

А. П. Южаков

Некоторые случаи вычисления вычетов функций двух комплексных переменных разложением в ряд Лорана*

В в е д е н и е

Как показано в [6], вычисление интегралов вида

$$\iint_{\Delta} F(\omega, z) d\omega dz,$$

где $F(\omega, z)$ — аналитическая функция комплексных переменных ω, z , S -двумерный кусочно-гладкий ориентированный цикл, лежащий в области аналитичности функции $F(\omega, z)$, сводится к следующему:

1. Находится одномерное число Бетти p и база одномерных гомологий $\{\Gamma_i\}$ многообразия особенностей подинтегральной функции в пространстве переменных ω, z , пополненном до сферического одной бесконечно удаленной точкой (точки (∞, z) , (ω, ∞) , (∞, ∞) отождествляются в одну);

2. Вычисляются вычеты относительно базисных циклов Γ_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Вычетом относительно цикла Γ_i называется

$$R_i = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Delta_i} F(\omega, z) d\omega dz,$$

где Δ_i — двумерный цикл, зацепленный (дуальный) с Γ_i :

$$\text{All}(\Gamma_i, \Delta_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

($\text{All}(\Gamma_i, \Delta_j)$ — индекс зацепления циклов Γ_i и Δ_j , см. [3], [4]).

3. Определяются индексы зацепления базисных циклов Γ_i с циклом интегрирования S : $\text{All}(\Gamma_i, S) = N_i$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Тогда

* Работа доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

$$\iint_S F(w, z) dw dz = (2\pi i)^2 \sum_{j=1}^p N_j R_j.$$

Для случая, когда многообразие особенностей подинтегральной функции есть полиномиальная поверхность, например, если

$$F(w, z) = \frac{f(w, z)}{P(w, z)},$$

где $P(w, z)$ — полином, а $f(w, z)$ — целая функция (результаты можно распространить также на случай, когда $f(w, z)$ регулярна в некоторой выпуклой области, содержащей цикл интегрирования S), база одномерных гомотопий многообразия особенностей $T_2: P(w, z) = 0$ состоит из циклов трех видов [7]:

1. Циклы, соответствующие каноническим разрезам римановых поверхностей [2], определяемых неприводимыми множителями полинома $P(w, z)$. Назовем их *собственными циклами*. Получается $\sum_i 2\rho_i$ таких циклов, где ρ_i — род соответствующей римановой поверхности.

2. Каждая точка самопересечения поверхности T_2 дает $r-1$ базисных циклов, где r — число элементов поверхности T_2 , пересекающихся в данной точке. Эти циклы строятся так. В каждом элементе из точки пересечения проводится разрез t_i , $i=1, 2, \dots, r$. Пары $(t_1, t_2), \dots, (t_1, t_r)$ противоположно ориентированных разрезов образуют $r-1$ независимых циклов пересечения. Всего получается $\sum_j (r_j - 1)$ циклов пересечения (здесь суммирование ведется по всем точкам пересечения).

3. Наконец, каждому неприводимому множителю полинома $P(w, z)$ соответствует $l-1$ «полярных» базисных циклов, где l — число элементов поверхности, определяемой этим множителем, пересекающихся в бесконечно удаленной точке. Полярные базисные циклы строятся аналогично циклам пересечения.

В настоящей статье показывается, что вычеты относительно циклов пересечения и полярных циклов, за некоторыми исключениями, могут быть вычислены разложением подинтегральной функции в ряд Лорана.

Очевидно следующее соображение. Если в некоторой двояко-круговой области D функция $F(w, z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$F(w, z) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_{kl} w^k z^l,$$

то для цикла

$$S(w = r_1 e^{i\varphi}; z = r_2 e^{i\psi}; 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi) \subset D$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_S F(w, z) dw dz = c_{-1, -1}.$$

Таким образом, c_{-1-1} , вообще говоря, является линейной комбинацией вычетов функции $F(w, z)$. Если разложение таково, что для $S \subset D$ $\text{All}(\Gamma_j, S) = 1$ и $\text{All}(\Gamma_i, S) = 0$ для $i \neq j$, то c_{-1-1} окажется вычетом функции $F(w, z)$ относительно цикла Γ_j .

