ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 4, 1962 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Л. А. Мовсесян

К нестационарным движениям реального газа в трубах

Будем рассматривать одномерное неустановившееся изотермическое движение вязкой сжимаемой жидкости при числах Маха $<$ $<0{,}1$—$0{,}2$ в прямолинейных трубах постоянного сечения, которое описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\lambda}{2D}v^2+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v}{\partial x}=0, \tag{2}$$

$$p=\rho gRT \quad (T=\mathrm{const}), \tag{3}$$

где v — средняя по сечению трубы скорость газа, ρ — средняя по сечению трубы плотность газа, p — среднее по сечению трубы давление газа, x — направление оси трубы, t — время, λ — коэффициент сопротивления, D — диаметр трубы, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура газа, g — ускорение свободного падения.

При наличии (2) и (3) уравнение (1) можно привести к виду

$$\frac{1}{gRT}\frac{\partial pv}{\partial t}+\frac{1}{gRT}\frac{\partial pv^2}{\partial x}+\frac{\lambda}{2DgRT}pv^2+\frac{\partial p}{\partial x}=0. \tag{4}$$

Легко видеть, что второе слагаемое левой части уравнения (4) по сравнению с последним пренебрежимо мало [2]. Действительно, с целью сопоставления можно переписать второй и последний члены уравнения (4) так

$$\frac{\partial}{\partial x}[p(1+M^2)],$$

откуда видно, что при рассматриваемых скоростях $M^2 \ll 1$.

Умножив уравнение (4) (без второго слагаемого) на p и обозначив $pv=q$, получим

$$\frac{1}{gRT}p\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\lambda}{2DgRT}q^2+p\frac{\partial p}{\partial x}=0. \tag{5}$$

С помощью (3) уравнение (2) при наличии принятого обозначения можно привести к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0, \tag{6}$$

откуда видно, что существует такая функция $\psi(x, t)$, для которой имеют место следующие соотношения:

$$p=\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial x}, \qquad q=-\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}. \tag{7}$$

Подставляя значения p и q из (7) в уравнение (5), получим нелинейное дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{gRT}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)+\frac{\lambda}{2DgRT}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0. \tag{8}$$

Составим условия однозначности.

В начальный момент ($t=0$) должны быть заданы p и q в функции от x. Следовательно, из соотношений (7) имеем следующие начальные условия для $\psi(x, t)$:

$$\psi(x, 0)=\int p(x, 0)\,dx, \qquad \left.\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=-q(x, 0). \tag{9}$$

Отметим, что функцию $\psi(x, t)$ можно определять с точностью до произвольной постоянной. Относительно граничных условий заметим, что если на концах трубы будут заданы p и q в функции от времени, то при составлении этих условий для ψ необходимо обратиться к соотношениям (7).

Легко видеть, что задание q эквивалентно заданию весового расхода газа Q через поперечное сечение s трубы. Действительно, пользуясь соотношением $Q=s\rho gv$, уравнением (3) и обозначением $pv=q$, получим

$$q=cQ \quad (c=RT/S=\mathrm{const}). \tag{10}$$

Таким образом, исследование любого нестационарного движения вязкого газа в трубах (как в длинных, так и в коротких) с хорошим приближением свелось к решению нелинейного дифференциального уравнения (8) при соответствующих условиях однозначности. Следует отметить, что последнее является самым удобным (хотя сложным) уравнением для решения краевой задачи, ибо физические величины p и Q, которые обычно должны быть заданы на границе исследуемой области (x, t), очень просто связаны с функцией $\psi(x, t)$ линейными соотношениями (7).

Если в работе [3] рассматривалось движение газа в длинных трубопроводах, что влекло за собой пренебрежение инерционным членом $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, а, следовательно, задача сводилась к решению квазилинейного уравнения параболического типа (назовем ее упрощенной задачей), то в данном случае задача сводится к решению квазилинейного уравнения гиперболического типа. Естественно ожидать, что эти две формы исследования движения должны дать качественно различные результаты.

