

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

К задаче о ползучести облученного стержня

Недавно М. А. Задоян [1] рассмотрел интересную задачу о не-
 установившейся ползучести металлической балки прямоугольного по-
 перечного сечения, которая после облучения на поверхностях $x = \pm h$
 нейтронным стационарным потоком с одинаковой средней энергией и
 интенсивностью подвергалась чистому изгибу при высокой темпера-
 туре. Исходной физической зависимостью служило нелинейное ин-
 тегральное уравнение Ю. Н. Работнова при степенной нелинейности
 относительно деформации $\varepsilon(x, t)$ с дополнительным множителем $\Phi(x)$
 и ядром наследственности $N(x; t - \tau) = \Omega(x) f^{-1}(t - \tau)$, где функции
 $\Phi(x)$ и $\Omega(x)$ учитывают неоднородность материала, вызванную об-
 лучением.

Задача сводится к решению линейного интегрально-операторного
 уравнения смешанного типа относительно напряжения $\sigma(x, t)$

$$\sigma = F + (M - N)\sigma, \quad (1)$$

где

$$M\sigma = \int_0^h M(\xi, x) \sigma(\xi, t) d\xi, \quad N\sigma = \int_0^t N(x, t - \tau) \sigma(x, \tau) d\tau, \quad (2)$$

$$M(\xi, x) = \frac{\Phi(x) x^m \xi}{I} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right], \quad N(x; t - \tau) = \frac{\Omega(x)}{f(t - \tau)}, \quad \gamma = \frac{I}{I_0}, \quad (3)$$

$$F(x, t) = \frac{H}{2I} \Phi(x) x^m \left[1 + \gamma \int_0^t \frac{d\tau}{f(t - \tau)} \right], \quad (4)$$

$$I = \int_0^h \Phi(x) x^{m+1} dx, \quad I_0 = \int_0^h \frac{\Phi(x) x^{m+1}}{\Omega(x)} dx,$$

где H — внешний изгибающий момент.

Решение уравнения (1) найдено методом последовательных при-
 ближений и представлено в следующей операторной форме

$$\sigma(x, t) = F(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (M - N)^k F(x, t). \quad (5)$$

Доказано, что ряд (5) сходится абсолютно и равномерно, если выполняются следующие условия:

$$\int_0^h \left| \frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right| d\xi < \frac{I}{\Phi_0 h^{m+1}}, \quad (6)$$

$$\int_0^t \frac{d\tau}{f(t_0 - \tau)} < \frac{1}{\Omega_0} \left[1 - \frac{\Phi_0 h^{m+1}}{I} \int_0^h \left| \frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right| d\xi \right], \quad (7)$$

где

$$\Phi_0 = \max \Phi(x), \quad \Omega_0 = \max \Omega(x) \quad \text{в} \quad 0 \leq x \leq h; \quad 0 \leq t \leq t_0 < \infty.$$

При этом решение (5) уравнения (1) — единственное.

Расшифровка операторного выражения (5) осуществлена в первом приближении при $k=1$. Для конкретности принято, что

$$f(t - \tau) = (t - \tau)^\nu, \quad 0 < \nu < 1$$

и

$$\Phi(x) = A + 2\alpha\theta_0 e^{-\alpha h} \operatorname{ch} \mu x, \quad \Omega(x) = B + 2\beta\theta_0 e^{-\beta h} \operatorname{ch} \mu x, \quad (8)$$

где $A, B, \alpha, \beta, \theta_0$ и μ — заданные постоянные.

В настоящем сообщении будет рассмотрена следующая задача: найти точное решение уравнения (1) в замкнутом виде, пригодное для наглядного изображения физической картины распределения напряжений в стержне и определения деформации для любого момента времени t , включая и случай, когда $t \rightarrow \infty$.

Решение поставленной задачи может быть осуществлено ценою наложения на функцию $\Omega(x)$ определенного ограничения, а именно, примем ее такой, чтобы функция

$$y = \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \quad (9)$$

не меняла знака на отрезке $[0, h]$.

Если исходить из представления (8), то последнее условие выполняется лишь на части отрезка $[0, h]$.

