ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 4, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

Критерий абсолютной сходимости квазистепенного ряда

В работе рассматривается квазистепенной ряд

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \tag{1}$$

где $0 < t \leqslant u$,

$$a_0 = \varphi(u), \quad a_k = \frac{(-1)^k u^{\gamma_{k-1}+1} \varphi_k(u)}{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu}, \tag{2}$$

$$\varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{t^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right)', \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots, \tag{4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty, \tag{4'}$$

$$\omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) =$$

$$= (-1)^k u^{-\gamma_k} \prod_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu \int_u^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2 - \gamma_1 - 1} dt_2 \cdots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n =$$

$$= \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)} = \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\right), \tag{5}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Простой контур C здесь и впредь в аналогичных случаях охватывает окрестности всех полюсов подинтегральной функции.

В [1] получено необходимое и достаточное условие разложимости функций в сходящийся на $(0, u]$ ряд (1) с конечным порядком равномерной сходимости на $[0, u]$.

В настоящей работе приводится аналогичное условие для разложимости функций в абсолютно сходящийся на $(0, u]$ ряд (1) с конечным порядком равномерной сходимости.

Определение 1. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ на $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$AC_{\gamma, \varkappa}(AC_{\gamma, \varkappa}(0, u]),$$

(где $\varkappa \geq 0$ — произвольное число, $\{\gamma_\nu\}$ — произвольная последовательность чисел, определенная в (4) и (4')), если при $t \in (0, u]$ существует последовательность функций

$$\{\varphi_k(t)\},$$

определенная в (3) и, кроме того, если для всякого $x \in (0, u]$ и $n = 0, 1, 2, \cdots$ удовлетворяются условия

$$\int_x^u |\varphi_{n+1}(t)|\, t^{\gamma_n + \varkappa_1}\, dt \leq C \prod_{\nu=1}^{n} (\varkappa' + \gamma_\nu), \tag{6}$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa'$ ($\varkappa_1 > \varkappa' > \varkappa \geq 0$) произвольные числа, C — постоянная, не зависящая от n и x.

Очевидно, что (6) равносильно выполнению условия

$$\int_0^u |\varphi_{n+1}(t)|\, t^{\gamma_n + \varkappa_1}\, dt \leq C \prod_{\nu=1}^{n} (\varkappa' + \gamma_\nu). \tag{6'}$$

Определение 2. Назовем нижнюю грань множества действительных чисел μ, для которых ряд

$$t^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)$$

сходится равномерно на $[0, u]$, порядком равномерной абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)$$

на $[0, u]$ и обозначим его через $\varkappa$.

Определение 3. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ на $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$AT_{\gamma, \varkappa}(AT_{\gamma, \varkappa}(0, u]),$$

если она разлагается в абсолютно сходящийся на $(0, u]$ квазистепенной ряд (1) с порядком равномерной абсолютной сходимости $\varkappa$.

Определение 4. Функция $\varphi(t)$ на $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$R_{\gamma, \varkappa}(R_{\gamma, \varkappa}(0, u]),$$

если она принадлежит классу обобщенно регулярно монотонных на $(0, u]$ функций при последовательности $\{\gamma_n\}$, т. е. классу $R_\gamma(0, u]$ (см. [2]) и, кроме того

$$\lim_{t \to 0} \varphi(t)\, t^{\mu} = 0 \tag{7}$$

для всякого $\mu > \varkappa$, тогда как при $\mu < \varkappa$ равенство (7) не имеет места. Число $\varkappa$ называется порядком функции $\varphi(t)$ на $[0, u]$.

Прежде чем сформулировать основной результат настоящей работы, приведем некоторые предложения, первое из которых доказано в [2].

Теорема 1. *Для того, чтобы функция* $\varphi(t)$ *разлагалась в абсолютно сходящийся на* $(0, u]$ *квазистепенной ряд* (1)

$$(\varphi(t) \in AT_\gamma(0, u]),$$

необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух обобщенно регулярно монотонных функций при последовательности чисел $\{\gamma_n\}$, *т. е. функций класса* $R_\gamma(0, u]$.

Заметим, что в этой общей теореме не обсуждается вопрос о взаимосвязи порядка равномерной абсолютной сходимости ряда (1) и порядков функций класса $R_\gamma(0, u]$.

