

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. Киракосян

Релаксационная задача безмоментных
оболочек вращения

Задачи безмоментных оболочек в условиях ползучести рассматривались в работах Л. М. Качанова [1], И. И. Гольденблата, Н. А. Николаенко [2], В. И. Розенблюма [3] и других. В настоящей заметке ставится релаксационная задача металлических безмоментных оболочек вращения. Задача решается по теориям течения и старения. В качестве примера рассматривается релаксация круговой конической оболочки.

1. *Релаксация по теории течения.* Рассмотрим оболочку постоянной толщины h , срединная поверхность которой является поверхностью вращения. Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности будем определять меридиональной дугой s , отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка свободна от поверхностных нагрузок, один конец ее ($s = s_0$) зашпелен, а другой конец ($s = l$) растянут (сжат) по направлению меридиана на величину u_0 . В этом случае, если материал оболочки обладает свойством ползучести, произойдет релаксация напряжений в оболочке.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial s} + (T_2 - T_1) \frac{\sin \vartheta}{r} &= 0, \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где T_1 , T_2 и R_1 , R_2 — тангенциальные усилия и радиусы кривизны срединной поверхности оболочки, ϑ — угол между касательной к меридиану и осью вращения, r — расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения.

Граничные условия запишутся следующим образом

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_0 = \text{const}. \quad (1.2)$$

Здесь u — перемещение по меридиану, t — координата времени, отсчитываемая от начала процесса деформирования оболочки $t_0 = 0$.

Геометрические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\sin \vartheta}{r} u + \frac{w}{R_2},\end{aligned}\quad (1.3)$$

где ε_1 , ε_2 и w — компоненты деформации и прогиб оболочки.

Интегрируя статические уравнения (1.1), для нормальных напряжений σ_1 и σ_2 получим [3]

$$\sigma_1(s, t) = \frac{T_1}{h} = \frac{c(t)}{R_2 h \cos^2 \vartheta}, \quad (1.4)$$

$$\sigma_2(s, t) = \frac{T_2}{h} = -\frac{c(t)}{R_1 h \cos^2 \vartheta}. \quad (1.5)$$

Здесь $c(t)$ — произвольная функция интегрирования.

Из геометрических соотношений (1.3) с учетом условий (1.2) получим [3]

$$u(s, t) = \cos \vartheta \int_0^s \frac{1}{\cos \vartheta} \left(\varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2 \right) ds, \quad (1.6)$$

$$w(s, t) = R_1 \varepsilon_1 - R_1 \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Для скоростей деформации $\dot{\xi}_1$ и $\dot{\xi}_2$, в условиях степенной зависимости и подобия кривых ползучести, по теории течения имеем [1]

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \frac{1}{2} B(t) T^{m-1} (\sigma_1 - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma_1 - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right), \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{2} B(t) T^{m-1} (\sigma_2 - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma_2 - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right).\end{aligned}\quad (1.7)$$

где $B(t)$ — коэффициент ползучести для объемного напряженного состояния, m — показатель ползучести, $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}$ — среднее гидростатическое давление, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, T — интенсивность касательных напряжений. В данном случае

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \quad (1.8)$$

Учитывая (1.4), (1.5) и (1.8), из (1.7) получим

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= A_1(s) B_1(t) c^m(t) + \frac{1}{2G} A_2(s) \frac{dc(t)}{dt}, \\ \dot{\xi}_2 &= A_3(s) B_1(t) c^m(t) + \frac{1}{2G} A_4(s) \frac{dc(t)}{dt},\end{aligned}\quad (1.9)$$