§ 1. Вычеты относительно циклов пересечения

Случай 1. Пусть $A(0, 0)$ — точка пересечения двух, не обязательно простых в этой точке, элементов поверхности $T_a(P=0)$, имеющих различные касательные (см. § 5). Если A не является началом, можно сделать перенос. В этом случае $P(w, z)$ можно представить в виде:

$$P = (a_1 w + b_1 z)^a (a_2 w + b_2 z)^b + \sum_{k+l \geq a+b} a_{kl} w^k z^l,$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сделаем замену $a_1 w + b_1 z = x$, $a_2 w + b_2 z = y$, тогда получим

$$P = x^a y^b + \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^k y^l$$

В окрестности точки $A(0, 0)$ поверхность $P=0$ определится уравнениями

$$x = y^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}}, \quad y = x^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\frac{k}{q}}; \quad \frac{m}{n}, \frac{p}{q} > 1,$$

соответствующими неприводимым элементами. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ было

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right| < K_1, \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\frac{k}{q}} \right| < K_2.$$

Тогда в двоякокреновой области

$$D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, |x| < K_1 |y|^{\frac{m}{n}}, |y| < K_2 |x|^{\frac{p}{q}})$$

будет $P \neq 0$, следовательно, $F(w, z)$ в D допускает разложение в ряд Лорана. Это разложение для $F = \frac{f}{P}$ может быть получено следующим образом

$$\frac{f}{P} = \frac{f}{x^a y^b + \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^k y^l} = \frac{f}{x^a y^b \left(1 + \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^{k-a} y^{l-b} \right)}.$$

Можно показать, что $\left| \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^{k-a} y^{l-b} \right| < 1$ в некоторой двоякокреновой области $D_1 \subset D$. Разлагая f в ряд Тейлора, а

$$\frac{1}{x^\alpha y^\beta \left(1 + \sum_{k+l=\alpha+\beta} \tilde{a}_{kl} x^{k-\alpha} y^{l-\beta} \right)}$$

в ряд геометрической прогрессии и перемножая полученные ряды, получим соответствующее разложение в ряд Лорана. Так как члены разложения

$$\frac{1}{x^\alpha y^\beta \left(1 + \sum_{k+l=\alpha+\beta} \tilde{a}_{kl} x^{k-\alpha} y^{l-\beta} \right)} = \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l \geq \alpha+\beta} \tilde{a}_{kl} x^{k-\alpha} y^{l-\beta} \right)^n$$

имеют степени по x, y не ниже $(\alpha + \beta)$, то коэффициент c_{-1-1} разложения $\frac{f}{P}$ окажется линейной комбинацией значений функции f и ее частных производных до $\alpha + \beta - 2$ порядка включительно в точке $A(0, 0)$.

Точке $A(0, 0)$ соответствует единственный цикл пересечения $\Gamma(t_1, t_2)$, где t_1 — разрез, лежащий в элементе, касающемся плоскости $x = 0$, а t_2 — в элементе, касающемся $y = 0$. Покажем, что c_{-1-1} является вычетом относительно цикла $\Gamma(t_1, t_2)$. Действительно, в окрестности точки $A(0, 0)$ разрезы t_1, t_2 можно задать в виде:

$$t_1: \begin{cases} x = x_1 + iy_1 = \tau_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau_1^{\frac{k}{n}} \\ y = x_2 + iy_2 = \tau_1 \end{cases}, \quad t_2: \begin{cases} x = x_1 + iy_1 = \tau_2 \\ y = x_2 + iy_2 = \tau_2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tau_2^{\frac{k}{q}} \end{cases}$$

τ_1, τ_2 — вещественные параметры, $0 \leq \tau_1, \tau_2 < \infty$. Возьмем цикл интегрирования $S(x = r_0 e^{i\varphi}, y = r_0 e^{i\psi})$, где $r_0 < \varepsilon$, $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$. Тогда $\text{All}(\Gamma, S) = [\Gamma, B]$, где $B(x = r e^{i\varphi}, y = r e^{i\psi})$, $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$, $B' = S$ (здесь $[\Gamma, B]$ — индекс пересечения Γ с B , см. [3], [4]). Цикл Γ