С целью установления такой взаимосвязи доказывается:

Теорема 2. *Для того, чтобы*

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma,\varkappa}(0, u], \quad \varkappa > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t)$ *представлялась в виде разности двух функций* $\psi(t)$ *и* $g(t)$, *где*

$$\psi(t) \in R_\gamma(0, u], \quad g(t) \in R_\gamma(0, u],$$

а порядки равномерной сходимости квазистепенных рядов вида (1) *функций* $\psi(t)$ *и* $g(t)$ *соответственно были равны* μ *и* μ', *где* $\mu \leqslant \varkappa$, $\mu' \leqslant \varkappa$, *причем хотя бы в одном из этих неравенств имеет место знак равенства.*

Доказательство. Необходимость и достаточность в условиях теоремы, чтобы $\varphi(t)$ представлялась в виде разности двух функций $\psi(t)$ и $g(t)$, принадлежащих классу функций $R_\gamma(0, u]$, установлены в теореме 1, поэтому нам остается установить взаимосвязь между числами $\varkappa$, μ и μ'.

С этой целью заметим, что

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2}\, \omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \tag{8}$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2}\, \omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) \tag{9}$$

(см. [2]).

Это значит, что отрезки последних рядов мажорируются соответствующими отрезками ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \omega_n \left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \tag{10}$$

следовательно, порядки равномерной (абсолютной) сходимости рядов (8) и (9) не могут превосходить порядка равномерной (абсолютной) сходимости ряда (10), т. е.

$$\mu \leqslant \varkappa, \quad \mu' \leqslant \varkappa. \tag{11}$$

С другой стороны, если бы в (11) одновременно имели место строгие неравенства, то складывая ряды (8) и (9), получили бы ряд (10) с порядком равномерной (абсолютной) сходимости, равным

$$\max(\mu, \mu') < \varkappa,$$

чего быть не может.

Этим теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для того, чтобы порядок равномерной (абсолютной) сходимости ряда*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \tag{12}$$

где

$$\varphi(t) \in R_{\gamma}(0, u]$$

был равен $\varkappa$ $(\varkappa \geqslant 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi(t) \in R_{\gamma, \varkappa}(0, u].$$

Доказательство. Теорему докажем от противного.

Пусть порядок равномерной (абсолютной) сходимости ряда (12) равен $\varkappa$, а

$$\varphi(t) \in R_{\gamma, \varkappa_1}(0, u],$$

где $\varkappa \neq \varkappa_1$ ($\varkappa_1$ число конечное или $\varkappa_1 = \infty$).

В нашем предположении возможно одно из двух:

$$1.\ \varkappa > \varkappa_1, \quad 2.\ \varkappa < \varkappa_1.$$

Докажем, что оба допущения невозможны. Начнем с первого.

В [2] доказано, что в условиях теоремы

$$0 \leqslant R_n(u, t) \leqslant \varphi(x) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{1 + \dfrac{r}{\alpha_\nu}}{1 + \dfrac{r}{\gamma_\nu}} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}, \tag{13}$$

где $0 < x < t \leqslant u$, $r > 0$ — произвольное число, $\alpha_\nu = \gamma_\nu \ln u/x : \ln u/t$ (см. [2], неравенство (1,10')).

Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы имели

$$\varkappa - \varepsilon > \varkappa_1 + r', \quad \text{где} \quad r' > r.$$

Тогда, с одной стороны, получаем, что

$$t^{\varkappa - \varepsilon} R_n(u, t)$$

на $[0, u]$ не стремится равномерно к нулю, тогда как при $t = 2x$ и $0 < x < \frac{u}{2}$

$$t^{\varkappa_1+r'}\varphi(x)\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{1+\frac{r}{\alpha_\nu}}{1+\frac{r}{\gamma_\nu}}\left(\frac{t}{u}\right)^{-r'} = x^{\varkappa_1+r'}\varphi(x)\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{1+\frac{r}{\alpha_\nu}}{1+\frac{r}{\gamma_\nu}}2^{\varkappa_1+r'-1}u^{r'} \tag{14}$$

стремится к нулю равномерно на $0 \leqslant x \leqslant \frac{u}{2}$, а равномерное стремление к нулю (14) при $x \in \left[\frac{u}{2}, u\right]$ и $t \in [x, u]$ очевидно.

Таким образом, первое допущение отпадает.

Пусть теперь 2) $\varkappa < \varkappa_1$.

Представим $\varphi(t)$ рядом (12), где

$$\alpha_k \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \omega_2\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) \leqslant \omega_k(0, \gamma), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Имеем

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \sum_{k=0}^{n_0}\alpha_k + R_{n_0}(u, t) = S_{n_0} + R_{n_0}(u, t). \tag{15}$$

Помножим обе стороны неравенства (15) на $t^{\varkappa+\varepsilon}$, где $\varkappa + \varepsilon < \varkappa_1$.

