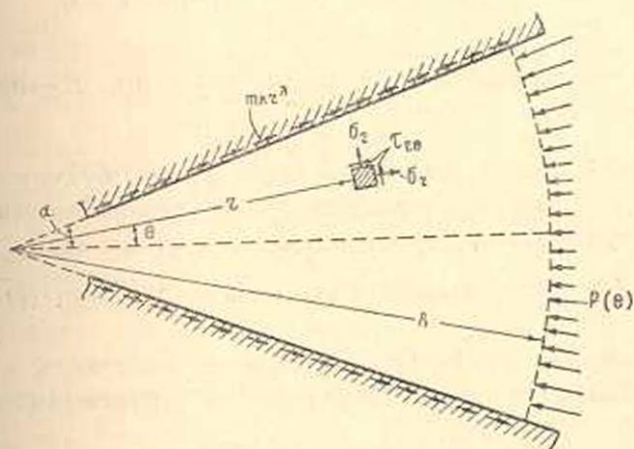


ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. А. Задоян

О течении пластически неоднородного материала через сходящийся канал

Равновесие идеально-пластической массы, сжатой между двумя наклонными жесткими плитами, впервые рассмотрено А. Надаи [1]. На основании результатов А. Надаи по жестко-пластической схеме Р. Хилл [2] определил характер течения пластического материала по сходящемуся каналу. Такая задача в случае упрочнения материала, а также аналогичная осесимметричная задача, исследованы В. В. Соколовским [3].



Фиг. 1.

Рассмотрим задачу о течении идеально-пластической неоднородной массы через сходящийся длинный канал, стенки которого—жесткие, шероховатые плиты, наклоненные друг к другу под углом 2α (фиг. 1). Характер неоднородности материала принимаем по степенному закону, т. е. вместо пластической постоянной полагаем kr^λ , где k и λ —заданные параметры. По аналогии с вышеупомянутыми работами, касательные напряжения на поверхностях контактов принимаем равным mkr^λ . Параметр m меняется от нуля до единицы в зависимости от степени шероховатости плит. Для идеально шероховатых плит $m = 1$.

Уравнения равновесия и условие пластичности запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} = 0,$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2 r^{2\lambda}. \quad (2)$$

Компоненты напряжения ищем в виде

$$\sigma_r = F(r) - 2kC \left(\ln r - \frac{r^\lambda}{\lambda} \right) - \frac{kr^\lambda}{\lambda} [f'(\theta) + 2\sqrt{1-f^2(\theta)}], \quad (3)$$

$$\sigma_\theta = F(r) - 2kC \left(\ln r - \frac{r^\lambda}{\lambda} \right) - \frac{kr^\lambda}{\lambda} [f'(\theta) + 2(1+\lambda)\sqrt{1-f^2(\theta)}], \quad (4)$$

$$\tau_{r\theta} = kr^\lambda f(\theta), \quad (5)$$

где

$$F(r) = \begin{cases} E + 2Ck \left[\ln r - \frac{r^\lambda}{\lambda} \right] & \text{при } \lambda \neq 0, \\ E & \text{при } \lambda = 0, \end{cases}$$

$f(\theta)$ — неизвестная функция от θ , $C = 1 + \frac{1}{2}f'(0)$, E — произвольная постоянная.

Выражения компонентов напряжения (3)–(5) будут тождественно удовлетворять уравнению равновесия (1) и условию пластичности (2), если $f(\theta)$ определить из дифференциального уравнения

$$\sqrt{1-f^2(\theta)} f''(\theta) - 2(1+\lambda) f(\theta) f'(\theta) - \lambda(2+\lambda) \sqrt{1-f^2(\theta)} f(\theta) = 0. \quad (6)$$

Из условий, поставленных на поверхностях контактов, в случае течения, симметричного относительно оси $\theta = 0$, будем иметь

$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = m. \quad (7)$$

Введя новую неизвестную функцию

$$f' = \frac{\sqrt{1-f^2}}{W}, \quad \theta = \int_0^f \frac{W(f) df}{\sqrt{1-f^2}} \quad (8)$$

