamma \in \Gamma(M)$, если только r достаточно мало.

Если $z \in K_{r+\eta}$ и z находится внутри области сходимости G ряда (1), то $\Delta_p k(z; \gamma) > 0$, какова бы ни была кривая $\gamma \in \Gamma(M)$. Если же $z \in K_{r+\eta}$ и z не находится внутри G , то расстояние точки z от тех кривых $\gamma \in \Gamma(M)$, для которых $\Delta_p k(z; \gamma) < 0$ не может быть больше, чем η и поэтому рассуждения, аналогичные только что приведенным, приводят к выводу, что, как бы мало ни было число $\mu > 0$, при достаточно малом r для $z \in K_{r+\eta}$ и любой кривой $\gamma \in \Gamma(M)$ имеет место неравенство

$$-\Delta_p k(z; \gamma) < (1 + \mu) \lambda_{p_0}(z_0) \eta. \quad (2.5)$$



Фиг. 1.

ПА-250

§ 3. Оценки частной суммы и остатка ряда Тейлора-Дирихле

Пусть множество M предельных точек последовательности $\left\{ \frac{\lambda_n}{m_n} \right\}$ находится на отрезке $[a, b]$ ($a > 0$). Возьмем какое-либо $\delta > 0$ так, чтобы $a - \delta > 0$ и разобьем отрезок $[a - \delta, b + \delta]$ на q равных по длине отрезков M_j , причем нумерацию установим следующей. Обозначим через M_k тот из отрезков M_j , в который попадет точка $\frac{\lambda_k}{m_k}$ (предполагается, что члены ряда (1), для которых это отношение не принадлежит отрезку $[a - \delta, b + \delta]$ отброшены); если точка $\frac{\lambda_k}{m_k}$ принадлежит одновременно двум различным отрезкам M_j , то отнесем ее, например, к правому. При такой нумерации, конечно, для бесконечного множества индексов $M_l \equiv M_k$ при $j \neq k$. Обозначив далее (см. стр. 13) $k(M_l) = k_l$, повторив рассуждения со стр. 13 и учитывая определение величин $k(p, \alpha)$ и $k(p)$, мы придем к выводу, что, как бы мало ни было $\omega > 0$, можно подобрать столь большое число N , что при $n > N$ для всех $\frac{\lambda_n}{m_n}$ из отрезка M_j будет иметь место неравенство $|a_n| < e^{(k_n + \omega)\lambda_n}$ ($k_n = k_j$ для всех этих индексов n), а так как различных отрезков M_j лишь конечное число, то существует такое число N_0 , что неравенство

$$|a_n| < e^{(k_n + \omega)\lambda_n} \quad (3.1)$$

имеет место при всех $n > N_0$.

Обозначим, наконец, через ρ_i^* то значение ρ из отрезка M_i , для которого $k(\rho_i^*) = k_i$ (если в каком-либо отрезке $k(M_i) = -\infty$, то ρ_i^* в этом отрезке можно брать произвольно); тогда, взяв достаточно большое q , будем иметь

$$\rho_i^* - \varepsilon < \frac{\lambda_i}{m_i} < \rho_i^* + \varepsilon, \quad (3.2)$$

как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, для всех i .

Рассмотрим какую-либо конечную область D , во всех точках z которой при любом $\rho \in M$ имеет место неравенство

$$|z| < e^{\rho(x - k(\rho) - \beta)},$$

где β — некоторое положительное число (область D лежит, конечно, внутри области сходимости G) и, следовательно, тем более

$$|z| < e^{\rho_i^*(x - k_i - \beta)} \quad (3.3)$$

при любом i ($i = 1, 2, \dots$). Пользуясь (3.2) и (3.3), получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в той части области D , где $x - k_i - \beta \leq 0$

$$\left| \frac{(k_i + \varepsilon)\lambda_i}{z} \frac{m_i}{e} - \frac{\lambda_i}{z} \right| < e^{\frac{(k_i + \varepsilon)\lambda_i}{e}} \frac{m_i \rho_i^*(x - k_i - \beta) - \lambda_i}{e} <$$

$$\begin{aligned} & < e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} \frac{\lambda_i}{e} \left[\frac{\rho_i^*}{\rho_i^* + \varepsilon} (x - k_i - \beta) - x \right] = \\ & = e^{\lambda_i[k_i + \varepsilon + (1 - \varepsilon')(x - k_i - \beta) - x]} = e^{-\lambda_i(\beta - \varepsilon_1)}, \end{aligned}$$

