

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. С. Саркисян

О жестко-пластическом изгибе анизотропной консоли

В работе А. Грина [1] по схеме жестко-пластического материала исследовано пластическое течение при изгибе изотропной консольной балки. В работе [1] при определении предельной нагрузки учитывается влияние касательных напряжений, которое для коротких балок существенно.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для случая, когда материал балки обладает пластической анизотропией.

§ 1. Теория, относящаяся к пластически анизотропным материалам, основывается на работах [2]—[5].

На основании работ [4], [5] можно показать, что в случае анизотропного тела бесконечно малый элемент, выделенный линиями скольжения, дифференциальные уравнения которых имеют вид [4]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\alpha), \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\beta), \quad (1.1)$$

испытывает, в отличие от изотропного тела, неодинаковое растяжение (сжатие) в направлениях линий скольжения. Если условимся фиксировать направления линий скольжения (характеристик)  $\alpha$ ,  $\beta$  так, чтобы они образовали правую систему координат, то нормальные и касательные напряжения, действующие на элемент, определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2(\varphi - \psi), & \sigma_y &= \sigma + \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2(\varphi - \psi), \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} Y(\varphi) \cos 2(\varphi - \psi). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $Y(\varphi)$  — функция, характеризующая анизотропию материала,  $\sigma$  — среднее давление,  $\varphi$  — угол между направлением наибольшего главного напряжения и фиксированной осью  $x$ ,  $\psi$  — угол между направлением наибольшей главной скорости деформации и осью  $x$ . Они определяются следующими формулами [4]

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y), \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

$$\psi = \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{Y'(\varphi)}{2Y(\varphi)}. \quad (1.3)$$

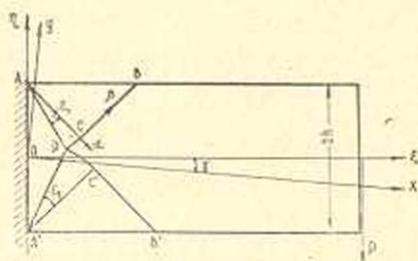
Для удобства введем обозначение

$$\Delta\varphi = \varphi - \psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{Y'(\varphi)}{2Y(\varphi)}, \quad (1.4)$$

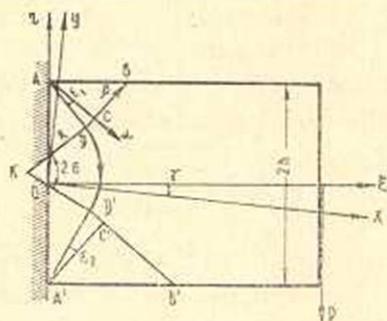
где  $\Delta\varphi$  — функция, характеризующая отклонение угла  $\varphi$  от угла  $\psi$ , вызванное анизотропией материала. Согласно (1.4) формулы (1.2) выразятся через угол  $\varphi$  следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2\Delta\varphi, & \sigma_y &= \sigma + \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2\Delta\varphi, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} Y(\varphi) \cos 2\Delta\varphi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

§ 2. Рассмотрим консольную балку, постоянного прямоугольного поперечного сечения, длиной  $l$ . Один конец балки  $AA'$  жестко закреплен, а на другой конец действует изгибающая сила  $P$  (на единицу ширины), достаточная для появления пластического течения.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Решения строятся по схеме жестко-пластического материала для случая плоской деформации. Можно показать, что эти решения при условии текучести, изложенном в [5], пригодны и для плоского напряженного состояния.

В общем случае, когда оси анизотропии  $(x, y)$  материала не совпадают с геометрическими осями симметрии балки  $(\xi, \eta)$ , поля линий скольжения будут несимметричными. На фиг. 1 и 2 показаны два типа кинематически возможных полей линий скольжения. Пределы применимости этих решений зависят от характера анизотропии материала и геометрических размеров балки, при этом первый тип решения (фиг. 1) относится к большим значениям  $l/2h$ , а второй тип (фиг. 2) — к меньшим значениям.

Рассмотрим первый тип линий скольжения.