Будем иметь

$$0 \leqslant t^{\varkappa+\varepsilon}\varphi(t) \leqslant A_{n_0}t^{\varkappa+\varepsilon} + t^{\varkappa+\varepsilon}R_{n_0}(u, t).$$

При достаточно большом

$$0 \leqslant t^{\varkappa+\varepsilon}R_{n_0}(u, t) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

для всех $t \in [0, u]$.

Возьмем теперь $t \in (0, u]$ настолько малым, чтобы имели

$$A_{n_0}t^{\varkappa+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это значит, что при достаточно малом $t \in (0, u]$

$$0 \leqslant t^{\varkappa+\varepsilon}\varphi(t) < \frac{\varepsilon}{2},$$

что опять противоречит условию

$$\varphi(t) \in R_{\gamma, \varkappa_1}(0, u].$$

Таким образом, доказано, что

$$\varkappa = \varkappa_1.$$

Теорема доказана.

Объединяя теоремы 1, 2, 3, получаем:

Т е о р е м а 4. *Для того, чтобы*

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \varkappa}(0, u]$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t)$ *представлялась в виде разности двух функций* $\psi(t)$ *и* $g(t)$

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \mu}(0, u], \quad g(t) \in R_{\gamma, \mu'}(0, u], \tag{17}$$

где $\mu \leqslant \varkappa$, $\mu' \leqslant \varkappa$, *причем хотя бы в одном из последних соотношений имеет место знак равенства.*

Теорема 5 (основная). *Для того, чтобы*

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \varkappa}(0, u],$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t)$ *представлялась в виде разности двух таких функций класса* $R_{\gamma}(0, u]$, *сумма которых принадлежит классу* $AC_{\gamma, \varkappa}(0, u]$.

Доказательство. В силу теоремы 4 нам остается доказать, что для

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \mu}(0, u], \quad 0 \leqslant \mu$$

необходимо, чтобы

$$\psi(t) \in AC_{\gamma, \mu}(0, u].$$

А для последнего утверждения нам следует в силу теоремы 3 работы [1] только заметить, что ряд

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)$$

сходится в $(0, u]$, его порядок равномерной абсолютной сходимости на $[0, u]$ не превосходит μ,

$$\alpha_k \geqslant 0, \quad \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) \geqslant 0$$

и, следовательно, вместо интеграла

$$\left|\int_x^u \psi_{n+1}(t)\, t^{\gamma_n + \varkappa_1} dt\right|,$$

фигурирующего в вышеотмеченной теореме, взять интеграл

$$\left|\int_x^u (-1)^{n+1} \psi_{n+1}(t)\, t^{\gamma_n + \varkappa_1} dt\right| = \int_x^u |\psi_{n+1}(t)|\, t^{\gamma_n + \varkappa_1} dt.$$

Таким образом, повторяя весь ход доказательства вышеуказанной теоремы с учетом последнего замечания, получаем, что для

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \mu}(0, u]$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \leqslant \int_x^u (-1)^{n+1} \psi_{n-1}(t)\, t^{\gamma_n + \varkappa_1}\, dt \leqslant C(\varkappa_1, \varkappa') \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu + \varkappa')$$

для всякого $\varkappa$, $\varkappa'$, $(\varkappa_1 > \varkappa' > \mu)$.

Аналогичное неравенство получаем и для $g(t)$ с другой постоянной $C_1(\varkappa_1, \varkappa')$, а, следовательно, и

$$\varphi(t) = \psi(t) - g(t),$$

причем

$$\int_x^u |\varphi_{n+1}(t)|\, t^{\gamma_n + \varkappa_1}\, dt \leqslant C_0(\varkappa_1, \varkappa') \prod_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu + \varkappa'),$$

где $x \in (0, u]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

$$C_0(\varkappa_1, \varkappa') \leqslant C(\varkappa_1, \varkappa') + C_1(\varkappa_1, \varkappa').$$

Этим теорема 5 доказана.

Последняя теорема позволяет сформулировать аналог теоремы (1,6) работы [1] о разложимости функций в абсолютно сходящийся факторнальный ряд.