как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$. Если $x - k_i - \beta > 0$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получим также

$$\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} e^{\lambda_i \left[\frac{\rho_i^*}{\rho_i^* + \varepsilon} (x - k_i - \beta) - x \right]} < e^{-\lambda_i(\beta - \varepsilon_1)}.$$

Таким образом, при достаточно малом ε , как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$,

$\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{-\lambda_i(\beta - \varepsilon_1)}$ во всех точках области D и если при этом $n + 1 \leq i$, то тем более $\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{-\lambda_{n+1}(\beta - \varepsilon_1)}$.

С другой стороны, из (3.1) следует, что $|a_i| < e^{\left(k_i + \frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda_i}$ при достаточно большом i и поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| e^{-(k_i + \varepsilon)\lambda_i}$ сходится, так

как $\ln n = o(\lambda_n)$. Таким образом, $\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| e^{-(k_i + \varepsilon)\lambda_i} < C$, где C не зависит от n , а так как

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[a_i e^{-(k_i + \varepsilon)\lambda_i} e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right],$$

то заключаем, что к любому положительному числу δ можно подобрать такое $N(\delta)$, что при $n > N(\delta)$ во всех точках области D имеет место неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{-\lambda_{n+1}(\beta - \delta)}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим теперь конечную область D' , во всех точках которой

$$|z| < e^{\rho(x - k(\rho) + \beta)}$$

для всякого $\rho \in M$ ($\beta > 0$). Эта область не лежит уже внутри G . Повторяя выкладки, аналогичные только что проведенным, мы придем к заключению, что, как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в области D' будет справедлива оценка

$$\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{\lambda_i(\beta + \varepsilon_1)},$$

а при $n \geq i$ тем более

$$\left| e^{(k_l + \varepsilon)\lambda_l} z^{m_l} e^{-\lambda_l z} \right| < e^{\lambda_n(\beta + \varepsilon_1)}.$$

Но с другой стороны, ряд $\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| e^{-(k_l + \varepsilon)\lambda_l}$ сходится, поэтому для любого $\varepsilon_2 > 0$ при достаточно большом i_0 и любом $n > i_0$ будет иметь место неравенство $\sum_{l=i_0}^n |a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z}| < e^{\lambda_n(\beta + \varepsilon_2)}$. Так как, наконец, сум-

ма $\sum_{l=1}^{i_0-1} |a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z}|$ в области D' ограничена, то для любого $\delta > 0$ найдется такое $N(\delta)$, что при $n > N(\delta)$ во всех точках области D' будет справедлива оценка

$$\sum_{l=1}^n |a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z}| < e^{\lambda_n(\beta + \delta)}. \quad (3.5)$$

§ 4. Сверхсходимость ряда Тейлора-Дирихле

Теорема 1. Если в точке z_0 границы области сходимости G ряда (1) существует касательная к границе и круг K с той же касательной, лежащий внутри G , если функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}$$

аналитична в точке z_0 и если существует такая бесконечная последовательность индексов $\{n_\nu\}$, что $\lambda_{n_\nu+1} > (1 + \vartheta)\lambda_{n_\nu}$, где $\vartheta > 0$ (ϑ не зависит от ν), то последовательность

$$\left\{ \sum_{l=1}^{n_\nu} a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z} \right\}$$

сходится в некоторой окрестности точки z_0 .

Доказательство. Построим окрестность U точки z_0 , в которой функция $f(z)$ аналитична. Построим, далее, лежащие в U круги $K_r, K_{r-\eta}, K_{r+\sigma}, K_{r+\eta}$ с общим центром, радиусами $r, r-\eta, r+\sigma, r+\eta$, причем круг K_r касается границы области G в точке z_0 и $K_r \subset G$, $0 < \sigma < \eta < r$. Тогда, как бы мало ни было $\mu > 0$, при достаточно малом r , в соответствии с доказанным в § 2 будем иметь

$$\Delta_r k(z; \gamma) > (1 - \mu) \lambda_{r_0}(z_0) \eta,$$

если $z \in K_{r-\eta}$ и $\gamma \in \Gamma(M)$, и

$$-\Delta_r k(z; \gamma) > (1 + \mu) \lambda_{r_0}(z_0) \eta,$$

если $z \in K_{r+\eta}$, $\gamma \in \Gamma(M)$. Обозначив, для краткости, $\lambda_{r_0}(z_0) = l_0$ и пользуясь (3.4) и (3.5), отсюда получим