В равномерной области  $ABC$  имеют место:  $\varphi = \gamma$ ,  $\psi = \gamma - \Delta\gamma$ , следовательно угол между прямой  $AC$  и осью  $O\xi$  будет

$\psi - \frac{\pi}{4} - \gamma = -\left(\frac{\pi}{4} + \Delta\gamma\right)$ . В области  $A'B'C'$  соответственно  $\varphi =$   
 $= \gamma + \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi = \gamma + \frac{\pi}{2} - \Delta\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$ , угол прямой  $A'C'$  с осью  $Oz$   
будет равен  $\frac{\pi}{4} - \Delta\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)$ . К равномерным областям примыкают  
центрированные поля  $ACD$  и  $A'C'D$ , для которых из условия  
 $\sigma + G(\varphi) = \text{const}$  получим значения средних давлений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответ-  
ственно на отрезках  $AD$  и  $A'D$ .

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} Y(\gamma) + G(\gamma) - G(\varphi_1),$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} Y\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) + G\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - G(\varphi_2). \quad (2.1)$$

Здесь

$$G(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \sqrt{Y'^2(\varphi) + 4Y^2(\varphi)} d\varphi, \quad (2.2)$$

а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — значения функции  $\varphi$  на отрезках  $AD$  и  $A'D$  соответственно.  
Значения угла  $\psi$  на этих отрезках будут

$$\psi_1 = \gamma - \Delta\gamma - \varepsilon_1, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 + \gamma - \Delta\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right).$$

Положение точки  $D$ , общей для двух центрированных полей,  
неизвестно, оно определяется после нахождения углов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Из геометрических соображений длины отрезков  $AD$  и  $A'D$   
можно выразить через значение угла  $\psi$  на этих отрезках в следующем  
виде

$$d_1 = \frac{2h \sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}, \quad d_2 = \frac{2h \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим равновесие части консоли справа от линии  $ADA'$ .  
Условия равенства нулю сумм проекций сил на оси  $x$ ,  $y$  приводят к  
уравнениям

$$\begin{aligned} \sigma_n d_1 \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n' d_2 \cos\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n d_1 \cos\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \\ - \tau_n' d_2 \cos\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) = P \sin \gamma, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\sigma_n' d_2 \sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n d_1 \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \tau_n d_1 \sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ \tau'_n d_2 \sin\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) = P \cos \gamma, \quad (2.5)$$

а условие равенства нулю суммы моментов относительно  $D$  даст

$$\frac{1}{2} \sigma_n d_1^2 - \frac{1}{2} \sigma'_n d_2^2 = P \left[ l - d_1 \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right) \right], \quad (2.6)$$

где  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  и  $\sigma'_n$ ,  $\tau'_n$  — нормальные и касательные напряжения соответственно на отрезках  $AD$  и  $AD'$ , которые согласно формулам (1.2), (1.5) будут иметь вид

$$\sigma_n = \sigma_1 + \frac{1}{2} Y(\varphi_1) \sin 2\Delta\varphi_1, \quad \tau_n = \frac{1}{2} Y(\varphi_1) \cos 2\Delta\varphi_1, \quad (2.7)$$

$$\sigma'_n = \sigma_2 + \frac{1}{2} Y(\varphi_2) \sin 2\Delta\varphi_2, \quad \tau'_n = \frac{1}{2} Y(\varphi_2) \cos 2\Delta\varphi_2. \quad (2.8)$$

Выразив  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в уравнениях (2.4) и (2.5) через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , для определения последних получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} & \sigma_1 d_1 \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_2 d_2 \cos\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \\ & + \frac{1}{2} d_1 Y(\varphi_1) \cos\left(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} d_2 Y(\varphi_2) \cos\left(\varphi_2 + \Delta\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) = \\ & = P \sin \gamma, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & \tau_2 d_2 \sin\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tau_1 d_1 \sin\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \\ & - \frac{1}{2} d_1 Y(\varphi_1) \sin\left(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} d_2 Y(\varphi_2) \sin\left(\varphi_2 + \Delta\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) = \\ & = P \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Исходя из условия, что критерий текучести не должен быть нарушен в угле жесткой области между  $CD$  и  $C'D$ , и принимая линию  $ADA'$  в качестве предельного случая непрерывной линии характеристик, получим

$$\bar{G}(\varphi_2 - \pi) - \bar{G}(\varphi_1) \leq \frac{1}{2} \left[ \bar{G}\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) - \bar{G}(\gamma) - Y(\gamma) \right]. \quad (2.11)$$

В случае равенства в условии (2.11) возможен и второй тип линий скольжения.