имеет с B одну точку пересечения: $O(x = r_0 \sum_{k=0}^{\infty} a_k r_0^{\frac{k}{n}}, y = r_0)$. Индекс

$$\text{точки } O \text{ равен } \text{sign} \frac{D(x_1, y_1, x_2, y_2)}{D(\tau_1, r, \varphi, \psi)} \Big|_O = \text{sign} \frac{D(x_1, y_1, x_2, y_2)}{D(t_1, x_1, y_1, \psi)} \Big|_O = 1.$$

Таким образом, $\text{All}(\Gamma, S) = [\Gamma, B] = 1$. С остальными базисными циклами цикл S зацепляться не будет. Действительно, разрезы, соответствующие другим циклам, можно выбирать непроходящими через точку A . При r_0 достаточно малом B не будет пересекаться с этими циклами, т. е. для них $\text{All}(\Gamma, S) = [\Gamma, B] = 0$. Значит, S — цикл, дуальный Γ , и c_{-1-1} есть вычет функции $\frac{f}{P}$ относительно цикла пересечения Γ .

Случай 2. $A(0, 0)$ — точка пересечения r элементов поверхности $T_2(P=0)$, имеющих различные касательные. Тогда $P(w, z)$ можно представить в виде

$$P = (a_1 w + b_1 z)^{\lambda_1} \cdots (a_r w + b_r z)^{\lambda_r} + \sum_{k+l > \lambda_1 + \cdots + \lambda_r} a_{kl} w^k z^l,$$

$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$ при $i \neq j$. Делая замену $a_1 w + b_1 z = x$, $a_2 w + b_2 z = y$, получим

$$\begin{aligned} \frac{f}{P} &= \frac{f}{p \left[x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} (x + d_3 y)^{\lambda_3} \cdots (x + d_r y)^{\lambda_r} + \sum_{k+l > \lambda_1 + \cdots + \lambda_r} \tilde{a}_{kl} x^k y^l \right]} = \\ &= \frac{f}{p \cdot x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r} \cdot y^{\lambda_2}} \left[\left(1 + d_3 \frac{y}{x} \right)^{\lambda_3} \cdots \left(1 + d_r \frac{y}{x} \right)^{\lambda_r} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k+l > \lambda_1 + \cdots + \lambda_r} \tilde{a}_{kl} x^{k-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_r} y^{l-\lambda_2} \right]^{-1}. \quad (*) \end{aligned}$$

В окрестности точки $A(0, 0)$ поверхность T_2 ($P=0$) определится уравнениями

$$x = y^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}}, \quad y = x^{\frac{p}{q}} \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^{\frac{h}{q}}, \quad \frac{m}{n} > 1, \quad \frac{p}{q} > 1;$$

$$x = -d_i y + y \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} y^{\frac{k}{n_i}}, \quad i=3, \dots, r.$$

При $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ будет $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right| < K_1$,

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^{\frac{h}{q}} \right| < K_2, \quad \left| -d_i + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} y^{\frac{k}{n_i}} \right| < K$$

Тогда, учитывая, что при y достаточно малом $K_1 |y|^{\frac{m}{n}} < K |y|$ имеем: в двоякокруговой области

$$D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, |x| > K|y|, |y| > K_2 |x|^{\frac{p}{q}}) \quad P \neq 0,$$

а, следовательно, $\frac{f}{P}$ допускает разложение в ряд Лорана. Это разложение получается из (*) аналогично случаю 1. Коэффициент c_{-1-1} такого разложения будет являться линейной комбинацией значений функции f и ее частных производных до $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r - 2$ порядка включительно в точке $A(0, 0)$.

Покажем, что c_{-1-1} дает вычет относительно цикла пересечения $\Gamma_1(t_1, t_2)$ точки $A(t_i, i=1, \dots, r)$ — разрез, проведенный в i -м элементе из точки A). Выберем $S: x = r_0 e^{i\varphi}, y = r_1 e^{i\psi}, 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$, где

$r_0 < \varepsilon, r_1 < \varepsilon, K_1 r_0^{\frac{p}{q}} < r_1 < \frac{r_0}{K}$. Найдем индексы зацепления цикла S

с циклами пересечения точки A : $\text{All}(\Gamma_i, S) = [\Gamma_i, B], i=1, 2, \dots, r-1$. Здесь $\Gamma_i = (t_1, t_{i+1}), i=1, \dots, r-1$; $B: x = r_0 e^{i\varphi}, y = r_1 e^{i\psi}, 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi; B=S$. Из всех лучей $t_i, i=1, 2, \dots, r$, пересекается с B лишь t_2 , значит, $\text{All}(\Gamma_1, S) = 1$, а $\text{All}(\Gamma_i, S) = 0, i \neq 1$.