из (6) получим

$$\frac{dW}{df} + \frac{fW[1 + 2(1+\lambda)W + \lambda(2+\lambda)W^2]}{1-f^2} = 0. \quad (9)$$

Отсюда

$$BH(W) = \sqrt{1-f^2}, \quad (10)$$

где B — постоянная интегрирования, а

$$H(W) = \begin{cases} \frac{W}{1+2(1+\lambda)W} & \text{при } \lambda(2+\lambda) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$H(W) = \begin{cases} \frac{W}{\sqrt{1+2(1+\lambda)W + \lambda(2+\lambda)W^2}} \left[\frac{2+\lambda+\lambda(2+\lambda)W}{\lambda+\lambda(2+\lambda)W} \right]^{\frac{1+\lambda}{2}} & \text{при } \lambda(2+\lambda) \neq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из (10) и (12) следует, что при $\lambda(2+\lambda) \neq 0$ имеем

$$f = \sqrt{1 - \frac{B^2 W^2}{1+2(1+\lambda)W + \lambda(2+\lambda)W^2}} \left[\frac{2+\lambda+\lambda(2+\lambda)W}{\lambda+\lambda(2+\lambda)W} \right]^{\frac{1+\lambda}{2}}. \quad (13)$$

Соотношения (8) и (13) определяют искомую функцию $f(\theta)$. В частном случае, когда $\lambda = -1$, имеем

$$W = \frac{\sqrt{1-f^2}}{\sqrt{1+B^2-f^2}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 + f^2 = 1 + B^2, \quad (14)$$

откуда, интегрированием и использованием граничных условий (7), получим

$$f(\theta) = m \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}. \quad (15)$$

Когда $\lambda(2+\lambda) = 0$, из (10) и (11) определяем

$$W = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-f^2}}{B-2\sqrt{1-f^2}} & \text{при } \lambda = 0, \end{cases} \quad (16)$$

$$W = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-f^2}}{B+2\sqrt{1-f^2}} & \text{при } \lambda = -2. \end{cases} \quad (17)$$

Подставив значения W из (17) в (8), обозначив $B = 2A$ и проинтегрировав, получим

$$2\theta = \arcsin f - \begin{cases} \frac{2A}{\sqrt{A^2-1}} \arctg \sqrt{\frac{A-1}{A+1}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-f^2}}{1+\sqrt{1-f^2}}} & A > 1, \\ \frac{2A}{\sqrt{1-A^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{1-A}{1+A}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-f^2}}{1+\sqrt{1-f^2}}} & 0 \leq A \leq 1. \end{cases} \quad (18)$$

Используя второе условие (7), для значения неизвестной постоянной A находим

$$2\alpha = \arcsin m - \begin{cases} \frac{2A}{\sqrt{A^2-1}} \arctg \sqrt{\frac{A-1}{A+1}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}}} & A > 1, \\ \frac{2A}{\sqrt{1-A^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{1-A}{1+A}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}}} & 0 \leq A \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Для идеально шероховатых плит уравнение (19) запишется в виде

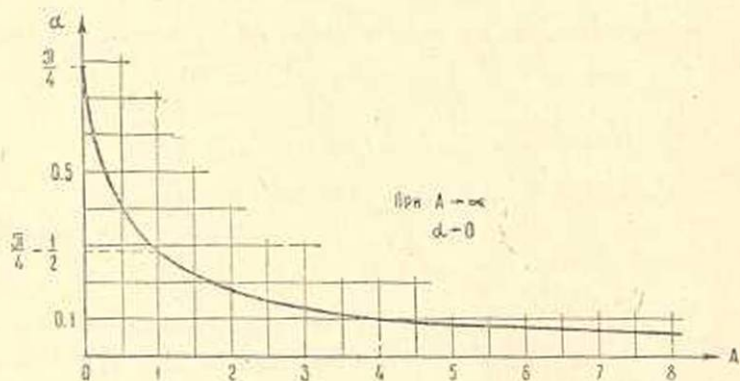
$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A-1}{A+1}}, & A \geq 1, \\ \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{1-A}{1+A}}, & 0 \leq A < 1. \end{cases} \quad (20)$$

По этим формулам на фиг. 2 построен график зависимости α от A . Отметим, что при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($A = 0$)

$$f(0) = \sin 2\theta, \quad (21)$$

а при $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ($A = 1$)

$$2\theta = \arcsin f - \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1-f^2}}{1 + \sqrt{1-f^2}}}. \quad (22)$$



Фиг. 2.