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{-\lambda_{n+1}[(1-\mu)l_0\tau_1-\delta]} \quad (4.1)$$

если $z \in K_{r-\eta}$ и

$$\sum_{i=1}^n |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{\lambda_n[(1+\mu)l_0\tau_1+\delta]} \quad (4.2)$$

если $z \in K_{r+\eta}$, как бы малы ни были $\delta > 0$ и $\mu > 0$, если только r достаточно мало, а n достаточно велико (r подбирается к μ , а n к δ , η — любое, лишь бы $0 < \eta < r$).

Пусть теперь $\eta \rightarrow 0$ и $\sigma = o(\eta)$. Обозначив $r_1 = r - \eta$, $r_2 = r + \sigma$, $r_3 = r + \eta$, легко найдем

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_3}{r_1}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_1}} = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

и поэтому при достаточно малом η и соответствующем σ отношения

$$\frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_3}{r_1}} \quad \text{и} \quad \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_1}}$$

сколь угодно близки к $\frac{1}{2}$.

Обозначим

$$R_{n_v}(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{n_v} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}$$

и пусть $M_v^{(1)}$, $M_v^{(2)}$, $M_v^{(3)}$ — наибольшие значения $|R_{n_v}(z)|$ соответственно в кругах $K_{r-\eta}$, $K_{r+\sigma}$, $K_{r+\eta}$. На основании теоремы Адамара о трех кругах имеем

$$\ln M_v^{(2)} \leq b \ln M_v^{(1)} + (1-b) \ln M_v^{(3)},$$

где $b = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_3}{r_1}}$ и, следовательно, $1-b = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_1}}$. Пользуясь (4.1),

(4.2), (4.3) и учитывая то обстоятельство, что функция $f(z)$ аналитична в $K_{r+\eta}$ и, следовательно, $|f(z)| < C$ на границе этого круга и поэтому

$$M_v^{(3)} < C + \max_{z \in K_{r+\eta}} \left| \sum_{i=1}^{n_v} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right|$$

(C — постоянная), получим при достаточно большом v

$$\begin{aligned} \ln M_n^{(2)} &\leq A_1(\eta) \ln M_n^{(1)} + A_2(\eta) \ln M_n^{(3)} \leq \\ &\leq -A_1(\eta) \lambda_{n_v+1} [(1-\mu) l_0 \eta - \delta] + A_2(\eta) \lambda_{n_v} [(1+\mu) l_0 \eta + \delta] \leq \\ &\leq -\{A_1(\eta) [(1-\mu) l_0 \eta - \delta] (1+\vartheta) - A_2(\eta) [(1+\mu) l_0 \eta + \delta]\} \lambda_{n_v}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

где $\lim_{\eta \rightarrow 0} A_1(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} A_2(\eta) = \frac{1}{2} > 0$, а μ и δ сколь угодно малы. Учитывая то обстоятельство, что в оценках (4.1) и (4.2) r подбирается к μ , а n к δ , можно, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, взять r и η столь малыми, чтобы

$$\frac{(1-\mu) A_1(\eta)}{(1+\mu) A_2(\eta)} > 1 - 2\varepsilon,$$

после чего выбрать столь малое δ , чтобы

$$\frac{A_1(\eta) [(1-\mu) l_0 \eta - \delta]}{A_2(\eta) [(1+\mu) l_0 \eta + \delta]} > 1 - \varepsilon,$$

взяв для этого достаточно большое v . Так как $\vartheta > 0$, причем ϑ не зависит от v , то $(1+\vartheta)(1-\varepsilon) > 1$ при достаточно малом ε и, следовательно, при достаточно малом $\eta > 0$ и соответствующем σ можно, основываясь на (4.4), утверждать, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \ln M_n^{(2)} = -\infty, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} M_n^{(2)} = 0,$$

а это означает, что последовательность частных сумм ряда (1) порядков $\{n_v\}$ сходится в круге $K_{r+\varepsilon}$, а так как точка z_0 — внутренняя к этому кругу, то теорема доказана.