Так, например, в упрощенной задаче в начальный момент достаточно было задаться или давлением $\left(\psi(x, 0) = \int p(x, 0)\,dx\right)$ или расходом $\left(Q(x, 0) = \mathrm{const}\cdot\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0}\right)$, ибо они удовлетворяли соотношению

$$\frac{\partial\psi(x, 0)}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi(x, 0)}{\partial x^2} + a\left[\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}\right]^2_{t=0} = 0$$

Однако, в данном случае для однозначного решения задачи необходимо в начальный момент $(t=0)$ задаваться как расходом, так и давлением, так как из соотношения

$$\frac{\partial\psi(x, 0)}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\psi(x, 0)}{\partial x^2} - \frac{1}{gRT}\left.\frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial t^2}\right|_{t=0}\right] + \frac{\lambda}{2DgRT}\left[\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}\right]^2_{t=0} = 0$$

заданному $Q(x, 0) = \mathrm{const}\cdot\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0}$ может соответствовать не единственное $\psi(x, 0)$. Это значит, что настоящий путь исследования богаче решениями, чем предыдущий.

Упрощенная задача влечет за собой некоторые искажения физики процесса. Так, например, из решений, полученных в работе [3], видно, что влияние граничных возмущений для достаточно малых t сказывается на любом участке трубы, т. е. возмущения газа распространяются мгновенно в невозмущенную область. Конечно, при исследовании для достаточно больших интервалов времени, измеряемых не секундами или минутами, а часами, такая постановка задачи вполне может удовлетворить запросам практики.

В отличие от упрощенной задачи настоящий путь исследования позволяет решать аналогичные задачи методом характеристик.

Легко видеть, что уравнение (8) допускает два семейства неподвижных характеристических направлений

$$x \pm \lambda_1 t = \mathrm{const} \quad (\lambda_1 = \sqrt{gRT}),$$

дифференциальные соотношения вдоль которых будут соответственно

$$p\,(dp \mp \lambda_1 dq) + bq^2 dx = 0 \quad \left(b = \frac{\lambda}{2DgRT}\right) \tag{11}$$

или в эквивалентной форме

$$p\,(p \pm \lambda_1 q)(dp \mp \lambda_1 dq) + bq^2 d\psi = 0,$$

откуда видно, что слабые возмущения газа распространяются со скоростью $\sqrt{gRT}$, т. е. со скоростью звука (заметим, что в условиях изотермического режима скорость звука постоянна).

Следует отметить, что каждое из уравнений (11) является уравнением Пфаффа относительно переменных p, q, x (или p, q, ψ), левая часть которых допускает лишь форму вида

$$dS + VdW,$$

а следовательно, не может быть приведена к полному дифференциалу.

Для разрешения уравнений (11) вдоль соответствующих характеристик можно воспользоваться численными методами и этим решить поставленную задачу*.

Если в упрощенной задаче условие $q(x, 0) = \mathrm{const}$ означает стационарность движения ($p^2 = \mathrm{const}\cdot x + \mathrm{const}$), то настоящий путь исследования не констатирует это утверждение.

Разумеется, что сказанное вполне может найти физическое объяснение.

Дело в том, что в упрощенной задаче движущаяся среда „лишена" инерционности и поэтому постоянство расхода по всему участку трубы влечет за собой стабильность всех параметров.

Иначе обстоит дело при настоящем исследовании. Допустим, что в некоторый момент времени ($t = 0$) по всему участку трубы расход газа стал равным нулю (конечно, мы не утверждаем, что он был равен нулю и при $t < 0$), а давление стало некоторой функцией расстояния. После момента $t = 0$ расход и давление газа в начале трубы ($x = 0$) стали заданными непрерывными функциями времени, все производные которых непрерывны и равномерно ограничены. На заданные функции в дальнейшем будут наложены дополнительные ограничения.

Приведя уравнение (8) к безразмерным независимым переменным

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - c\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2 = 0, \tag{12}$$

можем записать условия однозначности для поставленной задачи:

$$\left.\frac{\partial\psi(\xi, \tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial\psi(\xi, 0)}{\partial\xi} = f(\xi), \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(\xi, \tau)}{\partial\tau}\right|_{\xi=0} = Q(\tau), \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(\xi, \tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = P(\tau), \tag{15}$$

где $\xi = \dfrac{x}{L}$, $\tau = \dfrac{t}{\sqrt{\dfrac{\lambda L^3}{2DgRT}}}$, L — длина трубы, $c = \dfrac{2D}{\lambda L}$.

* Например, см. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, 2. Физматгиз, М., 1960.

Решение уравнения (12) при условиях (13), (14), (15) будем искать в виде бесконечного функционального ряда по степеням ξ

$$\psi(\xi, \tau) = \psi_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\tau)\, \xi^n. \tag{16}$$

При наличии (14) и (15) определятся первые два члена ряда (16)

$$\frac{d\psi_0}{d\tau} = -Q(\tau), \quad \psi_1(\tau) = P(\tau). \tag{17}$$

Подставляя (16) в (17) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим бесконечную систему простых алгебраических уравнений относительно $\psi_i(\tau)$ $(i = 2, 3, \cdots)$

$$2\psi_1\psi_2 - c\psi_1\psi_0'' + \psi_0'^2 = 0,$$

$$6\psi_1\psi_3 + 4\psi_2^2 - c(2\psi_2\psi_0'' + \psi_1\psi_1'') + 2\psi_0'\psi_1' = 0$$

. . . .

