

А. С. Космодамианский

Кручение и изгиб поперечной силой ортотропных стержней с полостями

Задача о кручении и изгибе поперечной силой эллиптических или круговых стержней с эллиптическими или круговыми полостями приводится, как известно, к аналогичным задачам для изотропных стержней с полостями, поперечные сечения которых получаются из заданных путем аффинного преобразования [1].

Для случая кручения эллиптического изотропного стержня, ослабленного одной эллиптической полостью, Д. И. Шерман получил интегральное уравнение Фредгольма, решение которого привело к эффективному построению искомого решения [2].

Учитывая результаты указанной работы Д. И. Шермана, мы строим приближенное решение задачи о напряженном состоянии ортотропного стержня, ослабленного несколькими полостями, при его кручении и изгибе поперечной силой. Эта приближенность получается за счет неточного удовлетворения граничных условий. Погрешность полученных решений выяснена путем вычисления напряжений в отдельных точках контуров, где напряжения заданы.

1. Рассмотрим эллиптический ортотропный стержень с $(n-1)$ эллиптическими полостями. В поперечном сечении стержня полуоси внешнего эллипса равны a и b , а полуоси внутренних — a_k и b_k ($k=1, 2, \dots, n-1$). Расстояния от центра внешнего эллипса до центров внутренних эллипсов равны l_k . Контур внешнего эллипса обозначим через L , а внутренних — через L_k (фиг. 1).

Стержень закручивается моментами M .

Задача о напряженном состоянии такого стержня сводится к определению функции напряжений ψ , удовлетворяющей уравнению ([1], стр. 149).

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\vartheta. \quad (1.1)$$

При этом на контурах поперечного сечения стержня $\psi = C_k$, где C_k — постоянные, разные на разных контурах.

Угол закручивания ϑ определяется из уравнения

$$2 \iint \psi dx dy = M. \quad (1.2)$$

Здесь интегрирование ведется по площади поперечного сечения стержня.

Определив функцию ψ , неравные нулю напряжения найдем по формулам

$$\tau_{xz_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \quad \tau_{yz_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (1.3)$$

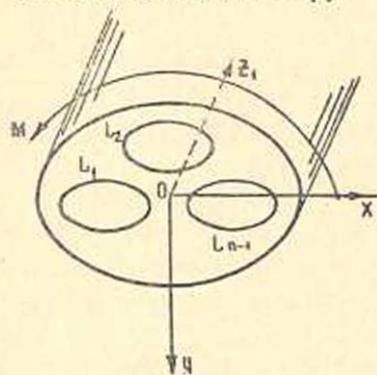
Введем новые переменные

$$x_1 = x, \quad y_1 = \beta y \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}} \right). \quad (1.4)$$

В этих переменных уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} = -\frac{2}{a_{44}} \vartheta = -2G_1 \vartheta. \quad (1.5)$$

Отсюда видно, что задача о кручении ортотропного стержня приводится к задаче кручения изотропного стержня, поперечное сечение которого получилось из заданного



Фиг. 1.

путем аффинного преобразования (1.4). В частности, стержень эллиптический (или круговой) в преобразованной области также будет эллиптическим. При этом в его поперечном сечении горизонтальная ось останется без изменения, а вертикальная увеличится или уменьшится в зависимости от значения коэффициента β , характеризующего анизотропию рассматриваемого стержня.

После определения в преобразованной области функции $\psi(x_1, y_1)$ напряжения следует находить по формулам

$$\tau_{xz_1} = \beta \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \quad \tau_{yz_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (1.6)$$

Для определения жесткости ортотропного стержня имеем уравнение

$$\iint x^2 \tau_{yz_1} - y^2 \tau_{xz_1} dx dy = M. \quad (1.7)$$

В преобразованной области напряжения τ_{xz_1} и τ_{yz_1} выражаются через функцию $\psi(x_1, y_1)$

$$\tau_{xz_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \quad \tau_{yz_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (1.8)$$

Из (1.6) и (1.8) следует, что

$$\tau_{xz_1} = \beta \tau_{x_1 y_1} = \beta G_1 \bar{\tau}_{x_1 y_1}, \quad \tau_{yz_1} = \tau_{y_1 z_1} = G_1 \bar{\tau}_{y_1 z_1}. \quad (1.9)$$