Действительно, функция y обращается в нуль при $x = h_1$, где h_1 является единственным действительным положительным корнем уравнения $\Omega(x) - \gamma = 0$, она положительна на отрезке $[0, h_1]$ и отрицательна на отрезке $[h_1, h]$. Поэтому, чтобы функция y не меняла знака на всем отрезке $[0, h]$, нужно или полностью заменить представления (8) другими, при которых выполняется указанное условие, разумеется, правильно отображающими влияние облучения, или соответствующим образом аппроксимировать выражение $\Omega(x)$ на основе (8). В последнем случае, как это будет обнаружено далее, целесообразно предпринять две аппроксимации $\Omega(x)$, при которых функция y не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$:

$$\Omega(x) = \begin{cases} B + 2\beta\theta_0 e^{-\beta h} \operatorname{ch} \mu x & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 \\ \Omega_1 = \Omega(h_1) & \text{при } h_1 \leq x \leq h \end{cases} \quad (10)$$

или

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1 = \Omega(h_1) & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 \\ B + 2\beta_0 e^{-\alpha h} \operatorname{ch} \mu x & \text{при } h_1 \leq x \leq h. \end{cases} \quad (11)$$

Аппроксимации (10) соответствует следующая аппроксимация:

$$y = \begin{cases} \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 > 0 & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 - \varepsilon, \text{ где } \varepsilon > 0, \\ \frac{\gamma}{\Omega(h_1 - \varepsilon)} - 1 > 0 & \text{при } h_1 - \varepsilon \leq x \leq h; \\ \text{причем } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Omega(h_1 - \varepsilon)} = 1, & h_1 \leq x \leq h. \end{cases} \quad (12)$$

Аппроксимации (11) соответствует следующая аппроксимация:

$$y = \begin{cases} \frac{\gamma}{\Omega(h_1 + \varepsilon)} - 1 < 0 & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 + \varepsilon, \varepsilon > 0, \\ \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 < 0 & \text{при } h_1 + \varepsilon \leq x \leq h; \\ \text{причем } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Omega(h_1 + \varepsilon)} = 1, & 0 \leq x \leq h_1. \end{cases} \quad (13)$$

Как функция (12), так и функция (13) непрерывны и не меняют знака на всем отрезке $[0, h]$.

Разумеется, что функция

$$y = \left| \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \right| \quad (14)$$

также не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$. Однако, представлению (14), отвечает аппроксимация $\Omega(x)$ функцией, имеющей экстремум при $x = h_1$, где $0 < h_1 < h$. Последнее является более грубой аппроксимацией выражения $\Omega(x)$, чем (10) или (11), если в качестве эталона принять выражения (8).

Итак, впредь будем считать, что условия, обеспечивающие стабильность знака функции y , определяемой формулой (9), осуществлены.

Решение уравнения (1) найдем методом, представляющим собою синтез метода Пинкерле-Гурса [2] по координате x и интегрально-операторного метода по времени t .

Введем интегральный оператор:

$$\Omega(x) K\tau = \Omega(x) \int_0^t \frac{\tau(x, \tau)}{f(t-\tau)} d\tau. \quad (15)$$

Тогда из уравнения (1) следует

$$\varepsilon(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \int_0^h \frac{\Phi(x) x^m \xi}{I [1 + \Omega(x) \bar{K}]} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right] \varepsilon(\xi, t) d\xi. \quad (16)$$

Обозначим

$$Q_1(x) = \frac{\Phi(x) x^m}{I [1 + \Omega(x) \bar{K}]}, \quad Q_2(\xi) = \xi \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right]. \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) примет следующий вид:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \int_0^h Q_1(x) Q_2(\xi) \varepsilon(\xi, t) d\xi. \quad (18)$$

Ядро интегрального уравнения (18) вырожденное. Это интегральное уравнение типа Фредгольма решается известным способом [2]. Будем иметь:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \frac{Q_1(x)}{1 - \eta} \int_0^h Q_2(\xi) \frac{F(\xi, t)}{1 + \Omega(\xi) \bar{K}} d\xi, \quad (19)$$

где

$$\eta = \int_0^h Q_1(x) Q_2(x) dx. \quad (20)$$

Оператор, обратный оператору ползучести $1 + \Omega(x) \bar{K}$, являющийся оператором релаксации, имеет вид:

$$[1 + \Omega(x) \bar{K}]^{-1} = 1 - \Omega(x) \bar{R} [-\Omega(x)], \quad (21)$$

где ядро оператора $\bar{R}$ представляет собою резольвенту ядра оператора $\bar{K}$. Оператор $\bar{R}$, как известно [3], — регулярный оператор Вольтерра, если ядро оператора $\bar{K}$ ограничено или слабо сингулярно.