Очевидно также, что рассматриваемая последовательность частных сумм ряда (1) сходится в круге $K_{r+\varepsilon}$ равномерно, так как при доказательстве оценивался максимум $|R_{n_v}(z)|$ в этом круге.

Если $\rho_0 = \infty$, теорема также справедлива. При доказательстве в этом случае следует окрестность U_ρ точки z_0 заменить окрестностью U_A , в которой $\rho > A$, считать $l_0 = 1$, а при выводе неравенств (3.4) и (3.5) предполагать, что области D и D' определяются следующим образом: в области D $|z| < e^{\rho(x+k(\rho)-\beta)}$ при $\rho \in M$, $\rho \neq \infty$ и $x > k_\infty + \beta$, а в области D' $|z| < e^{\rho(x-k(\rho)+\beta)}$ при $\rho \in M$, $\rho \neq \infty$ и $x > k_\infty - \beta$.

Если множество M конечно и $\lambda_{n+1} > (1+\vartheta)\lambda_n$ при всех n , то из теоремы 1 следует, что все точки границы области G — особые для $f(z)$.

Теорема 2. Если $\lambda_{n_v+1} > (1+\vartheta_v)\lambda_{n_v}$, где $\lim_{v \rightarrow \infty} \vartheta_v = \infty$, то последовательность частных сумм ряда (1)

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n_v} a_i z^{m_i - \lambda_i} \right\}$$

сходится в любой конечной части области голоморфности функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}.$$

Доказательство. Пусть C_2 — любая конечная область, в которой $f(z)$ голоморфна. Построим конечную область C_3 , внутри и на границе которой $f(z)$ также голоморфна и которая содержит область C_2 (C_2 — строго внутри C_3). Пусть, наконец, $C_1 \subset C_2$ и C_1 находится внутри области сходимости ряда (1).

Обозначим $\beta_1 = \inf \beta$ для всех кривых $|z| = e^{[x-k(t)-\beta]}$, пересекающих область C_1 и $\beta_2 = \sup \beta$ для всех кривых $|z| = e^{[x-k(t)+\beta]}$, пересекающих C_3 (в силу сделанных предположений β_1 и β_2 — конечные положительные числа). Тогда

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{-\lambda_{n+1}(\beta_1 - \varepsilon)} \quad (4.5)$$

в C_1 и

$$\sum_{i=1}^n |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{\lambda_n(\beta_2 + \varepsilon)} \quad (4.6)$$

в C_3 , как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, если n достаточно велико.

Пусть, как и раньше,

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}.$$

Обозначив через $M_v^{(1)}$, $M_v^{(2)}$, $M_v^{(3)}$ значения $\max |R_n(z)|$ на границах областей C_1 , C_2 , C_3 , получим, воспользовавшись общей формой теоремы Адамара,

$$\ln M_v^{(2)} \leq b \ln M_v^{(1)} + (1-b) \ln M_v^{(3)},$$

где $0 < b < 1$. Воспользовавшись оценками (4.5), (4.6) и тем, что из аналитичности $f(z)$ на границе области C_3 следует ограниченность ее модуля, получим при достаточно большом ϑ

$$\begin{aligned} \ln M_v^{(2)} &< -b \lambda_{n_v+1} (\beta_1 - \varepsilon) + (1-b) \lambda_{n_v} (\beta_2 + \varepsilon) < \\ &< [-b(1+\vartheta_n)(\beta_1 - \varepsilon) + (1-b)(\beta_2 + \varepsilon)] \lambda_{n_v} \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

при $v \rightarrow \infty$, так как $\lim_{v \rightarrow \infty} \vartheta_n = \infty$. Следовательно, $\lim_{v \rightarrow \infty} M_v^{(2)} = 0$ и последо-

вательность $\left\{ \sum_{i=1}^{n_v} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right\}$ сходится в области C_2 (и притом равномерно). Теорема доказана.

Если, в частности, $\lambda_{n+1} > (1+\vartheta_n) \lambda_n$ при всех n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \infty$, то все точки на границе области сходимости ряда (1) — особые для его суммы и ряд определяет столько аналитических функций, сколько связных компонент имеет область его сходимости.