Подставим, далее, (1.4) и (1.9) в уравнение (1.7). Получим

$$\frac{1}{\beta} G_1 \iint (x_1 \bar{\tau}_{y_1 z_1} - y_1 \bar{\tau}_{x_1 z_1}) dx_1 dy_1 = M. \quad (1.10)$$

Отсюда найдем

$$G_1 \iint = \frac{\beta M}{D}, \quad D = \iint (x_1 \bar{\tau}_{y_1 z_1} - y_1 \bar{\tau}_{x_1 z_1}) dx_1 dy_1. \quad (1.11)$$

Здесь D — жесткость изотропного стержня, поперечное сечение которого получается путем применения соотношений (1.4).

Сначала мы решим задачу о кручении изотропного стержня, используя теорию Н. И. Мусхелишвили ([3], стр. 518), а затем по формулам

$$\tau_{x_1 z_1} = \frac{\beta^2 M}{D} \bar{\tau}_{x_1 z_1}, \quad \tau_{y_1 z_1} = \frac{\beta M}{D} \bar{\tau}_{y_1 z_1} \quad (1.12)$$

найдем напряжения, возникающие в ортотропном стержне.

Задача о напряженном состоянии изотропного эллиптического стержня с $(n-1)$ эллиптическими полостями приводится к определению функции комплексного переменного $F(z)$, регулярной в области поперечного сечения стержня. Эта функция определяется из следующих граничных условий ([3], стр. 524)

$$F(t) - \overline{F(t)} = it\bar{t} + C_m, \quad (1.13)$$

где t — аффикс точки на одном из контуров поперечного сечения стержня, а C_m — постоянные ($m=1, 2, \dots, n-1$).

Функцию $F(z)$ можно представить в виде [2]

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) + \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_{mp}}{[\zeta(z - l'_m)]^p}. \quad (1.14)$$

Здесь a_k и b_{mp} — постоянные коэффициенты, $P_k(z)$ — полиномы Фабера для области внешнего эллипса, l'_m — расстояния от центра внешнего эллипса до центров внутренних, а функция ζ связана с z следующей неявной зависимостью

$$z - l'_m = R_m \left(\zeta + \frac{m_m}{\zeta} \right), \quad (1.15)$$

где R_m и m_m — постоянные, характеризующие размеры внутренних эллипсов и их взаимное расположение.

Как и в работе [4], будем искать приближенное решение поставленной задачи в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(z) + \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_{mp}}{[\zeta(z - l'_m)]^p}. \quad (1.16)$$

При рассмотрении граничного условия на контуре L' введем преобразование

$$t = R \left(\sigma + \frac{m}{\sigma} \right), \quad R = \frac{a + \beta b}{2}, \quad m = \frac{a - \beta b}{a + \beta b}. \quad (1.17)$$

а на контурах L'_m

$$t - l'_m = R_m \left(\sigma + \frac{m_m}{\sigma} \right), \quad R_m = \frac{a_m + \beta b_m}{2}, \quad m_m = \frac{a_m - \beta b_m}{a_m + \beta b_m}. \quad (1.18)$$

Здесь $\sigma = e^{i\theta}$ (θ — полярный угол).

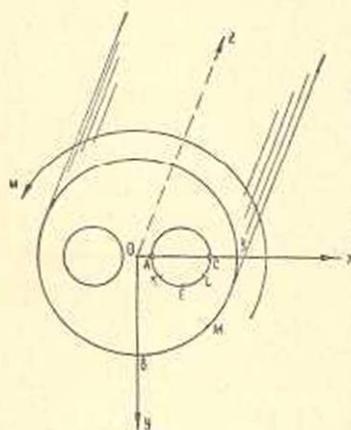
Учитывая преобразования (1.17) и (1.18), граничным условиям можно придать следующий вид

$$f(\sigma) = F[t(\sigma)] - \overline{F[\overline{t(\sigma)}]} - it(\sigma)\overline{t(\sigma)} - C_m = 0. \quad (1.19)$$

Потребуем, чтобы функция $f(\sigma)$ была ортогональна к первым n функциям σ^{-n} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которые представляют из себя полную систему функций на контуре единичного круга γ , где определена переменная σ . Таким путем мы при приближенном удовлетворении граничных условий, как и в работе [5], применяем основную идею метода Бубнова-Галеркина.