На основе (21) выражение (19) можно представить так:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= [1 - \Omega(x) \bar{R} [-\Omega(x)]] F(x, t) + \\ &+ \frac{Q_1(x)}{1 - \eta} \int_0^h Q_2(\xi) [1 - \Omega(\xi) \bar{R} [-\Omega(\xi)]] F(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Докажем теперь, что, если γ не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$, то $1 - \eta \neq 0$.

Будем доказывать от противного. Пусть $1 - \eta = 0$, т. е.

$$\int_0^h [1 - \Omega(x) \bar{R} [-\Omega(x)]] \Phi(x) x^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \right] dx = I. \quad (23)$$

По физической сущности исходной зависимости типа Ю. Н. Работнова $x^{m+1} > 0$, $\Phi(x) > 0$, $\Omega(x) > 0$ и $I \neq 0$. По условию разность, фи-

гулирующая в квадратных скобках под знаком интеграла, не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$. Поэтому, применяя теорему о среднем в (23), получим:

$$[1 - \Omega(\theta h) \bar{K} [-\Omega(\theta h)]] \int_0^h \Phi(x) x^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \right] dx = I, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \quad (24)$$

Из (23) с учетом (4), следует

$$[1 - \Omega(\theta h) \bar{K} [-\Omega(\theta h)]] (\gamma I_0 - I) = I. \quad (25)$$

Так как $\gamma I_0 = I$, то уравнение $1 - \gamma = 0$, дающее собственные значения, превращается в нелепое равенство: $0 = I$ при $I \neq 0$.

Следовательно, в рассматриваемой задаче собственных значений вовсе не существует. Поэтому формула (22) дает единственное определенное решение интегрального уравнения (1).

Условие стабильности знака u на всем отрезке $[0, h]$ приводит также к тому, что интеграл, фигурирующий в (19) или (22), равен нулю. Действительно, с учетом (3) и (17) этот интеграл примет следующий вид:

$$\delta = \frac{H(1 + \gamma \bar{K})}{2I} \int_0^h \frac{\Phi(\xi) \xi^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right] d\xi. \quad (26)$$

Применяя в (26) теорему о среднем, получим $\delta = 0$.

Итак, решение интегрального уравнения (1) будет иметь вид:

$$\sigma(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} = \frac{H\Phi(x) x^m (1 + \gamma \bar{K})}{2I [1 + \Omega(x) \bar{K}]} \quad (27)$$

или

$$\sigma(x, t) = \frac{H}{2I} \Phi(x) x^m [1 + [\gamma - \Omega(x)] \bar{K} [-\Omega(x)]]. \quad (28)$$

Чтобы убедиться в том, что выражение $\sigma(x, t)$, определяемое формулой (27) или (28), удовлетворяет уравнению (1) или равносильному ему уравнению (16), достаточно подставить (27) в (16). Будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} = \\ & = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \frac{H\Phi(x) x^m (1 + \gamma \bar{K})}{2I^2 [1 + \Omega(x) \bar{K}]} \int_0^h \frac{\Phi(\xi) \xi^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right] d\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку по условию функция u не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$, то после применения в (29) теоремы о среднем, обнаруживаем, что преобразованный интеграл равен нулю. Следовательно, равенство (29) есть тождество.

Для получения формулы, определяющей деформацию $\varepsilon(x, t)$, подставим в исходную физическую зависимость типа Ю. Н. Работнова

$$\Phi(x) \varepsilon^m(x, t) = [1 + \Omega(x) K] \sigma(x, t) \quad (30)$$

вместо $\sigma(x, t)$ его выражение из (28). Будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^m(x, t) = \frac{Hx^m}{2I} \{ 1 + [\gamma - \Omega(x)] \bar{R}[-\Omega(x)] + \Omega(x) \bar{K} + \\ + \Omega(x) [\gamma - \Omega(x)] \bar{K} \bar{R}[-\Omega(x)] \}. \end{aligned} \quad (31)$$