§ 5. Сверхсходимость ряда Дирихле с комплексными показателями

Как было доказано автором (см. [31]), ряд Дирихле с комплексными показателями

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad (5.1)$$

где $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ и $\ln n = o(|\lambda_n|)$, сходится абсолютно в области G , точки которой при любом φ удовлетворяют условию

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) > 0$$

и расходится вне этой области. Функция $h(\varphi)$ определяется здесь следующим образом: $h(\varphi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} h(\varphi, \alpha)$, где $h(\varphi, \alpha) = \frac{\ln |a_{n_p}|}{|\lambda_{n_p}|}$, а $\{n_p\}$ —

последовательность индексов, для которых $\varphi - \alpha \leq \operatorname{Arg} \lambda_{n_p} \leq \varphi + \alpha$.

Нетрудно видеть, что $h(\varphi, \alpha) = h(\psi)$ для некоторого ψ из отрезка $[\varphi - \alpha, \varphi + \alpha]$; в этом легко убедиться, деля отрезок на две части, выбирая тот из полученных отрезков, в который попадет бесконечное множество членов той подпоследовательности из $\{\operatorname{Arg} \lambda_{n_p}\}$, для которой со-

ответствующая подпоследовательность из $\left\{ \frac{\ln |a_{n_p}|}{|\lambda_{n_p}|} \right\}$ сходится к $h(\varphi, \alpha)$,

и продолжая этот процесс деления. Условимся дальше считать, что $\operatorname{Arg} \lambda_n \in [0, 2\pi]$.

С помощью таких же рассуждений, какие на стр. 17 были применены к функциям $k(\rho, \alpha)$ и $k(\rho)$ и вводя аналогичные обозначения для функций $h(\varphi, \alpha)$ и $h(\varphi)$ ($\operatorname{Arg} \lambda_n$ вместо $\frac{\lambda_n}{m_n}$, h_i вместо k_i , φ_i^* вместо ρ_i^*), приходим к выводу, что, как бы мало ни было $\omega > 0$, при достаточно больших i

$$|a_i| < e^{(h_i + \omega)|\lambda_i|}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим теперь какую-либо конечную область D , в которой при всех φ имеет место неравенство

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) - \beta > 0$$

($\beta > 0$). Тогда для точек этой области тем более

$$x \cos \varphi_i^* - y \sin \varphi_i^* - h(\varphi_i^*) - \beta > 0. \quad (5.3)$$

Взяв φ_i^* , соответствующее достаточно мелкому разбиению отрезка $[0, 2\pi]$, и положив $\operatorname{Arg} \lambda_n = \theta_n$, в силу (5.3) и ввиду того, что область D ограничена, а функции $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ непрерывны, имеем

$$|e^{-\lambda_i z}| = e^{-|\lambda_i|(x \cos \theta_i - y \sin \theta_i)} < e^{-|\lambda_i|(x \cos \varphi_i^* - y \sin \varphi_i^* - \epsilon)} < e^{-|\lambda_i|(h_i + \beta - \epsilon)}$$

для всех i , как бы мало ни было $\varepsilon > 0$. Таким образом, в области D при достаточно малом ε_1

$$|e^{-\lambda_i z}| e^{(h_i + \varepsilon_1)|\lambda_i|} < e^{-|\lambda_i|(\beta - \varepsilon_1)},$$

как бы мало ни было $\varepsilon_2 > 0$ и тем более

$$|e^{-\lambda_i z}| e^{(h_i + \varepsilon_1)|\lambda_i|} < e^{-|\lambda_{n+1}|(\beta - \varepsilon_2)}, \quad (5.4)$$

если $n+1 \leq i$. С другой стороны, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| e^{-(h_i + \varepsilon_i)|\lambda_i|}$$

сходится при любом $\varepsilon_i > 0$, так как $\ln n = o(|\lambda_n|)$, а в силу (5.2) при достаточно большом i

$$|a_i| e^{-(h_i + \varepsilon_i)|\lambda_i|} < e^{-\delta|\lambda_i|},$$

где $\delta > 0$. Поэтому

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| e^{-(h_i + \varepsilon_i)|\lambda_i|} < C,$$

где C — постоянная и с учетом (5.4) приходим к выводу, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ в области D справедлива оценка

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| e^{-\lambda_i z} < e^{-|\lambda_{n+1}|(\beta - \varepsilon)}. \quad (5.5)$$

Совершенно аналогично доказывается, что в любой конечной области D' , точки которой при любом φ удовлетворяют неравенству

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) + \beta > 0 \quad (\beta > 0),$$

справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^n |a_i| e^{-\lambda_i z} < e^{|\lambda_n|(\beta + \varepsilon)} \quad (5.6)$$

для любого $\varepsilon > 0$, если только n достаточно велико.