Тогда для определения искомым постоянных получим следующие соотношения

$$\int_{\gamma} [F[t(\sigma)] - \overline{F[\overline{t(\sigma)}]} - it(\sigma)\overline{t(\sigma)} - C_m] \sigma^{+n} d\sigma = 0. \quad (1.20)$$



Фиг. 2.

При внесении в формулы (1.20) выражений $F[t(\sigma)]$ следует воспользоваться выражением (1.16) и преобразованиями (1.17) или (1.1) в зависимости от того, для какого контура мы рассматриваем граничное условие.

2. В качестве примера рассмотрим круглый ортотропный стержень с двумя круговыми полостями (фиг. 2).

Для решения задачи о кручении такого стержня необходимо рассмотреть, как это следует из п. 1, изотропный стержень, поперечное сечение которого будет являться эллипсом с двумя эллиптическими отверстиями (фиг. 3).

Следует подчеркнуть, что задача о кручении ортотропного эллиптического стержня с эллиптическими полостями также приводится к рассмотрению изотропного эллиптического стержня с эллиптическими же полостями. Новых трудностей в этой задаче не появляется.

Для рассматриваемого стержня функция $F(z)$ примет вид [4]

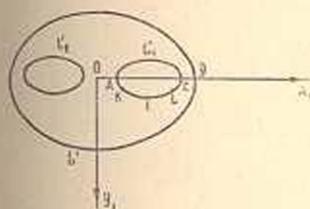
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} ia_k^* \left(\zeta^k + \frac{m^k}{\zeta^k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} ib_k^* \left\{ \frac{1}{[\zeta_1(z-l_1)]^k} + \frac{(-1)^k}{[\zeta_2(z+l_1)]^k} \right\}. \quad (2.1)$$

Для сплошного стержня точное решение задачи о кручении эллиптического стержня получается, если положить

$$F(z) = ia_2^* \left(\zeta^2 + \frac{m^2}{\zeta^2} \right). \quad (2.2)$$

Поэтому при решении аналогичной задачи для стержня с полостями в 1-ом приближении в выражении (1.16) естественно принять $\nu = 2$. Тогда

$$F(z) = ia_2^* \left(\zeta^2 + \frac{m^2}{\zeta^2} \right) + ib_1^* \left\{ \frac{1}{\zeta_1(z-l_1)} - \frac{1}{\zeta_2(z+l_1)} \right\} + ib_2^* \left\{ \frac{1}{[\zeta_1(z-l_1)]^2} + \frac{1}{[\zeta_2(z+l_1)]^2} \right\}. \quad (2.3)$$



Фиг. 3.

При рассмотрении граничных условий на L_1 мы воспользовались представлением функции $1/[\zeta_2(z+l)]^k$ в виде

$$1/[\zeta_2(z+l)]^k = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mk} P_{mk}(z-l), \quad (2.4)$$

где P_{mk} — полиномы Фабера для эллипса L_1 .

Коэффициенты A_{mk} определяются по формуле ([6], стр. 422)

$$A_{mk} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\zeta_2^k} \frac{d\sigma}{\sigma^{m+1}}. \quad (2.5)$$

Здесь учтено преобразование (1.18).

При рассмотрении же граничных условий на L функции $1/\zeta_1$ и $1/\zeta_2$ раскладывались в ряды Лорана.