Принимая во внимание выражение произведения операторов

$$\Omega(x) \bar{K} \bar{R}[-\Omega(x)] = \bar{K} - \bar{R}[-\Omega(x)],$$

являющееся следствием формулы (21), из (31) получим:

$$\varepsilon^m(x, t) = \frac{Hx^m}{2I} (1 + \gamma \bar{K}). \quad (32)$$

Переходя в (28) и (32) от интегрально-операторной формы к обычной, получим окончательно выражения напряжения и деформации

$$\sigma(x, t) = \sigma(x, 0) \left\{ 1 + [\gamma - \Omega(x)] \int_0^t R[-\Omega(x); s] ds \right\}, \quad (33)$$

$$\varepsilon(x, t) = x \left\{ \frac{H}{2I} \left[1 + \gamma \int_0^t K(s) ds \right] \right\}^{\frac{1}{m}}, \quad \text{где } \sigma(x, 0) = \frac{H\Phi(x) x^m}{2I}. \quad (34)$$

По физической сущности ядро релаксации R является положительной монотонно убывающей функцией s , причем интеграл

$$\int_0^\infty R[-\Omega(x); s] ds < \infty$$

при любом фиксированном значении x , принадлежащем отрезку $[0, h]$ даже тогда, когда ядро ползучести K выбрано слабо сингулярным так, что

$$\int_0^\infty K(s) ds = \infty.$$

В частности, если $K(s) = s^{-\nu} \Gamma(1-\nu)$, $0 < \nu < 1$, где Γ — гамма функция, то

$$\sigma(x, t) = \sigma(x, 0) \left\{ 1 + [\gamma - \Omega(x)] \int_0^t \mathfrak{E}_\nu[-\Omega(x); s] ds \right\}, \quad (35)$$

где $\mathcal{E}$, — экспоненциальная функция дробного порядка Ю. Н. Работнова [4].

Учитывая связь между $\mathcal{E}$ — оператором и функцией Миттаг-Леффлера $E_{1-\nu}$, установленную автором [5], из (35) получим:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon(x, 0) \{1 + [\gamma - \Omega(x)] [1 - E_{1-\nu}(-\Omega(x) t^{1-\nu})] \Omega^{-1}(x)\}. \quad (36)$$

Принимая во внимание, что $E_{1-\nu}(-z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ (см. [5]), получим:

$$\varepsilon(x, \infty) = \varepsilon(x, 0) \frac{\gamma}{\Omega(x)}. \quad (37)$$

Из (34) при выбранном выше выражении ядра ползучести $K(s)$ получим

$$\varepsilon(x, t) = x \left\{ \frac{H}{2l} \left[1 + \frac{\gamma t^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \right] \right\}^{\frac{1}{m}}. \quad (38)$$

Из (38) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(x, t) = \infty$, т. е. материал ведет себя подобно максвелловскому телу, но кривая ползучести в координатах $\varepsilon - t$ не имеет асимптоты. Таким образом, здесь имеет место процесс неустановившейся ползучести. Разумеется, что можно ядро ползучести $K(s)$ подобрать так, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(x, t) \neq \infty$. Например, последнее можно осуществить, если ядро ползучести выразить через $\mathcal{E}$, — функцию Ю. Н. Работнова с соответствующими реологическими параметрами (см. [5]).

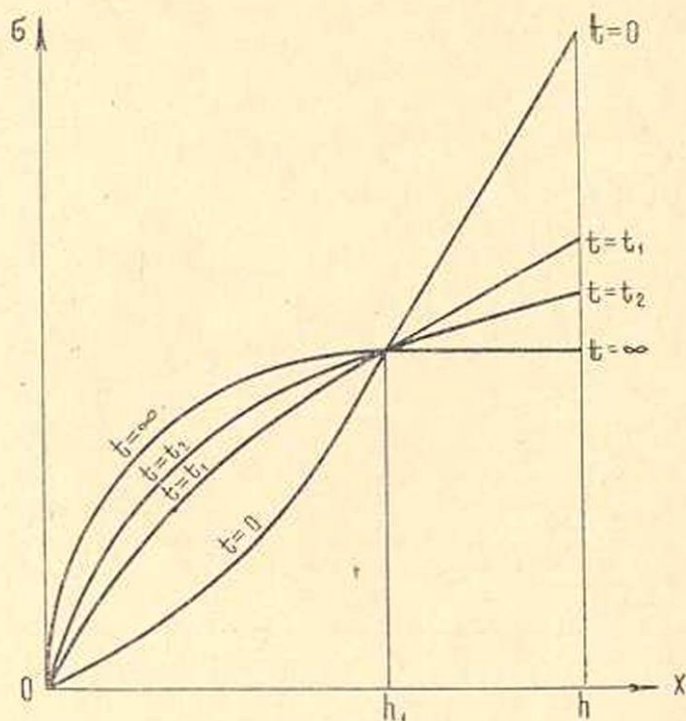
Напомним, что $\text{sign}[\gamma - \Omega(x)] = 1$ при $0 \leq x < h_1$, $\text{sign}[\gamma - \Omega(x)] = -1$ при $h_1 < x < h$ и $\gamma - \Omega(h_1) = 0$, ибо h_1 является корнем уравнения $\gamma - \Omega(x) = 0$.