Рассмотрим теперь второй тип линий скольжения. В этом случае прилегающие к равномерным полям центрированные поля  $ADC$  и  $A'D'C'$  соединяются с изолированной круговой линией скольжения  $DD'$  радиуса  $R$ . В области  $ABC$  имеют место:  $\varphi = \gamma$ ,  $\psi = \gamma - \Delta\gamma$ , а в области  $A'B'C'$ :  $\varphi = \gamma - \frac{\pi}{2}$ ,  $\psi = \gamma - \frac{\pi}{2} - \Delta\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$ . Повторяя

аналогичные рассуждения, получим значения среднего давления соответственно на отрезках  $AD$  и  $A'D'$  в следующем виде

$$\tau_1 = \frac{1}{2} Y(\gamma) + G(\gamma) - G(\varphi_1), \quad (2.12)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{2} Y\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) + G\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) - G(\varphi_2).$$

Значения  $\psi$  на линиях  $AD$  и  $A'D'$  соответственно равны

$$\psi_1 = \gamma - \varepsilon_1 - \Delta(\gamma), \quad \psi_2 = \gamma - \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 - \Delta\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$$

откуда получим, что

$$\varepsilon_1 = -\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \gamma - \Delta\gamma, \quad \varepsilon_2 = \varphi_2 - \Delta\varphi_2 - \gamma + \Delta\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}. \quad (2.13)$$

Поскольку линия  $ADD'A'$  — непрерывная линия скольжения, то на ней  $\varepsilon - G(\varphi) = \text{const}$ , откуда нетрудно получить следующее уравнение, связывающее неизвестные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$

$$G(\varphi_2) - G(\varphi_1) = \frac{1}{2} \left[ G\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) - G(\gamma) - \frac{1}{2} Y(\gamma) - \frac{1}{2} Y\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (2.14)$$

В предельном состоянии правая часть консоли скользит по дуге окружности  $DD'$ . Положение центра окружности  $k$  определяется после нахождения углов  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и радиуса  $R$ .

Условия равенства нулю сумм проекций на оси  $x$ ,  $y$  сил, действующих на части балки правее линии  $ADD'A'$ , приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} & \tau_n d_1 \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n' d_2 \cos\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n d_1 \cos\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \\ & + \tau_n' d_2 \cos\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) + R \int_{\psi_2}^{\psi_1} \tau_n^* \cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) d\psi + \\ & + R \int_{\psi_2}^{\psi_1} \tau_n^* \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) d\psi = P \sin \gamma, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \tau_n d_1 \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n' d_2 \cos\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tau_n d_1 \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \\ & - \tau_n' d_2 \sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - R \int_{\psi_2}^{\psi_1} \tau_n^* \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) d\psi - \end{aligned}$$

$$-R \int_{\psi_1}^{\psi_2} \tau_n^* \sin\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) d\psi = P \cos \gamma. \quad (2.16)$$

Условие равенства нулю суммы моментов сил относительно точки  $k$  дает

$$\frac{1}{2} \sigma_n d_1^2 - \frac{1}{2} \sigma_n' d_2^2 + R \int_{\psi_1}^{\psi_2} \tau_n^* d\psi + \tau_n d_1 R + \tau_n' d_2 R = Pl', \quad (2.17)$$

где  $\sigma_n^*$  и  $\tau_n^*$  — нормальные и касательные напряжения на дуге окружности  $DD$ , значения которых можно найти из условия  $\sigma = G(\varphi) = \text{const}$  на линии скольжения  $ADD'A'$

$$\sigma_n^* = \sigma_1 - G(\varphi_1) + G(\varphi) + \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2(\varphi - \psi), \quad (2.18)$$

$$\tau_n^* = \frac{1}{2} Y(\varphi) \cos 2(\varphi - \psi),$$

$$d_1 = \frac{2h \sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)} - R \operatorname{tg} \delta, \quad (2.19)$$

$$d_2 = \frac{2h \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{\sin(\psi_1 - \psi_2)} - R \operatorname{tg} \delta,$$

$$l' = l + R \cos \delta - d_1 \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right), \quad 2\delta = \psi_1 - \psi_2. \quad (2.20)$$

Исключив из уравнений (2.14)–(2.17) величины  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , получим систему четырех уравнений относительно неизвестных  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $R$  и предельной нагрузки  $P$ .

