

А. А. Хачатрян

## Об устойчивости прямоугольной пластинки при некоторых нагрузках

Рассмотрим прямоугольную пластинку, изготовленную из изотропного материала. Поместим начало координат в центре прямоугольника, а координатные оси направим параллельно его сторонам.

Допустим, что по краям пластинки кроме нормальных сжимающих усилий действуют также касательные усилия, меняющиеся по линейному закону

$$\begin{aligned} \text{на } x = \pm \frac{a}{2} \quad \sigma_x^0 &= -\gamma p, \quad \tau_{xy}^0 = \pm \frac{2\alpha p}{b} y, \\ \text{на } y = \pm \frac{b}{2} \quad \sigma_y^0 &= -\beta p, \quad \tau_{yx}^0 = \pm \frac{2\alpha p}{a} x, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a$ ,  $b$  — размеры пластинки;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — некоторые постоянные;  $p$  — величина давления.

Нетрудно показать, что напряженное состояние рассматриваемой пластинки под действием внешних нагрузок (1) определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p \left( \gamma - \frac{\alpha a}{2b} + \frac{2\alpha}{ab} x^2 \right), \\ \sigma_y &= -p \left( \beta - \frac{\alpha b}{2a} + \frac{2\alpha}{ab} y^2 \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{4\alpha p}{ab} xy. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассматривая внешнюю нагрузку (1), замечаем, что в ней  $p$  играет роль некоторого параметра, с увеличением или уменьшением которого соответственно увеличиваются или уменьшаются величины внешних сил. Вопрос устойчивости рассматриваемой пластинки под действием указанных внешних сил фактически будет сводиться к нахождению критического значения параметра  $p$ . Для определения последнего будем пользоваться энергетическим методом [1]. Согласно этому методу, критическое значение параметра внешней нагрузки определяется из уравнения

$$V = T \quad (3)$$

где  $V$  — энергия изгиба,  $T$  — работа сил, действующих в срединной плоскости пластинки

$$V = \frac{D}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy, \quad (4)$$

$$T = -\frac{h}{2} \iint \left[ \tau_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \tau_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \quad (5)$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $\mu$  — коэффициент Пуассона,  $w$  — прогиб, а  $h$  — толщина пластинки; интегрирование производится по всей площади пластинки.

Предположим, что пластинка свободно оперта по краям. В случае, когда рассматриваемая пластинка мало отличается от квадратной, можно допустить, что выпучивание ее происходит по одной полу-волне по направлениям координатных осей. Поэтому, полагая

$$w = A \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad (6)$$

где  $A$  — некоторая постоянная, удовлетворим граничным условиям свободного опирания пластинки.

Подставив (6) в (4) и (5) и выполнив интегрирование, найдем

$$V = \frac{\pi^4 D a b}{8} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 A^2, \quad (7)$$

$$T = \frac{\pi^2 p h}{8} A^2 \left[ \left( \gamma \frac{b}{a} + \beta \frac{a}{b} \right) - \frac{2\alpha}{3} \right]. \quad (8)$$

Учитывая (7) и (8), из (3) для критического значения параметра  $p$  будем иметь

$$p_{кр} = \frac{\pi^2 D a b}{h} \cdot \frac{\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}{\gamma \frac{b}{a} + \beta \frac{a}{b} - \frac{2\alpha}{3}}. \quad (9)$$

В этой формуле, принимая для коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  различные численные (как положительные, так и отрицательные) значения, получим значения для  $p_{кр}$  при различных случаях нагружения пластинки. Следует только учесть, что если при каких-либо значениях коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выражение для  $p_{кр}$  обращается в бесконечность или принимает отрицательное значение, то в таком случае пластинка не теряет устойчивости, т. е. при таком нагружении ее плоская форма устойчива.

В случае квадратной пластинки ( $b = a$ ) формула (9) упрощается и принимает вид

$$p_{кр} = \frac{4\pi^2 Da^2}{h} \cdot \frac{1}{\gamma + \beta - \frac{2\alpha}{3}} \quad (10)$$

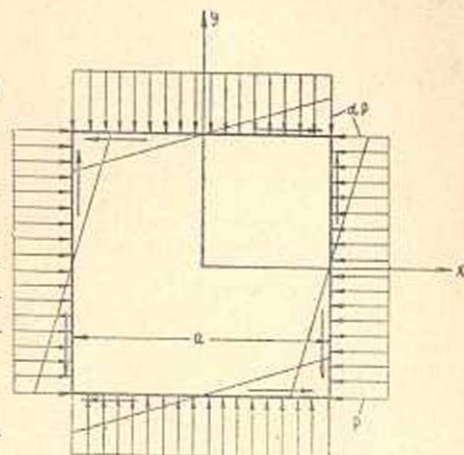
Рассмотрим более подробно случай, когда  $\gamma = \beta = 1$ , а  $\alpha \geq 0$ . Распределение внешней нагрузки для этого случая показано на фиг. 1.

В этом случае имеем

$$p_{кр} = \frac{2\pi^2 Da^2}{h \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)} \quad (11)$$

Заметим, что при  $\alpha = 0$  выражение (11) совпадает с известным значением критической силы для квадратной пластинки, равномерно сжатой в двух взаимно-перпендикулярных направлениях.

Как видно из (11), касательные напряжения существенно влияют на устойчивость пластинки. Например, если  $\alpha \geq 3$ , то пластинка не теряет устойчивости при любом значении сжимающего нормального давления  $p$ . Это имеет место, когда внешние касательные усилия действуют так, как это показано на фиг. 1. А если они действуют в противоположном направлении (для чего достаточно принять  $\alpha < 0$ ), то при этом они не только не препятствуют, но даже способствуют потере устойчивости пластинки. Отметим, что при  $\alpha < 0$  возможна потеря устойчивости пластинки даже при равномерном всестороннем растяжении ее. Например, это будет иметь место в том случае, когда  $\gamma = \beta = -1$ , а  $\alpha \leq -3$ .



Фиг. 1.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 13 IV 1962

Ա. Ա. Խաչատրյան

## ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՈՐՈՇ ԲԵՌԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկվում է եզրերով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը, երբ նա գտնվում է սեղմող և շոշափող ուժերի միաժամանակյա ազդեցության տակ: Այդ ուժերն իրենց մեծ պարունակում են  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  գործակիցներ, որոնց տարրեր արժեքներ տալով, ստացվում են տարրեր տիպի բնութագրվածություններ: Ազդող բեռերի կրիտիկական պարամետրի արժեքն

ստացվում է էներգետիկ մեթոդով: Վերջում, որպես մասնավոր դեպք, դիտարկվում է քառակուսի սալի կալունություն խնդիրը՝ նույնպիսի բևեռի աղգեցություն տակ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Госиздат, М.—Л., 1946.