Теорема 3. Если функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

аналитична в точке z_0 на границе Γ области сходимости G ряда (5.1), существует круг, лежащий в G и касающийся Γ в точке z_0 и имеется такая последовательность индексов $\{n_v\}$, что $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \vartheta)|\lambda_{n_v}|$, где ϑ не зависит от v ($\vartheta > 0$), то последовательность

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n_v} a_i e^{-\lambda_i z} \right\}$$

сходится в некоторой окрестности точки z_0 .

Доказательство этой теоремы основано на оценках (5.5) и (5.6) и вполне аналогично доказательству теоремы 1, но значительно проще, так как роль кривых $|z| = e^{\rho(x-k(\rho))}$ играют прямые $x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) = 0$, а роль ρ — расстояния — обычное расстояние от соответствующей прямой.

Другим методом и при значительно более ограничительных предположениях $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty \right.$ и даже $|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| > p > 0$) эта теорема была ранее доказана Галли (см. [4]).

Теорема 4. Если $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \theta_v) |\lambda_{n_v}|$, где $\lim_{v \rightarrow \infty} \theta_v = \infty$, то последовательность

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n_v} a_i e^{-\lambda_i z} \right\}$$

сходится в любой конечной части области голоморфности функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2 и немедленно следует из теоремы Адамара (в общей форме) и оценок (5.5), (5.6).

Московский институт
химического машиностроения

Поступила 3 VII 1962

Ч. I, 1, 1969

ՄԻ ՔԱՆԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ԳԵՐՁՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկում են Թեյլոր-Դիրիխլեի շարքեր՝

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{\frac{m_n}{\lambda_n}} e^{-\lambda_n z}, \quad (1)$$

որտեղ $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$ և $\ln n = o(\lambda_n)$ և Դիրիխլեի կամպակքս ցուցիչներով շարքեր՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n z}, \quad (2)$$

որտեղ $|\lambda_n| \uparrow \infty$, $\ln n = o(|\lambda_n|)$.

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները:

1. Եթե (1) կամ (2) շարքի գուգամիտություն տիրույթի եզրագծի z_0 կետում շարքի գումարը հանդիսացող ֆունկցիան անալիտիկ է, գոյություն ունի շարքի գուգամիտություն տիրույթի ներսը ընկած ու այդ տիրույթի եզրը z_0 կետում շոշափող շրջան և առկա է $[n_v]$ աջափսի հաջորդականություն, որ $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \vartheta_v) |\lambda_{n_v}|$, որտեղ $\vartheta > 0$, ապա շարքի մասնակի գումարների համապատասխան $|S_{n_v}|$ հաջորդականությունը գուգամիտում է z_0 կետի ինչ որ շրջակայքում:

2. Եթե $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \vartheta_v) |\lambda_{n_v}|$ և $\lim_{v \rightarrow \infty} \vartheta_v = +\infty$, ապա ինչպես (1) շարքի, այնպես էլ (2) շարքի համար կարելի է պնդել, որ մասնակի գումարների համապատասխան $|S_{n_v}|$ հաջորդականությունը գուգամիտում է ումեն մի տիրույթում, որտեղ շարքի գումարը անալիտիկ է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.
2. Тичмарш Е. Теория функций. Гостехиздат, М., 1951.
3. Լյուզ Գ. Լ. О некоторых обобщениях рядов Дирихле. Математ. сб., **10**, (52), № 1—2, 33—50, 1942.
4. Gallie T. M. Jr. Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents. Trans. Amer. Math. Soc., **90**, № 1, 57—72, 1959.
5. Լյուզ Գ. Լ. О рядах типа Тейлора—Дирихле. Известия АН АрмССР, **14**, № 2, 7—16, 1961.