Как и в случае 1, с остальными циклами, не являющимися циклами пересечения точки A , цикл S зацепляться не будет. Значит, цикл S дуален Γ_1 , а, следовательно, c_{-1-1} есть вычет функции $\frac{f}{p}$ относительно Γ_1 .

Взяв вместо 2 $i=3, \dots, r$, получим вычеты относительно циклов $\Gamma_2(t_1, t_3), \dots, \Gamma_{r-1}(t_1, t_r)$.

Случай 3. В точке $A(0, 0)$ встречаются два элемента поверхности T_2 , имеющие в точке A общую касательную. Пусть их общей касательной является координатная плоскость $x=0$ (в противном случае сделаем поворот). В окрестности $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$ поверхность $T_2(p=0)$ представляется уравнениями:

$$x = y^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}}, \quad x = y^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}}, \quad \text{где } \frac{m}{n} > 1, \frac{p}{q} > 1.$$

Рассмотрим следующие подслучаи:

а) $\frac{m}{n} \neq \frac{p}{q} \left(\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \right)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $|y| < \varepsilon$

было

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right| < 2|a_0|, \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \right| > \frac{1}{2}|b_0|.$$

Тогда в двоякокруговой области $D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, 2|a_0| \cdot |y|^{\frac{m}{n}} \leq |x| \leq \frac{|b_0|}{2} |y|^{\frac{p}{q}})$ $P \neq 0$ и $F(w, z)$ допускает разложение в ряд Лорана. Чтобы получить это разложение для $F = \frac{f}{p}$, представим P в виде

$$P = \prod_{r=1}^n \left(x - y^{\frac{m}{n}} \omega_r^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \omega_r^{\frac{k}{n}} \right)^{a_1} \cdot \prod_{r=1}^q \left(x - y^{\frac{p}{q}} \omega_r^p \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \omega_r^{\frac{k}{q}} \right)^{b_1} \Omega(x, y),$$

где $\omega_r = e^{i \frac{2\pi r}{n}}$; $\bar{\omega}_r = e^{-i \frac{2\pi r}{n}}$, причем $\Omega(x, y) \neq 0$ при $|x| < z$, $|y| < \bar{z}$. Тогда

$$\frac{f}{\rho} = \frac{\tilde{f}}{x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{y^{\frac{n}{q}}}{x} \omega_r^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} y^{\frac{k}{n}} \omega_r^k \right)^{a_k}} \times \\ \times \frac{1}{\prod_{r=1}^q \left(-b_0 + \frac{x}{y^{\frac{p}{q}} \bar{\omega}_r^{\frac{p}{q}}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \bar{\omega}_r^k \right)^{b_k}} \Omega(x, y)$$

$\alpha = \alpha_1 n$, $\beta = \beta_1 q$. Разлагая $\frac{f}{\Omega}$ в ряд Тейлора, а выражения вида

$$\frac{1}{1 - \frac{y^{\frac{n}{q}}}{x} \omega_r^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \omega_r^k}; \quad \frac{1}{-b_0 + \left(\frac{x}{y^{\frac{p}{q}} \bar{\omega}_r^{\frac{p}{q}}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \bar{\omega}_r^k \right)}$$

в ряды геометрической прогрессии, имея при этом в виду, что в области D

$$\left| \frac{y^{\frac{n}{q}}}{x} \omega_r^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \omega_r^k \right| < 1,$$

а

$$\left| \frac{x}{y^{\frac{p}{q}} \bar{\omega}_r^{\frac{p}{q}}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \bar{\omega}_r^k \right| < |b_0|$$

и перемножая полученные ряды и $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}}}$, получим разложение в ряд

Лорана функции $\frac{f}{\rho}$ в области D .