В частном случае, для однородного материала, т. е. при $\lambda = 0$, из (16) и (8) получим

$$2\theta = -\arcsin f + \frac{2A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-f^2}}{1+\sqrt{1-f^2}}}, \quad (23)$$

где $A > 1$ определяется из соотношений

$$2\alpha = -\arcsin m + \frac{2A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}}}. \quad (24)$$

В соотношениях (23) и (24) обозначив $f = \sin 2\psi$ и приняв $m = 1$, получим решение А. Надаи [1]

$$\theta = -\frac{\psi}{2} + \frac{A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right),$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A+1}{A-1}}, \quad A > 1.$$

Далее, переходя к пределу $\lambda \rightarrow 0$ и используя дифференциальное уравнение (6), из выражений (3)–(5) легко получить формулы напряжений для однородного материала. Так, разделив все члены уравнения (6) на $\sqrt{1-f^2}$ и проинтегрировав от нуля до θ , получим

$$f'(\theta) + 2(1+\lambda)\sqrt{1-f^2(\theta)} - 2C = 2\lambda + \lambda(2+\lambda) \int_0^\theta f(\theta) d\theta.$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f'(\theta) + 2(1+\lambda)\sqrt{1-f^2(\theta)} - 2C}{\lambda} = 2 + 2 \int_0^\theta f_{\lambda \rightarrow 0}(\theta) d\theta,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f'(\theta) + 2\sqrt{1-f^2(\theta)} - 2C}{\lambda} = 2 - 2\sqrt{1-f_{\lambda \rightarrow 0}^2(\theta)} + 2 \int_0^\theta f_{\lambda \rightarrow 0}(\theta) d\theta.$$

Но

$$2 \int_0^\theta f_{\lambda \rightarrow 0}(\theta) d\theta = 2 \int_0^\theta \sin 2\psi d\theta = \cos 2\psi + C \ln(C - \cos 2\psi).$$

Тогда из (3)–(5) будем иметь

$$(\tau_r/2k)_{\lambda \rightarrow 0} = D - C \ln r + \frac{1}{2} \cos 2\psi - \frac{1}{2} C \ln(C - \cos 2\psi),$$

$$(\tau_\theta/2k)_{\lambda \rightarrow 0} = D - C \ln r - \frac{1}{2} \cos 2\psi - \frac{1}{2} C \ln(C - \cos 2\psi),$$

$$(\tau_{r\theta}/k)_{\lambda \rightarrow 0} = \sin 2\psi, \quad D = \text{const}, \quad C = \text{const}.$$

Эти формулы получены Надаи.

Полагая, что на некоторой поверхности $r = R$ внешнее давление известно $2p(\theta)$, можем написать

$$\int_0^\pi \tau_r(R, \theta) \cos \theta d\theta = \int_0^\pi p(\theta) \cos \theta d\theta = P. \quad (25)$$

Из (3) и (25) при $\lambda \neq 0$ определяем

$$E = \frac{P}{\sin \alpha} + \frac{kR^3}{\lambda \sin \alpha} \left[m \cos \alpha + \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta d\theta + 2 \int_0^\pi \sqrt{1-f^2(\theta)} \cos \theta d\theta \right]. \quad (26)$$

Уравнениями линий скольжения для рассматриваемой задачи будут

$$r \exp \left\{ \pm \int \sqrt{\frac{1 \pm f(\theta)}{1 \mp f(\theta)}} d\theta \right\} = \text{const} \quad (-\alpha < \theta < \alpha). \quad (27)$$