. . . .

откуда при наличии соотношений (17) очень легко получить искомые функции через известные $\psi_0(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$

$$\psi_2(\tau) = \frac{1}{2\psi_1}(c\psi_1\psi_0'' - \psi_0'^2),$$

$$\psi_3(\tau) = \frac{1}{6\psi_1}[c(2\psi_2\psi_0'' + \psi_1\psi_1'') - 4\psi_2^2 - 2\psi_0'\psi_1'],$$

. . . .

(Штрихи обозначают производные по τ).

Нетрудно убедиться, что реккурентная формула для $\psi_i(\tau)$ $(i = 2, 3, \cdots)$ будет иметь следующий вид

$$\psi_{n+2} = \Big[c\sum_{k=0}^{n} (k+1)\psi_{k+1}\psi_{n-k}'' - \sum_{k=1}^{n} (k+1)(n-k+1)(n-k+2) \times$$

$$\times \psi_{k+1}\psi_{n-k+2} - \sum_{k=0}^{n} \psi_k'\psi_{n-k}' \Big] \frac{1}{(n+1)(n+2)\psi_1(\tau)}. \tag{18}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Так как искомые функции $\psi_i(\tau)$ определяются только из алгебраических (а не дифференциальных) соотношений (18), то, чтобы удовлетворить первому начальному условию (13), достаточно некоторым образом сузить класс допустимых граничных функций. Для этого поступим следующим образом.

Допустим, что все $\psi_i(\tau)$ $[i = 0, 1, 2 \cdots, (n+1)]$ являются функциями квадрата своего аргумента, т. е.

$$\psi_i = \psi_i(\tau^2).$$

Тогда из (18) легко видеть, что $\psi_{n+2}(\tau)$ также является функцией квадрата τ.

Поэтому, если в первом соотношении

$$\psi_2(\tau) = \frac{1}{2\psi_1}(c\psi_1\psi_0^{\cdot} - \psi_0^{\cdot\cdot})$$

ψ_0 и ψ_1 будут функциями квадрата своих аргументов, то (исходя из математической индукции) все последующие ψ_i $(i = 2, \cdots)$, определяемые соотношениями (18), будут обладать этим же свойством.

Таким образом, если заданные функции будут иметь вид

$$Q(\tau) = \tau\Psi_1(\tau^2), \quad P(\tau) = \Psi_2(\tau^2),$$

то искомая функция $\psi(\xi, \tau)$, определяемая рядом (16), будет также функцией квадрата времени и поэтому будет удовлетворять первому условию (13).

К сожалению, при таком методе решения задачи функцию $f(\xi)$ (второе условие (13)) невозможно задать произвольно. Она может быть получена из решения (16) при $\tau = 0$.

В работе [3] этим методом решалась изложенная задача. Однако, в отличие от настоящего исследования, условие $q(0) = 0$ влекло за собой условие $p(\xi, 0) = p_0 = \text{const}$.

Сопоставление двух полученных решений (сравнение соответственных функций φ_i и ψ_i) показывает, что величина инерционного члена $\partial q/\partial t$ прямо пропорциональна диаметру трубы и обратно пропорциональна сопротивлению и длине трубопровода, что вполне соответствует выводам проф. И. А. Чарного [2].

Для практики большое значение имеет решение задач при произвольных краевых условиях.

Поэтому (хотя и приближенно) решим такую задачу: в начальный момент $(t = 0)$ движение газа в трубе отсутствует, при $t > 0$ на обоих концах трубы $(x = 0,\ x = L)$ давления газа — заданные непрерывные функции времени $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$.

Для поставленной задачи условия однозначности будут следующие:

$$\psi(x, 0) = p_0 x, \qquad \left.\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \chi_1(t), \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial x}\right|_{x=L} = \chi_2(t). \tag{21}$$

Уравнение (8), которое можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{gRT}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{2DgRT}v\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{22}$$

прежде всего линеаризуем. Скорость v, явно входящую в уравнение (22), примем постоянной (т. е. осредним как по x, так и по t). В результате получится линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - a_2\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{23}$$

где

$$a_1 = 1/gRT, \quad a_2 = \lambda v_{cp}/2DgRT.$$

Заметим, что для длинных трубопроводов произведенная линеаризация несколько искусственна. Однако, для коротких трубопроводов, при которых газ движется с линейным гидравлическим сопротивлением, сделанное допущение в некоторой мере оправдывает себя.