Практически проще поступить так. Полином $P(x, y)$ содержит член $x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} b_0^{\frac{p}{q}} \Omega(0, 0)$. Тогда в выражении

$$\frac{f}{\rho} = \frac{\tilde{f}}{x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} b_0^{\frac{p}{q}} \Omega(0, 0) (1 + \Sigma)},$$

(Σ — сумма остальных членов полинома $P(x, y)$, деленная на член $x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} b_0^{\frac{p}{q}} \Omega(0, 0)$) разлагаем $\frac{1}{1 + \Sigma}$ в ряд геометрической прогрессии, а $\tilde{f}$ в ряд Тейлора и находим коэффициент $c_{-1, -1}$ их произведения, умно-

женного на $\frac{1}{x^\alpha y^\beta b_0^\alpha \Omega(0,0)}$. Нетрудно подсчитать, что c_{-1-1} является линейной комбинацией значений функции f и ее частных производных порядков не выше $\beta-1 + \frac{p}{q}(\alpha-1)$ в точке $A(0,0)$.

Очевидно c_{-1-1} дает вычет функции $\frac{f}{P}$ относительно единственного цикла пересечения точки $A(0,0)$.

б) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, но $|a_0| \neq |b_0|$ (пусть $|a_0| > |b_0|$). Тогда для ε и δ достаточно малых при $|y| < \varepsilon$ будет

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{n}} \right| < |b_0| + \delta < |a_0| - \delta < \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right|.$$

Следовательно, в области $D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, (|b_0| + \delta)|y|^{\frac{m}{n}} < |x| < (|a_0| - \delta)|y|^{\frac{m}{n}})$ $P \neq 0$, а $\frac{f}{P}$ разлагается в ряд Лорана. Коэффициент c_{-1-1} этого разложения можно получить аналогично предыдущему.

в) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $|a_0| = |b_0|$, но $n = q = 1$. Пусть a_l — первый коэффициент, не равный b_l . Заменой

$\tilde{x} = x - y^m \sum_{k=0}^{l-1} a_k y^k$, $\tilde{y} = y$ ($\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(x, y)} \neq 0$ во всем пространстве x, y) этот случай приведем к случаю За).

г) Наконец, если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $|a_0| = |b_0|$, $n = p > 1$, то не удастся построить двоякокруговой области D , разделяющей элементы поверхности, т. е. не удастся найти вычет относительно соответствующего цикла пересечения разложением в ряд Лорана.

Аналогично случаям 2 и 3 можно рассмотреть общий случай, когда в точке A пересекается несколько элементов поверхности T_2 , причем некоторые из них имеют общие касательные.

§ 2. Вычеты относительно полярных циклов.

Расположим полином $P(w, z)$ по степеням w :

$$P(w, z) = a_0(z) w^m + a_1(z) w^{m-1} + \dots + a_m(z).$$

Бесконечно удаленные элементы поверхности $T_2 (P(w, z) = 0)$ лежат над точками плоскости z , в которых $a_0(z) = 0$ (полюсы алгебраической функции $w = w(z)$, определяемой уравнением $P(w, z) = 0$)

и над $z = \infty$. Роль касательных для бесконечно удаленных элементов играют асимптоты (конечные или бесконечно удаленные). В каждом бесконечно удаленном элементе проведем разрез t_i . Пусть $t_1, \dots, t_l$ разрезы, соответствующие элементам одного неприводимого множителя. Пары $(t_1, t_2), \dots, (t_1, t_l)$ образуют $l-1$ независимых полярных базисных циклов: $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{l-1}$. Попытаемся найти вычет относительно цикла $\Gamma_1(t_1, t_2)$.

Случай 1. t_2 лежит в элементе, имеющем конечную асимптоту. Можно предположить, что этой асимптотой является плоскость $z=0$, в противном случае сделаем замену $\tilde{z} = aw + bz + c$, где $aw + bz + c = 0$ — уравнение асимптоты.

В окрестности точки $z=0$ бесконечно удаленный элемент представится уравнением $w = z^{-\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}}$.