После проведения указанных разложений и интегрирования, соотношения (1.20) приведутся к алгебраической системе вида

$$\begin{aligned} a_2^* (1 + m^2) + 2l \frac{R_1}{R^2} b_1^* + 2 \frac{R_1^2}{R^2} b_2^* &= R^2 m, \\ b_1^* \left(\frac{1}{1 + m_1} - A_{11} \right) + A_{12} b_2^* + 2l \frac{R_1}{R^2} a_2^* &= iR_1, \\ -A_{21} b_1^* + b_2^* \left(\frac{1}{1 + m_1^2} + A_{22} \right) + \frac{R_1^2}{R^2} a_2^* &= \frac{R_1^2 m_1}{1 + m_1^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Во втором приближении в выражении (1.16) примем $\nu = 4$. Тогда алгебраическая система для определения искомых постоянных будет такой

$$\begin{aligned}
 & \alpha_2^* (1 + m^2) + 2l \frac{R_1}{R^2} b_1^* + 2 \frac{R_1^2}{R^2} = R^2 m, \\
 & \alpha_4^* (1 + m^4) + 2l \frac{R_1}{R^4} b_1^* [l^2 + m_1 (3R_1^2 - R^2) - mR^2] + \\
 & + 2b_2^* \frac{R_1^2}{R^4} [3l^2 + 2m_1 (R_1^2 - R^2)] + 6l \frac{R_1^3}{R^4} b_3^* + 2 \frac{R_1^4}{R^4} b_4^* = 0, \\
 & 2l \frac{R_1}{R^2} \alpha_2^* + b_1^* \left(\frac{1}{1 + m_1} - A_{11} \right) + A_{12} b_2^* - A_{13} b_3^* + A_{14} b_4^* + \\
 & + \alpha_4^* \frac{l}{R^3} (4l^2 R_1 + 12m_1 R_1^3 - 8m R_1 R^2) = l R_1, \\
 & R_1^2 / R^2 \cdot (\alpha_2^* - 4m \alpha_4^*) + 2 \frac{\alpha_4^*}{R^4} R_1^2 (3l^2 + 2m_1 R_1^2) - A_{21} b_1^* + \\
 & + b_2^* \left(\frac{1}{1 + m_1^2} + A_{22} \right) - A_{23} b_3^* + A_{24} b_4^* = \frac{R_1^2 m_1}{1 + m_1^2}, \quad (2.7) \\
 & 4l \frac{R_1^3}{R^4} \alpha_4^* - A_{31} b_1^* + A_{32} b_2^* + b_3^* \left(\frac{1}{1 + m_1^3} - A_{33} \right) + A_{34} b_4^* = 0, \\
 & \frac{R_1^4}{R^4} \alpha_4^* - A_{41} b_1^* + A_{42} b_2^* - A_{43} b_3^* + b_4^* \left(\frac{1}{1 + m_1^4} + A_{44} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Определение коэффициентов, не влияющих на напряженное состояние стержня, мы здесь не приводим.

Для определения жесткости стержня воспользуемся формулой Н. И. Мухелишвили ([3], стр. 529)

$$D = \mu (J + D_0), \quad (2.8)$$

где

$$J = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} \overline{\omega^2(\sigma)} \omega(\sigma) d\omega(\sigma), \quad D_0 = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma} [F(\sigma) + \overline{F(\sigma)}] d[\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}]. \quad (2.9)$$

После некоторых преобразований в 1-ом приближении будем иметь

$$J = \frac{\pi}{2} R^4 (1 - m^4) - \pi [2l^2 R_1^2 (1 - m_1^2) + R_1^4 (1 - m_1^4)], \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 D_0 = & -2\pi m R^2 \left[\alpha_2^* (1 - m^2) - \frac{2l R_1}{R^2} b_1^* - \frac{2R_1^2}{R^2} b_2^* \right] + \\
 & + 2R_1 \pi \left[2 \frac{R_1}{R^2} \alpha_2^* (l^2 + m_1 R_1^2) - b_1^* \left(\frac{l_1}{1 - m_1} + A_{11} l_1 + 2m_1 R_1 A_{21} \right) + \right. \\
 & \left. + b_2^* \left(A_{12} l_1 - \frac{2m_1 R_1}{1 - m_1^2} + 2A_{22} m_1 R_1 \right) \right].
 \end{aligned}$$

В рассмотренных нами примерах жесткость во 2-ом приближении незначительно отличается от жесткости, полученной в 1-ом приближении. Поэтому выражения для жесткости во 2-ом приближении мы здесь не приводим.

Вычисления для напряжений в наиболее интересных точках поперечного сечения стержня были проведены для $\beta = 1$ и $\beta = \frac{1}{2}$.