где

$$A_1(s) = \frac{(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)^{\frac{m-1}{2}} (2R_1 + R_2)}{2(R_1 R_2 h \cos^2 \vartheta)^m}, \quad (1.10)$$

$$A_2(s) = \frac{1}{R_2 h \cos^2 \vartheta} \left(1 - \frac{\nu}{1+\nu} + \frac{R_2}{R_1} \frac{\nu}{1+\nu} \right), \quad (1.11)$$

$$A_3(s) = - \frac{(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)^{\frac{m-1}{2}} (2R_2 + R_1)}{2(R_1 R_2 h \cos^2 \vartheta)^m}, \quad (1.12)$$

$$A_4(s) = \frac{1}{R_2 h \cos^2 \vartheta} \left(\frac{R_2}{R_1} \frac{\nu}{1+\nu} - \frac{R_2}{R_1} \frac{\nu}{1+\nu} \right), \quad (1.13)$$

$B_1(t) = \frac{B(t)}{3^{\frac{m+1}{2}}}$ — есть коэффициент ползучести для одноосного напряженного состояния.

Компоненты деформации выражаются через соответствующие скорости деформации по следующим формулам

$$\varepsilon_1(s, t) = \varepsilon_1'(s) + \int_0^t \xi_1(s, t) dt, \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_2(s, t) = \varepsilon_2'(s) + \int_0^t \xi_2(s, t) dt,$$

где штрихом обозначены мгновенные (упругие) значения соответствующих величин, которые полагаются известными.

Внося (1.14) в первое уравнение (1.6), получим

$$u(s, t) = u'(s) + \cos \vartheta \int_0^s \frac{1}{\cos \vartheta} \left[\int_0^t \left(\xi_1 - \frac{R_2}{R_1} \xi_2 \right) dt \right] ds. \quad (1.15)$$

Последнее условие (1.2) с помощью (1.15) запишется следующим образом

$$\cos \vartheta_1 \int_0^l \frac{1}{\cos \vartheta} \left[\int_0^t \left(\xi_1 - \frac{R_2}{R_1} \xi_2 \right) dt \right] ds = 0, \quad (1.16)$$

где

$$\vartheta_1 = \vartheta(l), \quad \vartheta_1 \neq \frac{\pi}{2}. \quad (1.17)$$

После некоторых преобразований, (1.16) можно привести к виду

$$\int_0^l \frac{1}{\cos \vartheta} \left(\xi_1 - \frac{R_2}{R_1} \xi_2 \right) ds = 0, \quad (1.18)$$

откуда, с учетом (1.9)–(1.13), будем иметь

$$AB_1(t)c^m(t) + B \frac{dc(t)}{dt} = 0, \quad (1.19)$$

где

$$A = \frac{1}{h^m} \int_0^l \frac{(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)^{\frac{m+1}{2}}}{R_1^{m+1} R_2^m \cos^{2m+1} \vartheta} ds, \quad (1.20)$$

$$B = \frac{1}{2Gh(1+\nu)} \int_0^l \frac{R_1^2 + 2R_1 R_2 \nu + R_2^2}{R_1^2 R_2 \cos^2 \vartheta} ds. \quad (1.21)$$

Принтегрировав (1.19) при начальном условии

$$c(t)|_{t=0} = c', \quad (1.22)$$

и учитывая (1.5), получим

$$\rho(t) = \frac{c(t)}{c'} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1'} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2'} = \frac{1}{m \sqrt{1 + (m-1)t^*}}, \quad (1.23)$$

где

$$t^* = \frac{A}{B} \Omega_1(t) (c')^{m-1} = \frac{A}{B} \Omega_1(t) (R_2 h \sigma_1' \cos^2 \vartheta)^{m-1}, \quad (1.24)$$

$$\Omega_1(t) = \int_0^t B_1(s) ds. \quad (1.25)$$

Из (1.23) легко заметить, что в любом поперечном сечении оболочки процесс релаксации протекает одинаково.

После определения $c(t)$, вычисление перемещений u и w не представляет особого труда и мы на этом не останавливаемся.