Пусть это — единственный бесконечно удаленный элемент, лежащий над $z=0$. Тогда остальные элементы поверхности T_2 , лежащие над $z=0$ представятся уравнениями вида

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}}.$$

При $|z| < \varepsilon$ будет $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} \right| < K_1$, $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}} \right| < K$. Тогда в области

$D(|z| < \varepsilon, |w| > K, |w| > K_1 |z|^{\frac{m}{n}})$ $P(w, z) \neq 0$ и $F(w, z)$ допускает разложение в ряд Лорана, которое для $F = \frac{f}{p}$ можно получить так:

$$\begin{aligned} \frac{f}{p} &= \frac{f(w, z)}{\prod_{r=1}^n \left(w z^{\frac{m}{n}} \omega_r^{\frac{m}{n}} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} \omega_r^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \prod_{r,j} \left(w - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}} \omega_r^{\frac{k}{n_j}} \right) \Omega(w, z)} = \\ &= \frac{f(w, z)}{w^{\frac{m}{n}} z^{\frac{m}{n}} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{1}{w z^{\frac{m}{n}} \omega_r^{\frac{m}{n}}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} \omega_r^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \prod_{r,j} \left(1 - \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}} \omega_r^{\frac{k}{n_j}} \right) \Omega(w, z)}, \end{aligned}$$

где $\omega_r = l^{\frac{2\pi r}{n}}$, $\omega_{rj} = l^{\frac{2\pi r}{n_j}}$, $\alpha \cdot m = q$, причем $\Omega(w, z) \neq 0$ при $|z| < \varepsilon$. Разлагая $\frac{f}{\Omega}$ в ряд Тейлора, а дроби вида $\frac{1}{1-\Sigma}$ по степеням Σ и перемножая полученные ряды, получим ряд Лорана для функции $\frac{f}{p}$ в области D .

Практически его легче получить из

$$\begin{aligned} \frac{f}{P} &= \frac{f(w, z)}{(c_0 z^k + \dots + c_n z^{n+k}) w^m + a_1(z) w^{m-1} + \dots + a_m(z)} = \\ &= \frac{f(w, z)}{z^k w^m \left[c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \frac{1}{w} a_0(z) + \dots + \frac{1}{w^m} a_m(z) \right]}, \end{aligned}$$

учитывая, что в некоторой двоякокруговой области $D_1 \subset D$ $\left| c_1 z + \dots + c_n z^n + \frac{1}{w} a_0(z) + \frac{1}{w^m} a_m(z) \right| < |c_0|$. Коэффициент c_{-1-1} разложения будет иметь вид $c_{-1-1} = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} f_{\omega^k z^l}^{(k+l)}(0, 0)$. Это и даст вычет относительно полярного цикла Γ_1 .

Можно рассмотреть случаи, когда над точкой $z=0$ лежит два (или больше) бесконечно удаленных элемента. Пусть их уравнения будут

$$w = z^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}}; \quad \bar{w} = z^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{\frac{k}{q}}.$$

Аналогично предыдущему можно построить разложение в ряд Лорана в двоякокруговой области, охватывающей оба элемента. Тогда c_{-1-1} даст сумму вычетов относительно Γ_1 и Γ_2 . Чтобы найти эти вычеты достаточно построить еще разложение в ряд Лорана в двоякокруговой области, разделяющей эти элементы. Это удастся сделать подобно случаю 3, § 1, если $\frac{m}{n} \neq \frac{p}{q}$, либо при $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $|a_0| \neq |b_0|$.

Случай 2. t_2 лежит в элементе, имеющем бесконечно удаленную асимптоту, параллельную плоскости $z=0$ (в противном случае сделаем поворот). Пусть такой элемент единственный (случаи неединственности аналогичны предыдущему). В окрестности точки $z=\infty$ его уравнение имеет вид

$$w = z^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-\frac{k}{n}}, \quad \frac{m}{n} > 1.$$

Остальные элементы поверхности T_2 в окрестности $z=\infty$ выражаются уравнениями вида

$$w = \sum_{k=p_i}^{-\infty} b_k^{(i)} z^{\frac{k}{n_i}}$$

где $p_i \leq n_i$. При $\frac{1}{|z|} < \varepsilon$ будет $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} \right| < K_1$, а

$$\left| \sum_{k=p_1}^{-\infty} b_k^{(i)} z^{\frac{k}{n_1}} \right| < K|z|.$$

Тогда в области $D \left(|z| > \frac{1}{z}, K|z| < |w| < K_1|z|^{\frac{m}{n}} \right)$ $P(w, z) \neq 0$, и $F(w, z)$ разлагается в ряд Лорана.