когда $l_1/a = \frac{1,5}{3,5}$, $l_1/a_1 = 1,5$. Для этих случаев в таблице 1 приведены значения постоянных a_j^* и b_j^* , а в таблице 2 — значения напряжений τ_{yz} , τ_{xz} и τ_{nz} . Вычисления для напряжений τ_{xz} и τ_{yz} были проведены на основании формул (1.12), где ([3], стр. 525)

$$\bar{\tau}_{xz} - i \bar{\tau}_{yz} = F'(z) - i\bar{z}, \quad (2.11)$$

а напряжения τ_{nz} определяются через напряжения τ_{xz} и τ_{yz}

$$\tau_{nz} = \tau_{yz} \cos(nx) + \tau_{xz} \cos(ny). \quad (2.12)$$

Таблица 1

β	Приближения	Коэффициенты					
		a_2^*	a_4^*	b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*
$\frac{1}{2}$	1-ое	1,880	0	0,623	0,030	0	0
	2-ое	1,876	0,052	0,635	0,027	-0,006	0,001
1	1-ое	-0,365	0	1,436	0,080	0	0
	2-ое	-0,368	-0,072	1,443	0,086	-0,013	0,006

Таблица 2

β	Напряж.	Приближения	Точки							
			A	K	E	L	C	D	M	B
$\frac{1}{2}$	$\frac{100 \tau_{yz}}{M}$	1-ое	1,423	0,106	0,010	0,758	2,879	1,994	1,198	0
		2-ое	1,421	0,136	-0,001	0,785	2,829	1,858	1,236	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{100 \tau_{xz}}{M}$	1-ое	0	0,115	-0,404	-0,769	0	0	-1,202	-1,478
		2-ое	0	0,134	-0,410	-0,785	0	0	-1,239	-1,437
$\frac{1}{2}$	$\frac{100 \tau_{nz}}{M}$	1-ое	0	0,007	0,010	-0,008	0	0	-0,003	0
		2-ое	0	0,001	-0,001	0,0002	0	0	-0,002	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{100 \tau_{yz}}{M}$	1-ое	0,713	0,369	0,020	1,038	2,022	1,961	1,185	0
		2-ое	0,682	0,398	-0,004	1,053	2,038	2,002	1,157	0
1	$\frac{100 \tau_{xz}}{M}$	1-ое	0	0,384	-0,340	-1,059	0	0	-1,170	-1,530
		2-ое	0	0,391	-0,339	-1,050	0	0	-1,147	-1,569
1	$\frac{100 \tau_{nz}}{M}$	1-ое	0	-0,008	0,020	-0,015	0	0	0,011	0
		2-ое	0	0,004	-0,004	0,002	0	0	0,007	0

Значения τ_{xz_1} , вычисленные в выбранных нами точках, позволяют оценить погрешность в удовлетворении граничных условий. Из таблицы 2 видно, что значения τ_{xz_1} , вычисленные во втором приближении, составляют менее 0,5% от максимального напряжения, возникающего в стержне. Это говорит о высокой точности полученного решения. Сравнение напряжений, вычисленных в 1-ом и 2-ом приближениях, позволяет оценить быстроту сходимости примененного метода. Это сравнение показывает, что уже 1-ое приближение приводит к достаточно точным результатам.

Для эллиптического изотропного стержня с двумя эллиптическими полостями, когда $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = 2$, напряжения τ_{yz_1} и τ_{xz_1} можно найти путем использования таблицы 2. Для этой цели нужно значения напряжений τ_{yz_1} , приведенные в таблице 2 для $\beta = \frac{1}{2}$, умножить на 2, а τ_{xz_1} — на 4.

Таблица 2 устанавливает также влияние анизотропии на концентрацию напряжений в рассматриваемом стержне. Известно, что напряжения в сплошном анизотропном стержне получаются такими же, как и в изотропном стержне той же формы ([1], стр. 153). В стержне же с полостями анизотропия заметно влияет на напряженное состояние.

В изотропном эллиптическом стержне с двумя эллиптическими полостями концентрация напряжений получается примерно такой же, как и в сплошном стержне. Здесь применение полостей при уменьшении веса стержня не вносит заметного увеличения концентрации напряжений.