Теорема 6. *Для того, чтобы функция $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sigma_a$, $\sigma_a \geqslant 0$ разлагалась в абсолютно сходящийся факториальный ряд по последовательности чисел $\{\gamma_\nu\}$, определенной в* (4) *и* (4'), *необходимо и достаточно, чтобы она представлялась интегралом Лапласа*

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t)\, dt,$$

где

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \sigma_a}(0, 1].$$

В заключение работы следует отметить, что повторяя весь ход доказательства теоремы (2,2) работы [1], можно доказать:

Теорема 7. *Для квазианалитичности класса функций*

$$AC_{\gamma, \varkappa}(0, u]$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность чисел (4) *удовлетворяла условию* (4').

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 X 1961

Հ. Վ. Բադալյան

ՔՎԱԶԻ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԻՏԵՐԻՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատությունը սերտորեն կապված է մեր «Ընդհանրացված ռեգուլյար մոնոտոն ֆունկցիաներ» վերնագրով հոդվածում շարադրված արդյունքների հետ (տես [2]) և կազմում է նրանց մի մասի բնական զարգացումը:

Սահմանում 1. Պայմանավորվենք ասելու, որ $\varphi(t)$ *ֆունկցիան* $(0, u]$ *միջակայքում պատկանում է ֆունկցիաների*

$$R_{\gamma,\varkappa} \quad (R_{\gamma,\varkappa}(0, u])$$

դասին, եթե նա այնտեղ պատկանում է ընդհանրացված ռեգուլյար մոնոտոն ֆունկցիաների դասին, և, բացի այդ,

$$\lim_{t \to 0+} \varphi(t)\, t^{\mu} = 0,$$

երբ $\mu > \varkappa$, *ընդ որում վերջին հավասարությունը տեղի չունի, երբ* $\mu < \varkappa$:

Սահմանում 2. Պայմանավորվենք ասելու, որ $\varphi(t)$ *ֆունկցիան* $(0, u]$ *միջակայքում պատկանում է ֆունկցիաների*

$$AT_{\gamma,\varkappa} \quad (AT_{\gamma,\varkappa}(0, u]), \quad \varkappa \geqslant 0$$

դասին, եթե նա $(0, u]$ *միջակայքում վերլուծվում է զուգամետ քվազի աստիճանային*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) \tag{1}$$

շարքի, որտեղ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n z}, \qquad \lambda_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}$$

Դիրիխլեի շարքի զուգամիտության աբսցիսը հավասար է $\varkappa$:

Սահմանում 3. Պայմանավորվենք ասելու, որ $\varphi(t)$ *ֆունկցիան* $(0, u]$ *միջակայքում պատկանում է ֆունկցիաների*

$$AC_{\gamma,\varkappa} \quad (AC_{\gamma,\varkappa}(0, u]), \quad \varkappa \geqslant 0$$

դասին, եթե գոյություն ունի ֆունկցիաների (3) հաջորդականությունը (տես տեքստ (3)) և բավարարվում են հետևյալ անհավասարությունները,

$$\int_0^u |\varphi_{n+1}(t)|\, t^{\gamma_n + \varkappa_1}\, dt < C \prod_{\nu=1}^{n} (\varkappa' + \gamma_\nu)$$

որտեղ $\varkappa_1 > \varkappa' > \varkappa \geqslant 0$ *կամայական թվեր են, իսկ* C*-ն հաստատուն է, որը անկախ է* n*-ից և* x*-ից:*

Աշխատության ապացուցված թեորեմներից նշենք՝

Թեորեմ ա. Որպեսզի

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \varkappa}(0, u],$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $\varphi(t)$*-ն ներկայացվի որպես* $\psi(t)$ *և* $g(t)$ *ֆունկցիաների տարբերություն, որտեղ*

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \mu}(0, u], \quad g(t) \in R_{\gamma, \mu'}(0, u], \quad \mu \leqslant \varkappa, \quad \mu' \leqslant \varkappa,$$

ըստ որում վերջին անհավասարություններից գոնե մեկում տեղի ունի հավասարության նշանը։

Թեորեմ ա. Որպեսզի

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \varkappa}(0, u],$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\varphi(t)$*-ն ներկայացվի որպես* $R_{\gamma}(0, u]$ *դասի երկու աճողական ֆունկցիաների տարբերություն, որոնց գումարը պատկանում է*

$$AC_{\gamma, \varkappa}(0, u]$$

դասին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бадалян Г. В.* О критерии разложимости функций в квазистепенной ряд. Известия АН СССР (слана в печать).
2. *Бадалян Г. В.* Обобщенно регулярно монотонные функции. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 3, 1962.
3. *Бадалян Г. В.* Обобщенные факториальные ряды. Сообщения Института математики и механики АН АрмССР, вып. V, 1950.