Решая уравнение (23) с условиями (19), (20), (21) операционным методом с применением преобразования Лапласа по времени, после ряда нетрудных математических операций получим значение $\psi(x, t)$ [4, 5]:

$$\psi(x, t) = p_0 x + p_0\left\{\frac{(L-x)^2}{2L} - \frac{x^2}{2L} + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Psi_1(k_n, t)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\cos\frac{n\pi(L-x)}{L} - \cos\frac{n\pi x}{L}\right]\right\} + \frac{1}{a_2 L}\int_0^t[\chi_2(\tau) - \chi_1(\tau)]\,d\tau +$$
$$+\frac{x^2}{2L}\chi_2(t) - \frac{(L-x)^2}{2L}\chi_1(t) - \left(\frac{a_1}{a_2 L} + \frac{L}{6}\right)[\chi_2(t) - \chi_1(t)] +$$
$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\chi_1(t)\cos\frac{n\pi x}{L} - \chi_1(t)\cos\frac{n\pi(L-x)}{L}\right]\Psi_2(k_n, t) +$$
$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\int_0^t\left[\chi_2(\tau)\cos\frac{n\pi x}{L} - \chi_1(\tau)\cos\frac{n\pi(L-x)}{L}\right]\Psi_3(k_n, t-\tau)\,d\tau\right\}, \tag{24}$$

где

$$\Psi_1(k_n, t) = \frac{\exp(k_{n+}t)}{k_{n+}(2a_1k_{n+}+a_2)} + \frac{\exp(k_{n-}t)}{k_{n-}(2a_1k_{n-}+a_2)},$$

$$\Psi_2(k_n) = \frac{1}{k_{n+}(2a_1k_{n+}+a_2)} + \frac{1}{k_{n-}(2a_1k_{n-}+a_2)},$$

$$\Psi_3(k_n, t-\tau) = \frac{\exp[k_{n+}(t-\tau)]}{2a_1k_{n+}+a_2} + \frac{\exp[k_{n-}(t-\tau)]}{2a_1k_{n-}+a_2},$$

$$k_{n+} = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1\pi^2n^2/L^2}}{2a_1}; \qquad k_{n-} = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1\pi^2n^2/L^2}}{2a_1}. \tag{25}$$

Чтобы получить выражения для давления и расхода, необходимо обратиться к соотношениям (7) и (10), что не представляет особого труда.

Из (25) видно, что при изменении n от 1 до ∞ в шкале натуральных положительных чисел, k_n может принимать значения как действительные, так и комплексные (причем попарно сопряженные):

$$\text{при } n^2 < \frac{a_2^2L^2}{4\pi^2a_1} \quad k_n \text{ — действительные,} \tag{26}$$

$$\text{при } n^2 > \frac{a_2^2L^2}{4\pi^2a_1} \quad k_n \text{ — комплексные.} \tag{26'}$$

Из (24) легко видеть, что действительным k_n соответствуют затухающие экспоненциальные функции времени. Простыми вычислениями можно получить члены, соответствующие комплексным k_n:

$$\Psi_1(k_n, t) = -\frac{L^2}{hn^2\pi^2}\left(h\cos\frac{h}{2a_1}t + a_2\sin\frac{h}{2a_1}t\right)\exp\left(-\frac{a_2t}{2a_1}\right),$$

$$\Psi_2(k_n) = \frac{L^2}{n^2\pi^2},$$

$$\Psi_3(k_n, t-\tau) = \frac{2}{h}\left|\sin\frac{h}{2a_1}(t-\tau)\right|\exp\left[-\frac{a_2}{2a_1}(t-\tau)\right],$$

где

$$h = \sqrt{4a_1\frac{n^2\pi^2}{L^2} - a_2^2},$$

откуда видно, что комплексным k_n в решении соответствуют затухающие периодические функции времени (синусы и косинусы).

Таким образом, полное решение выражается суммой конечного числа первых членов с экспоненциальными функциями и суммой бесконечного числа членов с периодическими функциями.