3. Пусть эллиптический ортотропный стержень с двумя эллиптическими полостями (фиг. 3) или круглый стержень с двумя круговыми полостями (фиг. 4) изгибается силой P .

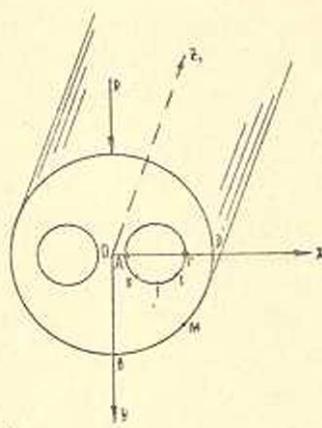
Задача о напряженном состоянии такого стержня приводится к определению функции напряжений ψ_1 , удовлетворяющей уравнению ([1], стр. 219)

$$a_{44} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + a_{55} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = -\frac{2P}{J} a_{13} x - 2\theta + a_{44} \frac{\partial \tau_2}{\partial x} - a_{55} \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \quad (3.1)$$

и граничным условиям

$$\psi_1 = \int_0^s (\tau_2 dx - \tau_1 dy) + c_m^* \quad (3.2)$$

Здесь τ_1 и τ_2 — частное решение уравнения



Фиг. 4.

$$\frac{\partial \tau_{xz_1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz_1}}{\partial y} - \frac{P}{J} y = 0, \quad (3.3)$$

и c_m^* — постоянные.

Напряжения, возникающие в стержне, представляются в виде

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_{z_1} = -\frac{P}{J} z_1 y, \quad (3.4)$$

$$\tau_{xz_1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \tau_1, \quad \tau_{yz_1} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \tau_2.$$

В работе [1] показано, что функция напряжений ψ_1 может быть выражена через функцию обобщенного комплексного переменного z_3

$$\psi_1 = 2\text{Re}[\Phi_3(z_3)] + \psi_0, \quad (3.5)$$

где ψ_0 — частное решение уравнения (3.1),

$$z_3 = x + i\beta y, \quad \beta = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}. \quad (3.6)$$

Функция $\Phi_3(z_3)$ определяется из граничных условий на контурах отверстий поперечного сечения стержня

$$2\text{Re}[\Phi_3(z_3)] = c_m^* - \psi_0 + \int_0^s (\tau_2 dx - \tau_1 dy). \quad (3.7)$$

После определения функции ψ_1 касательные напряжения определяются по формулам

$$\tau_{xz_1} = 2\text{Re}[i\beta\Phi_3'(z_3)] - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + \tau_1, \quad (3.8)$$

$$\tau_{yz_1} = -2\text{Re}[\Phi_3'(z_3)] - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \tau_2.$$

Примем

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{P}{2J} y^2. \quad (3.9)$$

В рассматриваемом случае в силу геометрической и силовой симметрии крутка θ равна нулю. Это позволяет частное решение (3.1) представить в виде

$$\psi_0 = -\frac{P}{J} \frac{a_{13}}{a_{55}} xy^2. \quad (3.10)$$

Граничное условие (3.7) примет вид

$$2\text{Re}[\Phi_3(z_3)] = c_m^* + \frac{P}{J} \frac{a_{13}}{a_{55}} xy^2 + \frac{P}{2J} \int y^2 dx. \quad (3.11)$$

Касательные напряжения определяются формулами

$$\tau_{xz_3} = 2\operatorname{Re} [i\beta\Phi_3'(z_3)] - \frac{2P}{J} \frac{a_{12}}{a_{33}} xy, \quad (3.12)$$

$$\tau_{yz_3} = -2\operatorname{Re} [\Phi_3'(z_3)] + \frac{P}{2J} y^2 \left(1 + 2 \frac{a_{12}}{a_{33}}\right).$$

Функция $\Phi_3(z_3)$ определена в области, изображенной на фиг. 3. Эта область получается из поперечного сечения рассматриваемого стержня путем аффинного преобразования (1.4) таким же образом, как и в задаче о кручении такого же стержня.