Так как область D , кроме данного элемента, охватывает все элементы с конечными асимптотами, параллельными плоскости $z=0$, то коэффициент c_{-1-1} даст сумму соответствующих им вычетов. Но так как сумму вычетов относительно полярных циклов, соответствующих элементам с конечными асимптотами, мы можем найти, то беря разность, получим вычет относительно полярного цикла, соответствующего данному элементу.

Примеры

$$1. \quad \frac{f}{P} = \frac{f(w, z)}{(w^3 + z^3 - 3wz)^2}.$$

Одномерное число Бетти поверхности $P=0$ равно 3. Имеется один базисный цикл пересечения, соответствующий точке самопересечения $(0, 0)$, и 2 полярных цикла (асимптоты $w^3 + z^3 = 0$). Найдем вычет относительно цикла пересечения.

$$\frac{f}{P} = \frac{f(w, z)}{9w^2z^2 \left(1 - \frac{w^2}{3z} - \frac{z^2}{3w} \right)^2} = \frac{f(w, z)}{9w^2z^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w^2}{3z} + \frac{z^2}{3w} \right)^n \right]^2.$$

$$c_{-1-1} = \frac{1}{9} [f_{wz}(0, 0) + 6f(0, 0)].$$

$$2. \quad \frac{f}{P} = \frac{f(w, z)}{w^2 + z^2 + R^2}$$

База одномерных гомологий поверхности $P=0$ состоит из единственного полярного цикла. Асимптоты бесконечно удаленных элементов: $w + iz = 0$, $w - iz = 0$. Сделаем замену $w + iz = x$, $w - iz = y$.

$$\frac{f}{P} = \frac{z \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2i} \right)}{R^2 + xy} = \frac{f}{xy \left(1 + \frac{R^2}{xy} \right)} = \frac{f}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{R^2}{xy} \right)^n.$$

$$c_{-1-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{2n}}{(n!)^2} \cdot \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} \Big|_{(0,0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}} \times \\ \times \left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^n f(w, z) \Big|_{0,0}.$$

Замечание. Так как многообразие особенностей произвольной аналитической функции есть аналитическая поверхность, которую на основании леммы Вейерштрасса [1] можно представить в виде псевдодолинома, то рассмотренным выше способом можно находить вычеты произвольной функции относительно ее циклов пересечения.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступила 21 V 1962

Ա. Պ. Յուշակով

ԼՈՐԱՆԻ ՇԱՐՔԻՆ ՎԵՐԼՈՒԾԵԼՈՒ ՄԻՋՈՑՈՎ ԵՐԿՈՒ ԿՈՍՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՆԱՑՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԴԵՊՔԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկում են երկու փոփոխականների այն անալիտիկ ֆունկցիաներից կրկնակի ինտեգրալների մնացքները, որոնց եղակիությունների բազմազանությունը որոշվում է $P(\omega, z) = 0$ հավասարումով, որտեղ $P(\omega, z)$ -ը պոլինոմ է:

Յուշյ է արված, որ $P = 0$ մակերևույթի ինքնահամաժան կետերի շրջակայքում և նրա անվերջ ճյուղերին մոտ զրույթյան տեղին կրկնաշրջանային տիրույթներ, որոնցում ֆունկցիան թույլ է տալիս վերլուծում Լորանի շարքի: Այդ վերլուծումների C_{-1-1} գործակիցները տալիս են համապատասխան մնացքներ: Տրվում է նշված լորանյան վերլուծումների որոնման եղանակ

$$\frac{f(\omega, z)}{P(\omega, z)}$$

տեսքի ֆունկցիաների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фукс Б. А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
2. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
3. Александров П. С. Комбинаторная топология. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. Martinelli E. Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complessi. „Annali di Matematica pura ed Applicata“, 34, 1953.
5. Уокер Р. Алгебраические кривые. ИЛ, М., 1952.
6. Южаков А. П. Вычисление интегралов от функций двух комплексных переменных по замкнутым двумерным контурам. Уч. зап. УрГУ, вып. 23, 2, 1960.
7. Южаков А. П. К теории вычетов функций двух комплексных переменных. Уч. зап. Моск. обл. пединст., 16, вып. 7, 1961.