Если представить, что трубопровод достаточно длинный (что дает возможность получить сравнительно больше членов, соответствующих действительным k_n), то, как видно из (25), решение в основном будет содержать затухающие экспоненциальные функции, а периодические функции будут составлять лишь остаток всей суммы (заметим, что полученные ряды быстро сходятся, т. е. их первые слагаемые составляют основное ядро всей суммы). Следовательно, чем длиннее трубопровод, тем существеннее закон экспоненциального затухания.

С другой стороны, из (26) видно, что если комбинация $\frac{a_2^2L^2}{4\pi^2a_1}$ будет меньше единицы, то при $1 \leqslant n \leqslant \infty$ решение будет содержать лишь затухающие периодические функции, ибо в этом случае в формулу (24) войдут только комплексные k_n.

Следовательно, при $L < \frac{2\pi\sqrt{a_1}}{a_2} = \frac{4\pi D\sqrt{gRT}}{\lambda v_{cp}}$ (что тоже $a_2^2L^2/4\pi^2a_1 < 1$) решение будет выражаться затухающими синусоидами и косинусоидами.

Таким образом, из анализа полученного решения создается видимость, что качество нестационарного движения зависит от отклонения длины трубопровода в ту или иную сторону от некоторой критической величины.

Однако, мы не будем утверждать, что это так.

Возможно, что это есть результат метода решения, а не сущности процесса.

Напомним, что в данной работе не делаются никакие ограничения относительно длины трубопровода. Инерционный член $\frac{\partial q}{\partial t}$ в уравнении движения (5), который, вообще говоря, будет пренебрежимо малым для длинных трубопроводов [2], не отбрасывается, что дает возможность получить решения (хотя и приближенные) для трубопроводов любой длины.

В линеаризованной теории движения реального газа в длинных трубопроводах в основном получаются уравнения параболического типа [2, 6, 7]. Однако, в данном случае наличие члена $\frac{\partial q}{\partial t}$ дает возможность получить уравнение гиперболического типа, что, разумеется, должно дать качественно другое решение.

В заключение дадим приближенный метод определения средней скорости v_{cp}, исходя из граничных условий.

Для простоты выкладок определим среднюю квадратичную скорость по времени и по пространственной координате. Предположим, что функции $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ такие, что на всем протяжении нестационарного процесса скорость газа не меняет своего направления ($\chi_1(t) > \chi_2(t)$), и после некоторого конечного момента времени $t_1 > 0$ практически прекращается движение газа в трубопроводе, т. е. $v(x, t_1) = 0$.

Уравнение (1) (без инерционного члена) представляем в виде

$$-v^2 = \frac{2D}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2DgRT}{\lambda}\frac{\partial \ln p}{\partial x}.$$

Интегрируя это уравнение с применением условий (19), (20), (21) последовательно в промежутках $(0, L)$ и $(0, t_1)$, получим искомое число

$$v_{cp} = \left[\frac{1}{Lt_1}\int_0^L dx\int_0^{t_1} v^2 dt\right]^{1/2} = \left[\frac{2DgRT}{\lambda L t_1}\int_0^{t_1}\ln\frac{\chi_1(t)}{\chi_2(t)}\,dt\right]^{1/2}.$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 XII 1960

Լ. Ա. Մովսեսյան

ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ ՌԵԱԼ ԳԱԶԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐԺՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում խողովակներում, մածուցիկ գազի ոչ ստացիոնար իզոթերմ շարժման (1), (2) և (3) հավասարումները (7) առնչությունների միջոցով բերվում են (8) հիպերբոլական տիպի ոչ գծային հավասարմանը (19), (20) և (21) միակցման պայմանների դեպքում լուծվում է մի խնդիր, որի համար (8)-ը գծայնացվում և բերվում է հաստատուն գործակիցներով (23) գծային հավասարմանը: Լուծումը կատարվում է օպերացիոն հաշվի մեթոդով [4, 5]. $\varphi(x, t)$ ֆունկցիայի համար ստացվում է (24) բանաձևը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С. А.* и др. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, М.-Л., 1938.
2. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. ГНТИ, М.-Л., 1957.
3. *Мовсесян Л. А.* К теории неустановившегося движения реальной сжимаемой жидкости в длинных трубопроводах. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961.
4. *Карслоу Х., Егер Д.* Операционные методы в прикладной математике. ИЛ, М., 1948.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. Е.* Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
6. *Мовсесян Л. А.* О неустановившемся движении сжимаемой жидкости в длинных трубопроводах. Инженерно-физический журнал, № 1, 1961.
7. *Мовсесян Л. А.* Истечение реальной сжимаемой жидкости из длинного трубопровода. Труды первой закавказской конференции молодых научных сотрудников, Ереван, 1960.