В данном случае функцию $\Phi_3(z_3)$ можно представить в виде [7]

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\zeta^k + \frac{m^k}{\zeta^k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left[\frac{1}{[\zeta_1(z_3 - l_1)]^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta_2(z_3 + l_1)]^k} \right]. \quad (3.13)$$

Здесь ζ , ζ_1 и ζ_2 связаны с z_3 следующими зависимостями

$$z_3 = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad z_3 - l_1 = R_1 \left(\zeta_1 + \frac{m_1}{\zeta_1}\right), \quad z_3 + l_1 = R_1 \left(\zeta_2 + \frac{m_1}{\zeta_2}\right), \quad (3.14)$$

$$m = m_1 = \frac{1 - \beta c}{1 + \beta c}, \quad R = \frac{a}{2} (1 + \beta c), \quad R_1 = \frac{a_1}{2} (1 + c\beta), \quad c = \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Для сплошного стержня точное решение задачи об изгибе стержня поперечной силой получится, если принять

$$\Phi_3(z_3) = a_1 \left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) + a_2 \left(\zeta^2 + \frac{m^2}{\zeta^2}\right). \quad (3.15)$$

Поэтому при рассмотрении стержня с полостями мы в 1-ом приближении для функции $\Phi_3(z_3)$ примем выражение

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{k=1}^3 a_k \left(\zeta^k + \frac{m^k}{\zeta^k}\right) + \sum_{k=1}^3 b_k \left\{ \frac{1}{[\zeta_1(z_3 - l_1)]^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta_2(z_3 + l_1)]^k} \right\}. \quad (3.16)$$

Поступая таким же образом, как и в задаче о кручении стержня, для определения постоянных a_k и b_k мы получим алгебраическую систему вида

$$\begin{aligned} a_1(1+m) + 2 \frac{R_1}{R} b_1 &= \frac{P}{J} \frac{R^2}{8} (1+m)(1-m)^2 \left(\frac{a_{12}}{a_{44}} + \frac{3}{2\beta^2} \right), \\ a_2(1+m^2) + b_1 \frac{2R_1}{R^2} (l^2 - mR^2 + m_1R^2) + 4b_2 l \frac{R_1^2}{R^3} + 2b_3 \frac{R_1^3}{R^3} &= \\ &= -\frac{P}{J} \frac{R^2}{8} (1+m)(1-m)^2 \left(\frac{a_{12}}{a_{44}} + \frac{1}{6\beta^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{R_1}{R} (a_1 - 3ma_3) + 3a_3 \frac{R_1}{R^3} (l^2 + m_1 R_1^2) + b_1 \left(\frac{1}{1 + m_1} + A_{11} \right) - b_2 A_{12} + \\
& + b_3 A_{13} = \frac{P}{J} \frac{R_1^3}{8} (1 - m_1)^2 \left(\frac{a_{13}}{a_{44}} + \frac{3}{2\beta^2} \right), \\
& 3a_3 l \frac{R_1^2}{R^3} + b_1 A_{21} + b_2 \left(\frac{1}{1 + m_1^2} - A_{22} \right) + b_3 A_{23} = \\
& = -\frac{P}{4J} l R_1^2 \frac{a_{13}}{a_{44}} (1 - m_1)^2, \\
& a_3 \frac{R_1^3}{R^3} + b_1 A_{31} - b_2 A_{32} + b_3 \left(\frac{1}{1 + m_1^3} + A_{33} \right) = \\
& = -\frac{P}{8J} \frac{(1 - m_1)^2}{1 + m_1^3} \left(\frac{a_{13}}{a_{44}} + \frac{1}{6\beta^2} \right) R_1^3. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Решение этой системы и определение касательных напряжений мы провели для случая, когда $a_{13}/a_{44} = -\frac{1}{10}$, $c = 1$, $\frac{l}{a_1} = 1,5$,

$$\frac{l}{a} = \frac{1,5}{3,5}, \quad \beta = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Вычисления напряжений в 1-ом приближении показали, что граничные условия достаточно хорошо удовлетворяются на внутренних контурах и значительно хуже на внешнем контуре. Поэтому во 2-ом приближении мы приняли

$$\Phi_2(z_3) = \sum_{k=1,3}^5 a_k \left(\zeta^k + \frac{m^k}{\zeta^k} \right) + \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{1}{[\zeta_1(z_3 - l_1)]^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta_2(z_3 + l_1)]^k} \right\}. \quad (3.18)$$

В таблице 3 для этих двух приближений приведены значения постоянных a_k и b_k , а в таблице 4—значения для напряжений в тех же точках, что и в задаче о кручении стержня.