Поэтому при аппроксимации $\Omega(x)$ согласно (10) напряжение $\sigma(x, t)$ будет монотонно возрастать с течением времени t со скоростью, зависящей от функции $\Omega(x)$, и при $t \rightarrow \infty$ стремиться к конечному предельному значению $\sigma(x, \infty) > \sigma(x, 0)$ при любом фиксированном значении x из $0 < x < h_1$, причем при $x \geq h_1 + 0$ имеем $\sigma(x, t) = \sigma(x, 0)$. Если же воспользоваться аппроксимацией (11), то $\sigma(x, t)$ будет монотонно убывать и при $t \rightarrow \infty$ стремиться к конечному предельному значению $\sigma(x, \infty) < \sigma(x, 0)$, когда $h_1 < x \leq h$, причем при $0 \leq x \leq h_1 - 0$ имеем $\sigma(x, t) = \sigma(x, 0)$.

Заметим, что соответствующая деформация $\varepsilon(x, t)$, определяемая формулой (34), непрерывно возрастает с течением времени t при любом значении x , принадлежащем полному отрезку $[0, h]$.

Если функцию $\Omega(x)$ не аппроксимировать и отпавляться от ее выражения согласно (8) на всем отрезке $[0, h]$, то полученные результаты можно применить для приближенного анализа напряженного состояния стержня при $0 \leq h_1 < h$ или соответственно при $0 < h_1 \ll h$. Случай, когда значение h_1 близко к $0,5h$, является самым неблагоприятным для применения. Однако и в последнем случае можно по-

строить качественно правильную картину распределения напряжений в стержне для различных фиксированных моментов времени (см. фиг. 1), если исходить из следующего свойства найденной выше функции $\sigma(x, t)$:



Фиг. 1.

$$\lim_{x \rightarrow h_1-0} \sigma(x, t) = \lim_{x \rightarrow h_1+0} \sigma(x, t) = \sigma(0, t), \text{ ибо } \lim_{x \rightarrow h_1-0} \Omega(x) = \lim_{x \rightarrow h_1+0} \Omega(x) = \gamma.$$

При этом только в одной точке $x = h_1$ отрезка $[0, h]$ стержень ведет себя подобно необлученному, в которой имеет место простая ползучесть, т. е. когда постоянному во времени напряжению отвечает возрастающая с течением времени деформация. В остальных точках полного отрезка $[0, h]$ изменяются во времени как напряжение, так и соответствующая ему деформация.

Днепропетровский горный институт

Поступила 30 III 1962

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ՀԱՌԱԳԱՅԹՎԱԾ ԶՈՂԻ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴՐԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ի. Մ.

Դիտարկված է (1) հալածարման հզորիտ լուծումը գտնելու խնդիրը որի շնորհիվ ստացվում է հեծանում լարումների բաշխման ֆիզիկական

պատկերը և դեֆորմացիաների որոշումը կամալական t -ի համար, ներառյալ նաև $t \rightarrow \infty$ դեպքը: $\Omega(x)$ ֆունկցիան, որը հաշվի է առնում նյութի անհամափոփոխելի համաձայն (10)-ի կամ (11)-ի նախապես ենթադրվում է ապրոփսիմացիայի:

Յիդ խնդիրը լուծվում է մի մեթոդով, որն իրենից ներկայացնում է Պրենկերլե-Գալթայի մեթոդի (ըստ x կոորդինատի) և ինտեգրալ օպերատորային մեթոդի (ըստ t ժամանակի) սինթեզը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Задоян М. А. О задаче ползучести облученного стержня. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 4, 1961.
2. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. И. Л., М., 1960.
3. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М.-Л. 1950.
4. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, **12**, в. 1, 1948.
5. Розовский М. И. Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961.