Исходя из предположения несжимаемости и условий совпадения главных осей напряжения и скорости деформации

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0 \quad \frac{\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta}{2\dot{\gamma}_{r\theta}} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\tau_{r\theta}} \quad (28)$$

аналогично [2] находим

$$u = \frac{g(\theta)}{r}, \quad g(\theta) = g(0) \exp \left\{ -2 \int_0^\theta \frac{f(\theta) d\theta}{V 1 - f^2(\theta)} \right\}. \quad (29)$$

В случае $k = -1$ и $m = \sin \alpha$ из (15) имеем

$$f(\theta) = \sin \theta. \quad (30)$$

Тогда выражения компонентов напряжений будут иметь простой вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= E + \frac{3k}{r} \cos \theta, & \sigma_\theta &= E + \frac{k}{r} \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{k}{r} \sin \theta, & E &= \frac{P}{\sin \alpha} - \frac{3k}{2R} \left[\cos \alpha + \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения линий скольжения имеют вид

$$\begin{aligned} r(1 + \sin \theta)^{-1} &= \text{const}, & 0 \leq \theta \leq \alpha, \\ r(1 - \sin \theta)^{-1} &= \text{const}, & -\alpha \leq \theta \leq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Характер течения определяется выражением

$$g(\theta) = g(0) \cos^2 \theta. \quad (33)$$

Аналогичным образом можно рассматривать задачу о расходящемся канале. Для этого случая следует поменять направление касательных напряжений на контактных поверхностях и изменить знаки перед квадратными корнями в выражениях (3)–(4).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 XII 1961

Մ. Ա. Զադոյան

ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՆՅՈՒԹԻ ՀՈՍՔԸ ԱՍՏԻՃԱՆԱԲԱՐ ՆԵՂԱՅՈՂ ԿԱՆԱԼՈՒՄ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Երկու կողմ, միմյանց նկատմամբ թեք, սաղերի արանքում իդեալական-պլաստիկական դանդաղածի համասարակշռությունը առաջին անգամ ուսումնասիրել է Ա. Նադարին [1]:

Ու. Հիլը [2] օգտվելով արդարություններից որոշել է նյութի հոսքի բնույթը նեղացող կանալում (դժ. 1):

Վ. Վ. Սոկոլովսկին [3] ուսումնասիրել է ալգ (ինչպես նաև առանցքա-
փակարկի) խնդիրը նյութի ամրապնդման դեպքում:

Այս հոդվածում ուսումնասիրվում է նման խնդիր պլաստիկորեն անհա-
մասնել նյութի վերաբերյալ: Պլաստիկական հաստատունի փոխարեն ընդուն-
վում է $k\tau$, որտեղ k և λ հալտնի պարամետրերն են:

Հարումների բաղադրիչները ներկայացնելով (3)–(5) տեսքով, բավա-
րարում ենք հավասարակշռության (1) հավասարումներին և պլաստիկու-
թյան (2) պայմանին, եթե անհալտ f (6) ֆունկցիան որոշվում է (6) ոչ-
զրային դիֆերենցիալ հավասարումից: Օգտվելով (8) նշանակումից և (7)
եզրային պայմաններից ստանում ենք f (6)-ի արժեքը քառակուսիացումների
միջոցով: Այս որոշ արժեքների դեպքում ($\lambda = -1, -2$) ստացվում են պարզ
արդյունքներ: Երբ $\lambda = 0$, ալսինքն համասեռ նյութի դեպքում, ստանում ենք
Նագաիի բանաձևերը:

Սահքի գծերի հավասարումները անհամասեռ նյութի դեպքում ունեն
(27) տեսքը:

Օգտվելով նյութի անսկզմակիությունից պայմանից և կոշտ-պլաստիկական
մարմնի սինեմալից որոշված է տեղափոխման տրագությունը (29) հաստա-
տունի ճշտությամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Nadai A. Über die Gleit- und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände
bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper. Zeits. f.
Phys., 1924, t. 30.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1948.