$$\begin{aligned} & \sigma_n d_1 \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma_n' d_2 \cos\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \\ & + \tau_n d_1 \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n' d_2 \cos\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) + \\ & + R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi(\varphi) \sigma_n^* \cos\left(\varphi - \Delta\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi + \\ & + R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi(\varphi) \tau_n^* \cos\left(\varphi - \Delta\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = P \sin \gamma, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & \tau_n d_1 \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau'_n d_2 \cos\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \\ & - \sigma_n d_1 \sin\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma'_n d_2 \sin\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \\ & - R \int_{\varphi_1}^{\varphi'_1} \Phi(\varphi) \sigma_n^* \sin\left(\varphi - \Delta\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi - \\ & - R \int_{\varphi_2}^{\varphi'_2} \Phi(\varphi) \tau_n^* \sin\left(\varphi - \Delta\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = P \cos \gamma, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{2} \sigma_n d_1^2 - \frac{1}{2} \sigma'_n d_2^2 + R \int_{\varphi_2}^{\varphi'_2} \Phi(\varphi) \tau_n^* d\varphi + \tau_n d_1 R + \tau'_n d_2 R = Pl', \quad (2.23)$$

где введено обозначение

$$\Phi(\gamma) = 1 - \frac{d}{d\varphi} \Delta\varphi = \frac{4Y^2(\varphi) - Y''(\varphi)Y(\varphi) + 2Y'^2(\varphi)}{4Y^2(\varphi) + Y'^2(\varphi)}. \quad (2.24)$$

Таким образом, как в первом, так и во втором типе поля характеристик получаем систему трансцендентных уравнений, которая при заданной функции анизотропии  $Y(\varphi)$  можно решить только численными методами.

§ 3. Задача несколько упрощается в случае, когда геометрическая ось балки совпадает с одной из главных осей анизотропии материала балки, т. е. когда  $\gamma = 0$ . В этом случае из соображений симметрии и из того, что функция  $Y(\varphi)$  — периодическая функция с периодом  $\pi/2$  [4] следует симметричность полей линий скольжения относительно оси балки, как это имеет место в случае изотропной балки, где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ,  $d_1 = d_2 = d$ .

При первом типе решения, согласно изложенным выше соображениям, из уравнений равновесия (2.4)–(2.6) следует, что

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi_1 = -\Delta\varphi_2, \quad (3.1)$$

$$\tau_n d \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n d \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} P, \quad (3.2)$$

$$\sigma_n d^2 = P \left[ l - d \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (3.3)$$

Подставив значения  $\sigma_n$ ,  $\tau_n$  и  $d$  в уравнения (3.1)–(3.3), для определения угла  $\varphi_1$  и предельной нагрузки  $P$  получим следующую систему двух трансцендентных уравнений

$$Y(\varphi_1) \cos\left(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - [Y(0) - 2G(\varphi_1)] \sin\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{P}{h} \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2} Y(0) - G(\varphi_1) + \frac{1}{2} Y(\varphi_1) \sin 2\Delta\varphi_1 =$$

$$= \frac{P}{h} \left[ \frac{l}{h} - \operatorname{tg}\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) \right] \cos^2\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.5)$$

Предельное значение угла  $\varphi_1$ , при котором возможен первый тип поля линий скольжения, определяется из уравнения

$$G\left(-\varphi_1^* - \frac{\pi}{4}\right) - G(\varphi_1^*) = \frac{1}{2} G\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} Y(0). \quad (3.6)$$

Аналогично для второго типа решения, когда  $\gamma = 0$ , получим

$$\psi_1 + \psi_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad \Delta\varphi_1 = -\Delta\varphi_2 \quad (3.7)$$

$$\tau_n d \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n d \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + R \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\psi_1} \tau_n^* \cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) d\psi -$$

$$- R \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\psi_1} \sigma_n^* \sin\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) d\psi = \frac{1}{2} P, \quad (3.8)$$

$$2\tau_n R d + \sigma_n d^2 + 2R \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\psi_1} \tau_n^* d\psi = P l', \quad (3.9)$$

где

$$l' = l + R \cos \delta - d \sin \delta, \quad d \cos \delta + R \sin \delta = h, \quad \delta = \frac{\pi}{4} + \psi_1, \quad (3.10)$$

