ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 4, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. Киракосян

Неустановившаяся ползучесть конической безмоментной оболочки вращения

Задачи безмоментных оболочек в условиях ползучести рассматривались в работах Л. М. Качанова [1], И. И. Гольденблата и Н. А. Николаенко [2], В. И. Розенблюма [3] и других. В настоящей заметке рассматривается неустановившаяся ползучесть конической безмоментной оболочки вращения под действием постоянных нормальных поверхностных нагрузок, когда один конец оболочки защемлен, а другой растянут (сжат) по направлениям образующих на постоянную величину. Решение задачи сводится к определению одной функции интегрирования, относительно которой на основе теории старения [1] получается нелинейное алгебраическое уравнение. В случае, когда величины кольцевых напряжений превосходят мгновенные (упругие) величины продольных напряжений (последние полагаются сжимающими), переходя в уравнениях ползучести от интенсивности касательных напряжений к близкой ей величине — максимальному касательному напряжению, дается точное решение.

1. Рассмотрим коническую безмоментную оболочку постоянной толщины h. Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности будем определять длиной отрезка по образующей s, отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка несет постоянную нормальную поверхностную нагрузку интенсивностью p и пусть ее один конец $(s = s_0)$ защемлен, а другой $(s = l)$ растянут (сжат) по направлениям образующих на постоянную величину u_0. Если материал оболочки обладает свойством ползучести, то при таких условиях в течение времени t произойдет перераспределение перемещений и напряжений в оболочке.

Граничные условия задачи будут:

$$\begin{gathered}\text{на срединной поверхности } Z = -p,\\ \text{на краях } u(0,\ t) = 0,\quad u(l,\ t) = u_0 = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Уравнения равновесия имеют вид [4]

$$\frac{\partial T_1}{\partial s}+(T_2-T_1)\frac{\sin\vartheta}{r}=0$$
$$\frac{T_2}{R}=-p, \tag{1.2}$$

где T_1, T_2 и R — тангенциальные усилия и радиус кривизны срединной поверхности оболочки, ϑ — угол конусности, r — расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения.

Геометрические соотношения имеют вид [4]

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial s}$$
$$\varepsilon_2=-\frac{\sin\vartheta}{r}u+\frac{w}{R}. \tag{1.3}$$

Здесь ε_1, ε_2 и w — компоненты деформации и прогиб оболочки.

Интегрируя (1.2), для напряжений $\sigma_1=\frac{T_1}{h}$, $\sigma_2=\frac{T_2}{h}$ получим [3]

$$\sigma_1=\bar{\sigma}_1+A_1C(t)$$
$$\sigma_2=-\frac{pR}{h}, \tag{1.4}$$

где

$$\bar{\sigma}_1=\frac{p}{2h\cos\vartheta}\frac{r_0^2-r^2}{r},\qquad A_1=\frac{1}{rh\cos\vartheta},\qquad r_0=r(0), \tag{1.5}$$

$C(t)$ — произвольная функция интегрирования.

Исходя из основных положений теории старения [1], для компоненты деформации ε_1 получим

$$\varepsilon_1=\frac{1}{6}\Omega(t)T^{m-1}(2\sigma_1-\sigma_2)+\frac{1}{2G}\left(\sigma_1-\frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right), \tag{1.6}$$

где

$$\Omega(t)=\int_0^t B(t)\,dt, \tag{1.7}$$

$B(t)$ — коэффициент ползучести материала, $T=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}$ — интенсивность касательных напряжений, m — показатель ползучести, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\sigma=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{3}$ — среднее давление.

Интегрируя (1.6) от нуля до l с учетом (1.1), получим следующее нелинейное алгебраическое уравнение относительно функции $C(t)$

$$n_0 = \frac{\Omega_1(t)}{2}\int_0^l \left(T_1^2 + T_2^2 C(t) + T_3^2 C^2(t)\right)^{\frac{m-1}{2}} (f_1 + f_2 C(t))\, ds +$$

$$+ \int_0^l (f_3 + f_4 C(t))\, ds, \tag{1.8}$$

где

$$T_1^2 = \frac{p^2 (r_0^4 + 3r^4)}{4h^2 r^2 \cos^2 \vartheta}, \quad T_2^2 = \frac{pr_0^2}{h^2 r^2 \cos^2 \vartheta}, \quad T_3^2 = \frac{1}{h^2 r^2 \cos^2 \vartheta},$$

$$f_1 = \frac{pr_0^2}{hr \cos \vartheta}, \quad f_2 = \frac{2}{hr \cos \vartheta}, \quad f_3 = \frac{p}{4Gh(1+\nu)\cos\vartheta} \frac{r_0^2 - (1-2\nu)r^2}{r},$$

$$f_4 = \frac{1}{2Gh(1+\nu) r \cos\vartheta}, \quad \Omega_1(t) = \frac{\Omega(t)}{3^{\frac{m+1}{2}}}. \tag{1.9}$$

В общем случае уравнение (1.8) можно решать лишь численным методом.

Допустим, что для любого s

$$\sigma_2 \leqslant \sigma_1' \leqslant 0, \quad \text{где} \quad \sigma_1' = \sigma_1 + A_1 C'. \tag{1.10}$$

Штрихом обозначены мгновенные (упругие) значения соответствующих величин.