2. Релаксация по теории старения. Исходя из основных положений теории старения, для соотношений ползучести имеем [1]

$$\varepsilon_1(s, t) = \frac{1}{2} \Omega(t) T^{m-1} (\sigma_1 - \sigma) + \frac{1}{2G} \left(\sigma_1 - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right), \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_2(s, t) = \frac{1}{2} \Omega(t) T^{m-1} (\sigma_2 - \sigma) + \frac{1}{2G} \left(\sigma_2 - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right),$$

где

$$\Omega(t) = 3^{\frac{m+1}{2}} \Omega_1(t). \quad (2.2)$$

Пользуясь формулами (1.4), (1.5) и (1.8), из (2.1) получим

$$\varepsilon_1(s, t) = A_1(s) \Omega_1(t) c^m(t) + \frac{1}{2G} A_2(s) c(t), \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_2(s, t) = A_3(s) \Omega_1(t) c^m(t) + \frac{1}{2G} A_4(s) c(t).$$

Внеся (2.3) в первую формулу (1.6) и учитывая последнее условие (1.2), после интегрирования от нуля до l получим

$$A\Omega_1(t)c^m(t) + Bc(t) = \frac{u_0}{\cos \vartheta_1}. \quad (2.4)$$

Так как (2.4) справедливо при любом t , то, полагая $t = t_0 = 0$ и учитывая, что

$$\Omega_1(t)|_{t=0} = 0, \quad c(t)|_{t=0} = c', \quad (2.5)$$

получим

$$u_0 = Bc' \cos \vartheta_1. \quad (2.6)$$

Внеся (2.6) в (2.4), после некоторых преобразований получим формулу для безразмерного времени

$$t^* = \frac{1 - \rho}{\rho^m}. \quad (2.7)$$

Сравнивая (2.7) и (1.23) заключаем, что кривые релаксации, полученные по теории старения, располагаются выше кривых, полученных по теории течения.

3. *Пример.* В качестве примера рассмотрим релаксацию круговой конической оболочки (фиг. 1).

Для этого случая

$$\vartheta = \text{const}, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = \frac{r}{\cos \vartheta}, \quad (3.1)$$

где

$$r = r_0 - s \sin \vartheta. \quad (3.2)$$

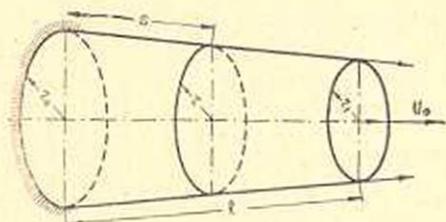
Пользуясь формулами (1.20) и (1.21), с учетом (3.1) и (3.2) из (1.24) получим

$$t^* = \frac{E\Omega_1(t)(\sigma_1')^{m-1}(r_0 - s \sin \vartheta)^{m-1}}{(m-1) \ln \frac{r_0}{r_1}} \left(\frac{1}{r_1^{m-1}} - \frac{1}{r_0^{m-1}} \right). \quad (3.3)$$

Если в (3.3) перейдем к пределу при $r_1 \rightarrow r_0 = R = \text{const} \neq 0$, то получим значение t^* для цилиндрической оболочки радиуса R

$$t_u^* = E\Omega_1(t)(\sigma_1')^{m-1}. \quad (3.4)$$

Этот результат, как и следовало ожидать, ничем не отличается от формулы, выведенной для стержня.



Фиг. 1.

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

ՊՏՏՄԱՆ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՌԵԼԱՔՍԱՑԻՈՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Հոդվածում գիտարկվում է պատման անմոմենտ մետաղական թաղանթների սելաքսացիոն խնդիրը: Ընդհանուր լուծումը արվում է ըստ Լ. Մ. Կաչանովի [1] մշակած հոսունություն և ձերացման տեսությունների: Որպես օրինակ լուծված է պատման կոնական թաղանթի սելաքսացիոն խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Ползучесть и несущая способность оболочек. Научные сообщения ЦНИИСК, № 13, 1960.
3. Розенблюм В. И. О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек. ПМТФ, № 4, 1960.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Ленинград, 1951.