откуда для определения неизвестных  $\varphi_1$ ,  $R$  и предельной нагрузки получим следующую систему трех трансцендентных уравнений

$$G\left(-\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) - G(\varphi_1) = \frac{1}{2} \left[ G\left(-\frac{\pi}{2}\right) - Y(0) \right], \quad (3.11)$$

$$\tau_n d \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n d \sin\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- R \left[ 1 - \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) \right] \left[ \sigma_1 - G(\varphi_1) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} R \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\varphi_1} \Phi(\varphi) \cos\left(\varphi + \Delta\varphi + \frac{\pi}{4}\right) Y(\varphi) d\varphi - \\
 & - R \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\varphi_1} \Phi(\varphi) G(\varphi) \sin\left(\varphi - \Delta\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = \frac{1}{2} P, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_n d^2 + 2\tau_n R d + R \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\varphi_1} \Phi(\varphi) Y(\varphi) \cos 2\Delta\varphi d\varphi = P l. \quad (3.13)$$

Системы (3.8)–(3.13) можно решить только при наличии конкретной функции  $Y(\varphi)$ , характеризующей анизотропию материала балки. Не имея экспериментальных данных, для выяснения некоторых особенностей пластической анизотропии в данной задаче, предположим, что анизотропия материала балки характеризуется функцией

$$Y(\varphi) = Y_0 (1 + \lambda \cos 4\varphi), \quad \text{где } |\lambda| < 1. \quad (3.14)$$

Подставив (3.14) в (1.4) и (2.2), получим

$$\varphi - \psi = -\frac{1}{2} \arg \operatorname{tg} \frac{2\lambda \sin 4\varphi}{1 + \lambda \cos 4\varphi}, \quad (3.15)$$

$$G(\varphi) = Y_0 \sqrt{1 + 4\lambda^2} \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \frac{2\lambda \cos 4\varphi}{1 + 4\lambda^2} - \frac{3\lambda^2 \cos^2 4\varphi}{1 + 4\lambda^2}} d\varphi.$$

Интеграл в выражениях (3.15) можно вычислить с любой точностью, разложением радикала в ряд по формуле бинома.

Численные расчеты производились для случая, когда  $\gamma = 0$ , при разных значениях параметра  $\lambda$ . При значении  $\lambda = 0$  полученные результаты совпадают с соответствующими результатами изотропной балки [1], [3], если принять  $Y_0 = 2K_s$ , где  $K_s$  — предел текучести материала при чистом сдвиге.

В таблице 1 приведены те критические значения величин, при которых первый тип решений переходит во второй.

Таблица 1

	$l/2h$	$P/Y_0$	$d/2h$	$\varphi_1$	"
$\lambda=0,3$	730,59	0,0005	0,643	$-3^\circ 8' 33''$	$6^\circ 1' 35''$
$\lambda=0,2$	127,15	0,0024	0,635	$-4^\circ 11' 38''$	$6^\circ 57' 33''$
$\lambda=0$	13,73	0,0188	0,625	$-8^\circ 10' 44''$	$8^\circ 10' 44''$
$\lambda=-0,2$	2,79	0,0753	0,647	$-16^\circ 26' 38''$	$5^\circ 36' 25''$

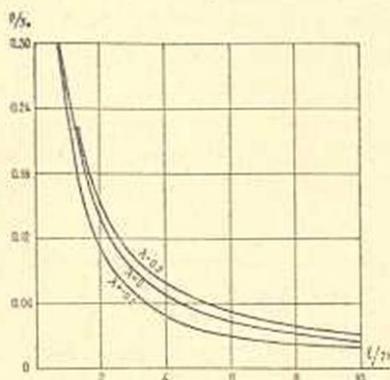
В таблице 2 приведены результаты вычислений, полученные из первого и второго типа решений.