Пользуясь выражениями (1.4) и (1.5), из (1.10) получим

$$-\frac{p(r_0^2 + r_1^2)}{2} \leqslant C' \leqslant -\frac{p(r_0^2 - r_1^2)}{2}. \tag{1.11}$$

Здесь $r_1 = r(l)$, причем $r_1 \geqslant r_0 > 0$.

Это нам пригодится в дальнейшем при ограничении внешних воздействий на оболочку.

2. Будем исходить из теории старения, переходя при этом от интенсивности касательных напряжений T к близкой ей величине — максимальному касательному напряжению τ_{max}.

Так как благодаря наличию дальнейшей релаксации напряжений неравенство (1.10) остается справедливым и при любом t, то для главных напряжений имеем

$$\sigma_2 \leqslant \sigma_1 \leqslant 0, \quad \sigma_3 = 0, \tag{2.1}$$

следовательно,

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_2|}{2} = \frac{pr}{2h\cos\vartheta}. \tag{2.2}$$

Для компоненты деформации получим

$$\varepsilon_1 = \frac{\Omega(t)}{6} \tau_{max}^{m-1} (2\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2G(1+\nu)} (\sigma_1 - \nu\sigma_2). \tag{2.3}$$

Последнее условие (1.1) с помощью первого соотношения (1.3), (2.3), (1.4) и (1.9) можно привести к виду

$$u_0 = \int_0^l \varepsilon_1 ds = \frac{\Omega(t)}{6}\int_0^l \tau_{\max}^{m-1} f_1 ds + \int_0^l f_3\, ds +$$

$$+ C(t)\left(\frac{\Omega(t)}{6}\int_0^l \tau_{\max}^{m-1} f_2 ds + \int_0^l f_4 ds\right) = A_2\Omega(t) + A_3 + C(t)(A_4\Omega(t) + A_5), \tag{2.4}$$

где A_2, A_3, A_4 и A_5 — положительные постоянные

$$A_2 = \frac{r_0^2(r_0^{m-1} - r_1^{m-1})}{3(m-1)\sin\vartheta}\left(\frac{p}{2h\cos\vartheta}\right)^m,$$

$$A_3 = \frac{p}{4Gh(1+\nu)\sin 2\vartheta}\left[2r_0^2\ln\frac{r_0}{r_1} - (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2)\right],$$

$$A_4 = \frac{2(r_0^{m-1} - r_1^{m-1})}{3p(m-1)\sin\vartheta}\left(\frac{p}{2h\cos\vartheta}\right)^m, \tag{2.5}$$

$$A_5 = \frac{\ln\dfrac{r_0}{r_1}}{Gh(1+\nu)\sin 2\vartheta}.$$

Из (2.4) находим

$$C(t) = -\frac{A_2\Omega(t) + A_3 - u_0}{A_4\Omega(t) + A_5}. \tag{2.6}$$

После определения $C(t)$ вычисление u и w не представляет особого труда, и мы на этом не останавливаемся.

При $t = 0$ и $t \to \infty$ по (2.6) получим значения $C(t)$ для мгновенного (упругого) и установленного режимов

$$C' = \frac{u_0 - A_3}{A_5}, \tag{2.7}$$

$$C_{\text{уст.}} = -\frac{A_2}{A_4} = -\frac{pr_0^2}{2}. \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) из первой формулы (1.4) получим

$$\sigma_{1\text{уст.}} = -\frac{pr}{2h\cos\vartheta}. \tag{2.9}$$

Это означает, что в установленном режиме ползучести продольные напряжения по величине в два раза меньше кольцевых напряжений независимо от величин u_0 и p.

Пользуясь неравенством (1.11), выражениями (2.7) и (2.5), получим общие ограничения внешних условий оболочки, независимо от характеристик ползучести ее материала, при которых продольные напряжения будут меньше кольцевых напряжений в любой момент времени. Эти ограничения имеют вид

$$\frac{p\left[2r_1^2\ln\frac{r_0}{r_1}-(1-2\nu)(r_0^2-r_1^2)\right]}{4Gh(1+\nu)\sin 2\vartheta}\geqslant u_0\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{p\left[2r_1^2\ln\frac{r_0}{r_1}+(1-2\nu)(r_0^2-r_1^2)\right]}{4Gh(1+\nu)\sin 2\vartheta}. \qquad (2.10)$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 II 1962

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

ԿՈՆԱԿԱՆ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՉԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս նոթում դիտարկվում է մի ծայրում ամրակցված, մյուս ծայրում ծնիչների ուղղությամբ հաստատուն մեծությամբ ձգված (սեղմված) կոնական անմոմենտ պտտման թաղանթի չկայունացված սողքի խնդիրը, երբ այն բեռնված է հաստատուն մակերևույթային նորմալ ուժերով: Խնդրի լուծումը բերվում է միայն ժամանակից կախված մեկ ֆունկցիայի որոշման, որի նկատմամբ ծերացման տեսության [1] հիման վրա ստացվում է m աստիճանի հանրահաշվական հավասարում: Այն դեպքում, երբ երկայնական լարումները սեղմող են և չափով չեն գերազանցում շրջանային լարումներին, խնդիրը լուծվում է ճշգրիտ: Ընդ որում սողքի հավասարումներում շոշափող լարումների ինտենսիվությունը փոխարինվում է նախօրոք հայտնի մաքսիմում շոշափող լարմամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. *Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.* Ползучесть и несущая способность оболочек. Научные сообщения ЦНИИСК, № 13, М., 1960.
3. *Розенблюм В. И.* О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек. ПМТФ, № 4, 1960.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.