Таблица 3

β	Приближения	Коэффициенты					
		a_1	a_3	a_5	b_1	b_2	b_3
$\frac{1}{2}$	1-ое	7,125	-0,734	0	-2,791	0,188	-0,016
	2-ое	7,135	-0,733	-0,122	-2,815	0,181	-0,011
1	1-ое	9,052	-0,092	0	-2,711	0,154	-0,043
	2-ое	9,054	-0,092	0,047	-2,714	0,151	-0,045

Таблица 4

3	Напряж.	Прибли- жения	Т о ч к и								
			O	A	K	E	L	C	D	M	B
	$\frac{J}{\rho} \sim yz_1$	1-ое	-11,38	-20,076	-3,276	-0,007	-3,414	-14,595	-4,340	-1,671	-0,46
		2-ое	-11,37	-20,037	-3,321	-0,005	-3,480	-14,693	-3,674	-2,092	-0,11
1/2	$\frac{J}{\rho} \sim xz_1$	1-ое	0	0	-3,291	0,721	3,268	0	0	1,860	0
		2-ое	0	0	-3,334	0,685	3,480	0	0	1,935	0
	$\frac{J}{\rho} \sim xz_2$	1-ое	—	0	0,011	-0,007	-0,103	0	0	0,133	-0,46
		2-ое	—	0	0,069	-0,005	0,0003	0	0	-0,111	-0,11
	$\frac{J}{\rho} \sim yz_2$	1-ое	-10,460	-12,915	-5,087	0,037	-5,461	-10,503	-6,531	-2,300	0,10
		2-ое	-10,464	-12,923	-5,083	-0,038	-5,450	-10,570	-6,671	-2,300	-0,02
1	$\frac{J}{\rho} \sim xz_1$	1-ое	0	0	-5,160	1,300	5,485	0	0	2,143	0
		2-ое	0	0	-5,171	1,281	5,475	0	0	2,276	0
	$\frac{J}{\rho} \sim xz_2$	1-ое	—	0	0,052	-0,037	0,017	0	0	-0,111	0,10
		2-ое	—	0	0,062	-0,038	0,018	0	0	-0,017	-0,02

Здесь наибольшая погрешность в граничных условиях во 2-ом приближении не превышает 0,5%.

Таблица 4 позволяет установить сильное влияние анизотропии для стержня с полостями, в то время как для сплошного стержня это влияние незначительно ([1], стр. 226).

Саратовский Государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступила 25 I 1962

Ա. Ս. Կոսմոմիանսկի

ԽՈՒՈՉՆԵՐ ՈՒՆԵՅՈՂ ՕՐՓՈՏՐՈՊ ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄՆ ՈՒ ԾՈՒՌՍԸ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒԺՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արված է մի քանի խոտչներով թուլացված օրթոտրոպ ձողերի՝ լայնական ուժով սլոբման ու ծաման խնդրի մոտավոր լուծումը Եզրային պարմաններին բավարարելիս օգտագործվել է Բուբնով-Գալերկինի մեթոդը:

Ուսումնասիրված է անիզոտրոպիայի ազդեցութունը դիտարկված ձողերի լարուն վիճակի վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
2. Шерман Д. И. К вопросу о кручении эллиптического бруса, продольно ослабленного эллиптической же полостью. Инженерный сборник, 25, 1959.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
4. Космодамианский А. С. Кручение эллиптического стержня с двумя круговыми полостями. Инженерный сборник, 31, 1961.
5. Космодамианский А. С. Кручение и изгиб круглого стержня с круговыми полостями. Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, № 4, 1961.
6. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
7. Космодамианский А. С. Изгиб эллиптической балки с двумя круговыми полостями. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 3, 1960.