Таблица 2

	$l/2h$	$P/Y_0$	$d/2h$	$R/2h$	$\varphi_1$	$\epsilon$
$\lambda = -0,2$	0,449	0,3981	0	0,788	$-16^{\circ}26'38''$	$5^{\circ}36'25''$
	1,000	0,2354	0,325	0,391	$-16^{\circ}26'38''$	$5^{\circ}36'25''$
	2,000	0,1114	0,575	0,088	$-16^{\circ}26'38''$	$5^{\circ}36'25''$
	2,788	0,0753	0,647	0	$-16^{\circ}26'33''$	$5^{\circ}36'25''$
	5,378	0,0374	0,692	0	$-9^{\circ}10'2''$	$1^{\circ}13'32''$
	8,476	0,0236	0,702	0	$-5^{\circ}43'46''$	$0^{\circ}12'27''$
	10,540	0,0190	0,705	0	$-4^{\circ}35'1''$	$0^{\circ}8'4''$
$\lambda = 0$	0,58	0,3583	0	0,834	$-8^{\circ}10'44''$	$8^{\circ}10'44''$
	1,00	0,2591	0,183	0,580	$-8^{\circ}10'44''$	$8^{\circ}10'44''$
	3,00	0,0923	0,489	0,181	$-8^{\circ}10'44''$	$8^{\circ}10'44''$
	5,00	0,0538	0,560	0,086	$-8^{\circ}10'44''$	$8^{\circ}10'44''$
	8,00	0,0328	0,599	0,035	$-8^{\circ}10'44''$	$8^{\circ}10'44''$
	10,00	0,0260	0,611	0,018	$-8^{\circ}10'44''$	$8^{\circ}10'44''$
$\lambda = 0,2$	1,215	0,2110	0	0,811	$-4^{\circ}11'38''$	$6^{\circ}57'33''$
	3,00	0,1046	0,324	0,398	$-4^{\circ}11'38''$	$6^{\circ}57'33''$
	5,00	0,0636	0,449	0,238	$-4^{\circ}11'38''$	$6^{\circ}57'33''$
	8,00	0,0394	0,522	0,144	$-4^{\circ}11'38''$	$6^{\circ}57'33''$
	10,00	0,0314	0,547	0,113	$-4^{\circ}11'38''$	$6^{\circ}57'33''$
$\lambda = 0,3$	1,808	0,1479	0	0,795	$-3^{\circ}8'33''$	$6^{\circ}1'35''$
	3,00	0,1047	0,193	0,57	$-3^{\circ}8'33''$	$6^{\circ}1'35''$
	5,00	0,0663	0,356	0,335	$-3^{\circ}8'33''$	$6^{\circ}1'35''$
	8,00	0,0420	0,462	0,224	$-3^{\circ}8'33''$	$6^{\circ}1'35''$
	10,00	0,0336	0,499	0,179	$-3^{\circ}8'33''$	$6^{\circ}1'35''$

Результаты произведенных вычислений показывают, что анизотропия материала оказывает существенное влияние на предельное состояние жестко-пластического материала. При этом анизотропия материала на распределение пластических зон сказывается сильнее, чем на предельную нагрузку.

На фиг. 3 приведен график, показывающий зависимость между  $\frac{P}{Y_0}$  и  $\frac{l}{2h}$  при значениях  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \pm 0,2$ .



Фиг. 3.

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. Л. М. Качанову за ценные советы и помощь в работе.

Մ. Ս. Սարգսյան

ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՀԵԾԱՆԻ ԿՈՇՏ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[1] աշխատության մեջ կոշտ-պլաստիկական նյութի սխեմայի համաձայն՝ ուսումնասիրված է իզոտրոպ հեծանի ծաման ժամանակ պլաստիկական հոսունությունը: Այդ աշխատության մեջ սահմանալին բևուր որոշման ժամանակ հաշվի են առնված շոշափող լարումների ազդեցությունները, որոնք կարճ հեծանների համար էական են:

Ներկա աշխատության մեջ զիտարկված է անալոգ խնդիր այն դեպքում, երբ հեծանի նյութն ունի պլաստիկական անիզոտրոպիա:

Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ նյութի անիզոտրոպիան էապես ազդեցություն է գործում կոշտ-պլաստիկական նյութի սահմանալին վիճակի վրա: Ընդ որում նյութի անիզոտրոպությունն ավելի շատ ազդեցություն է գործում պլաստիկական զոնաների բաշխման, քան սահմանալին բևուր վրա:

Ստացված արդյունքների համար կազմված են աղյուսակներ և գրաֆիկ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Грин А. Теория пластического течения изгибаемых консолей и балок. Механика (сб. переводов), вып. 4, 1955.
2. Ивлев Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ 23, вып. 6, 1959.
3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
4. Саркисян М. С. К теории плоской деформации пластически анизотропных тел. ПММ, 24, вып. 6, 1960.
5. Саркисян М. С. К плоской задаче пластически анизотропных тел. ПМТФ, № 2, 1962.